

ARCHIMÈDE, BARENBLATT, ET SATO-TATE

PROJECTIONS SPHÉRIQUES ET LOIS DE PROBABILITÉS CLASSIQUES ASSOCIÉES

DJALIL CHAFAÏ

RÉSUMÉ. Notes d'un exposé au groupe de travail informel de probabilités <https://probas.math.ens.psl.eu/> à travers l'histoire, avec des morceaux de géométrie, de probabilités, d'analyse, d'algèbre, et de théorie des nombres.

TABLE DES MATIÈRES

1. Théorème d'Archimède sur la sphère et le cylindre	1
2. Profils Barenblatt : diffusion rapide et milieux poreux	3
3. Loi de Sato-Tate en théorie des nombres via $\mathbb{S}^3$ et $SU(2)$	4
Références	5

1. THÉORÈME D'ARCHIMÈDE SUR LA SPHÈRE ET LE CYLINDRE

« Finally although in the year 1500 Europe knew less than Archimedes who died in the year 212 BC, yet in the year 1700, Newton's Principia had been written and the world was well started on the modern epoch. » Alfred North Whitehead, in *Science and the Modern World* (1925), repris notamment par Arthur Koestler dans *Les Somnambules* (The Sleepwalkers) (1959).

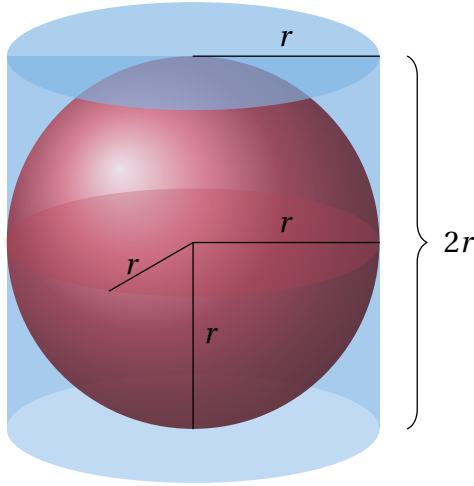


FIGURE 1. Une sphère et son cylindre circonscrit, c'est-à-dire le plus petit possible la contenant.

Pour $n = 3$ et $k = 1$, le théorème 1.1 affirme que la loi uniforme sur la sphère, projetée sur son diamètre vertical, donne la loi uniforme sur ce diamètre. Ceci coïncide avec la découverte d'Archimède de Syracuse (-287 – -212) : en considérant la section par deux plans parallèles perpendiculaires à l'axe du cylindre, la surface de la portion de sphère entre les deux plans est égale à la surface de la portion de cylindre entre les deux plans. En particulier, la sphère et la surface latérale du cylindre ont même aire, ce qui revient à dire que l'aire de la sphère de rayon r est $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$. Archimède a procédé en utilisant la méthode d'exhaustion, préfigurant, avec plus de 1800 ans d'avance, le

calcul intégral. Le théorème 1.1 est la généralisation à toutes dimensions, exprimée dans le vocabulaire contemporain de la théorie des probabilités. La légende affirme qu'Archimède considérait qu'il s'agissait de son meilleur résultat, et demanda à ce que soit gravé sur sa pierre tombale le dessin d'une sphère et de son cylindre circonscrit. Cicéron (-106 – -43) raconte dans les *Tusculanes* (V, 64–66) avoir retrouvé cette tombe à Syracuse en -75, grâce à ce motif, soit 137 ans après la mort d'Archimède, tué par un soldat romain lors du siège de la ville.

Théorème 1.1: De la sphère et du cylindre (Archimède)

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, de loi uniforme sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Si $n \geq 3$, alors $\text{proj}_{\mathbb{R}^{n-2}}(X) = (X_1, \dots, X_{n-2})$ suit la loi uniforme sur la boule unité $\mathbb{B}^{n-2} = \{x \in \mathbb{R}^{n-2} : |x| \leq 1\}$. Plus généralement, pour tout $1 \leq k < n$, la densité de $Y = \text{proj}_{\mathbb{R}^k}(X) = (X_1, \dots, X_k)$ est

$$y \mapsto c(1 - |y|^2)_+^{\frac{n-k-2}{2}} \quad \text{où} \quad c = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{k/2}\Gamma((n-k)/2)}.$$

Dans les densités, on convient que t_+^a vaut t^a si $t > 0$ et 0 si $t \leq 0$, y compris pour $a \leq 0$; les valeurs au bord sont sans effet sur la loi. La loi de Y est une loi bêta symétrique multivariée sur $\mathbb{B}^k$, uniforme si $k = n - 2$. Si $k < n - 2$, son exposant est strictement positif et elle a, à dilatation près, un profil de Barenblatt à support compact, considéré plus loin. Le cas $k = n - 1$ a un exposant $-1/2$ et une densité non bornée au bord.

En particulier, pour tout $n \geq 2$ et $k = 1$, il vient, par l'invariance par rotation de la loi de X , que pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\langle X, \theta \rangle \stackrel{d}{=} X_1 \sim \text{Beta}_{[-1,1]}(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2})$, de densité proportionnelle à $x \mapsto (1-x)_+^p(1+x)_+^p = (1-x^2)_+^p$ où $p = (n-3)/2$. Il s'agit de la loi uniforme si $n = 3$, du demi-cercle si $n = 4$, et de l'arcsinus si $n = 2$.

Démonstration. L'invariance orthogonale de la loi de X assure celle de la loi de Y . Il suffit donc de déterminer la loi de $|Y|^2$. Or X a la même loi que $Z/|Z|$ où $Z = (Z_1, \dots, Z_n) \sim \mathcal{N}(0, I_n)$. Donc Y a même loi que $(Z_1, \dots, Z_k)/|Z|$, de sorte que $|Y|^2$ a même loi que $A/(A+B)$ avec $A \sim \chi^2(k)$ et $B \sim \chi^2(n-k)$ indépendantes. Il vient donc¹ que² $|Y|^2 \sim \text{Beta}_{[0,1]}(k/2, (n-k)/2)$. Donc $|Y|$ a pour densité $r \mapsto c' r_+^{k-1} (1-r^2)_+^{(n-k-2)/2}$ où $c' = 2/\text{beta}(k/2, (n-k)/2)$. En coordonnées polaires $y = r\theta$, l'élément de volume est $dy = r^{k-1} dr d\sigma(\theta)$, où σ est la mesure de surface sur $\mathbb{S}^{k-1}$ (avec $|\mathbb{S}^0| = 2$). Par invariance orthogonale, la densité de Y vaut donc $c(1 - |y|^2)_+^{(n-k-2)/2}$, avec

$$c = \frac{c'}{|\mathbb{S}^{k-1}|} = \frac{2}{|\mathbb{S}^{k-1}| \text{beta}(k/2, (n-k)/2)} = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{k/2}\Gamma((n-k)/2)}.$$

□

Cette partie est inspirée de [LPMO1] et [L3GD].

Corollaire 1.2: Représentation de la loi uniforme sur la boule ou théorème d'Archimède renversé

Pour tout $n \geq 1$, si $Z_1, \dots, Z_n$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et E est exponentielle de moyenne 1, indépendante de $Z_1, \dots, Z_n$, alors le vecteur aléatoire $(Z_1, \dots, Z_n)/\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_n^2 + 2E}$ suit la loi uniforme sur $\mathbb{B}^n$.

Démonstration. Si $Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}$ sont i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $(Z_1, \dots, Z_n)/\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_{n+2}^2}$ suit la loi uniforme sur $\mathbb{B}^n$ d'après le théorème 1.1. D'autre part, $Z_{n+1}^2 + Z_{n+2}^2 \sim \chi^2(2) = \text{Gamma}(2/2, 1/2) = \text{Exp}(1/2) \stackrel{d}{=} 2E$. □

Ce théorème de représentation de la loi uniforme se généralise aux boules ℓ^p , voir [B+].

Ce théorème, combiné à la loi des grands nombres, indique que si X suit la loi uniforme sur $\mathbb{B}^n(\sqrt{n})$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\langle X, \theta \rangle \stackrel{d}{=} X_1 \stackrel{d}{\rightarrow} \mathcal{N}(0, 1)$ quand $n \rightarrow \infty$. Il s'agit d'un cas particulier du phénomène central limite pour les corps convexes, qui faisait l'objet d'une conjecture, démontrée dans [K]. Sur la densité,

$$\left(1 - \frac{|y|^2}{n}\right)_+^{-\frac{n-3}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{|y|^2}{2}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ce théorème indique enfin qu'en grande dimension $n \rightarrow \infty$, l'essentiel de la masse de $\mathbb{B}^n(\sqrt{n})$ se situe près de $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{n})$. Il s'agit d'un cas particulier du phénomène couche mince (thin shell) pour les corps convexes, qui faisait l'objet d'une conjecture, démontrée récemment dans [KL]. Une preuve alternative fournissant une constante optimale a été obtenue dans [CK] : pour un vecteur log-concave isotrope W de $\mathbb{R}^n$, $\text{Var}(|W|^2) \leq 8n$.

1. Rappelons que $\text{Gamma}(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$, a pour densité $u \mapsto \Gamma(a)^{-1} \lambda^a u^{a-1} e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{u \geq 0}$, où $\Gamma(a) = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendantes avec $A_k \sim \text{Gamma}(a_k, \lambda)$, alors $(A_1, \dots, A_n)/(A_1 + \dots + A_n) \sim \text{Dirichlet}(a_1, \dots, a_n)$, qui ne dépend pas de λ . Il s'agit d'une loi sur le simplexe des lois de probabilité discrètes $\{(p_1, \dots, p_n) \in [0, 1]^n : p_1 + \dots + p_n = 1\}$. Si $(B_1, \dots, B_n) \sim \text{Dirichlet}(a_1, \dots, a_n)$, alors pour tous $I_1, \dots, I_r$ formant une partition de $\{1, \dots, n\}$ en $r \geq 2$ blocs non vides, $(\sum_{i \in I_1} B_i, \dots, \sum_{i \in I_r} B_i) \sim \text{Dirichlet}(\sum_{i \in I_1} a_i, \dots, \sum_{i \in I_r} a_i)$, et pour toute partie non vide et propre $I \subset \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i \in I} B_i \sim \text{Beta}_{[0,1]}(\sum_{i \in I} a_i, \sum_{i \notin I} a_i)$. Si $U_1, \dots, U_n$ sont i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$, et si $B_1, \dots, B_{n+1}$ sont les longueurs des blocs de la partition associée de $[0, 1]$, écarts successifs dans la statistique d'ordre, alors $(B_1, \dots, B_{n+1}) \sim \text{Dirichlet}(1, \dots, 1)$ (avec $n+1$ paramètres). Les lois de Dirichlet jouent un rôle fondamental en simulation, en statistique mathématique, et en théorie des probabilités. Les lois de Poisson-Dirichlet sont des lois sur des partitions aléatoires de masse en une infinité de composantes, liées aux lois de Dirichlet par des procédures de passage à la limite et de réordonnement.

2. La loi $\text{Beta}_{[0,1]}(a, b)$, $a, b > 0$, a pour densité $u \mapsto \text{beta}(a, b)^{-1} u^{a-1} (1-u)^{b-1}$ où $\text{beta}(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$.

Théorème 1.3: Projection stéréographique de la loi uniforme sur la sphère

Soit $n \geq 2$, un vecteur aléatoire X de loi uniforme sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$, et $T : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ la projection stéréographique de pôle nord e_n définie par $T(x) = (x_1, \dots, x_{n-1})/(1 - x_n)$ si $x = (x_1, \dots, x_n) \neq e_n$, et $T(e_n) = \infty$. Alors la densité du vecteur aléatoire $Y = T(X)$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ est

$$y \mapsto c(1 + |y|^2)^{-(n-1)} \quad \text{où} \quad c = \frac{2^{n-2}\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}.$$

Cette loi a, pour $n \geq 3$ et à dilatation près, un profil de Barenblatt à support plein. Le cas $n = 2$ correspondrait à $m = 0$, exclu du cadre $m > 0$ de la section suivante. C'est aussi une loi de Student multivariée de dimension $d = n - 1$, de position $\mu = 0$, de matrice d'échelle $\Sigma = d^{-1}I_d$, avec $r = n - 1$ degrés de liberté, de densité

$$y \mapsto c(1 + r^{-1}(y - \mu) \cdot \Sigma^{-1}(y - \mu))^{-(r+d)/2} \quad \text{où} \quad c = \frac{\Gamma((r+d)/2)}{\Gamma(r/2)(r\pi)^{d/2}\sqrt{\det \Sigma}}.$$

C'est la loi de $\mu + A/\sqrt{B/r}$ où $A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ et $B \sim \chi^2(r)$ sont indépendantes. Pour $n = 2$, il s'agit de la loi de Cauchy sur $\mathbb{R}$, loi du rapport de deux v.a. gaussiennes réelles standard indépendantes. Pour $n = 3$, il s'agit de la loi de Cauchy complexe sur $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, loi du rapport de deux v.a. gaussiennes complexes standard indépendantes.

Démonstration. Pour $n \geq 2$, le pôle nord est de mesure de surface nulle, donc $T(X)$ est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-1}$. L'inverse de T sur $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{e_n\}$ est $F(y) = (2y/(1 + |y|^2), (|y|^2 - 1)/(1 + |y|^2))$. Posons $q = 1 + |y|^2$. Pour $1 \leq i \leq n - 1$, $\partial_i F(y) = (2e_i/q - 4y_i y/q^2, 4y_i/q^2)$ et $\langle \partial_i F(y), \partial_j F(y) \rangle = (4/q^2)\delta_{ij}$. Le jacobien vaut donc

$$J_F(y) = \sqrt{\det((DF(y))^T DF(y))} = \left(\frac{2}{1 + |y|^2} \right)^{n-1}.$$

Si $|\mathbb{S}^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ désigne la mesure de surface de $\mathbb{S}^{n-1}$, la formule du changement de variables donne

$$\mathbb{E}[h(T(X))] = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(y) J_F(y) dy$$

pour toute fonction borélienne bornée $h : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$. □

Remarque 1.4: Sphères, projections, lois bêta et de Student, profils Barenblatt, et gaussiennes

Le théorème 1.1 indique que la projection de $\mathbb{S}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}^k$, linéaire, produit des profils $c(1 + |y|^2)_+^a$ avec $a = (n - k - 2)/2 \geq -1/2$, à support compact, tandis que le théorème 1.3 indique que la projection stéréographique de $\mathbb{S}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}^{n-1}$, non linéaire, produit un profil $c(1 + |y|^2)^{-b}$, avec $b > 0$, à queue lourde. Les paramètres a et b sont entiers ou demi-entiers, et cette quantification provient de la réalisation géométrique qui implique des dimensions, qui sont entières. Tout cela peut être vu également comme une mécanique des fonctions spéciales eulériennes Gamma et bêta multivariées. Il est possible de définir les lois bêta et de Student géométriquement comme des généralisations à paramètre continu des lois des projections sphériques. Comme expliqué plus loin, elles sont reliées par la famille des profils ou lois de Barenblatt dans les domaines de paramètres précisés ci-dessus. Cette famille contient également la loi gaussienne comme cas critique commun.

2. PROFILS BARENBLATT : DIFFUSION RAPIDE ET MILIEUX POREUX

Considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante, pour une densité u sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$:

$$\partial_t u = \Delta(u^m) = \operatorname{div}(m u^{m-1} \nabla u), \quad t > 0.$$

Le paramètre m est réel positif. Le cas $m = 1$ est l'équation de la chaleur, linéaire. Le cas $0 < m < 1$ est appelé équation de diffusion rapide. Le cas $m > 1$ est appelé équation des milieux poreux. Supposons que

$$m > \max\left(0, 1 - \frac{2}{n}\right) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2 + n(m-1)} > 0,$$

ce qui va garantir que des profils Barenblatt, de masse finie, sont solutions.

Recherchons des solutions autosimilaires conservant la masse, sous la forme

$$u(t, x) = t^{-n\beta} B(x t^{-\beta})$$

où B est un profil à préciser. Les puissances entraînent la condition $1 = 2\beta + n\beta(m-1)$, tandis que pour le profil,

$$\Delta B^m + \beta \operatorname{div}(xB) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \operatorname{div}(\nabla B^m + \beta x B) = 0.$$

En recherchant B radial avec un flux radial nul, cela donne $\nabla B^m = -\beta x B$. Pour $m \neq 1$, sur $\{B > 0\}$, cela donne

$$\nabla B^{m-1} = -\frac{\beta(m-1)}{m} x.$$

Par intégration, on obtient deux profils, avec une constante $c > 0$ choisie pour que $\int_{\mathbb{R}^n} B(x) dx = 1$:

$$B(x) = \begin{cases} \left(c + \frac{\beta(1-m)}{2m} |x|^2 \right)^{-1/(1-m)} & \text{si } 0 < m < 1 \\ \left(c - \frac{\beta(m-1)}{2m} |x|^2 \right)_+^{1/(m-1)} & \text{si } m > 1 \end{cases}.$$

Le profil pour l'équation de diffusion rapide (cas $m < 1$) a une queue lourde polynomiale, et la condition d'intégrabilité impose $2/(1-m) > n$, c'est-à-dire $m > 1 - 2/n$. Le profil pour l'équation des milieux poreux (cas $m > 1$) a un support compact, la boule centrée dont le rayon augmente au cours du temps (diffusion lente) :

$$R(t) = \sqrt{\frac{2mc}{\beta(m-1)}} t^\beta.$$

Pour $m = 1$, la solution autosimilaire centrée de masse unité est le noyau (gaussien) de la chaleur

$$u(t, x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-|x|^2/(4t)).$$

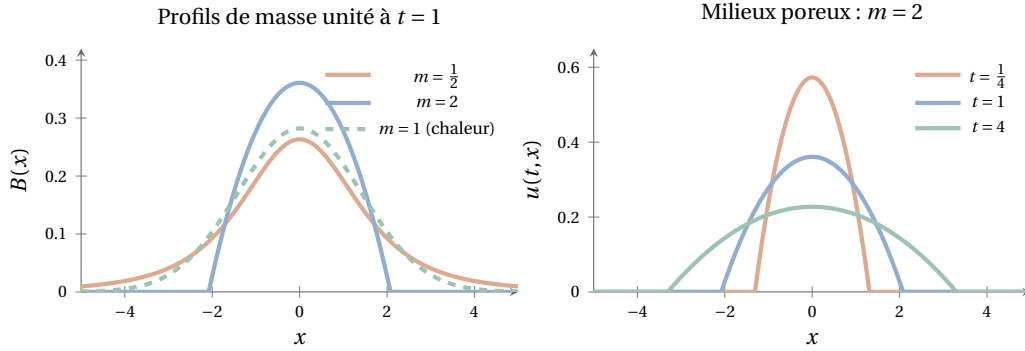


FIGURE 2. Solutions exactes de masse unité en dimension un.

Si $m > 1$, alors le prolongement par zéro satisfait l'équation au sens faible, y compris au bord du support. Dans les trois cas, les mesures $u(t, x) dx$ convergent faiblement vers la masse de Dirac δ_0 quand $t \searrow 0$.

Le profil Barenblatt B interpole entre la loi de Student multivariée (quand $\max(0, 1 - 2/n) < m < 1$) et la loi bêta multivariée (quand $m > 1$), en passant par la gaussienne pour $m = 1$. Le nombre de degrés de liberté dans le cas Student est $r = 2/(1 - m) - n > 0$. Avec la normalisation de masse unité, les profils convergent vers $(4\pi)^{-n/2} \exp(-|x|^2/4)$, le profil gaussien standard, lorsque $m \rightarrow 1$, de part et d'autre.

Cette partie est inspirée par [LPMO2]. Pour une étude approfondie des profils et de leur rôle dans la diffusion non linéaire, voir [V]. Pour l'autosimilarité et les asymptotiques intermédiaires, voir [B].



Grigory Isaakovich Barenblatt (1927 – 2018)

3. LOI DE SATO–TATE EN THÉORIE DES NOMBRES VIA $\mathbb{S}^3$ ET $SU(2)$

Le groupe $SU(2)$ et la sphère $\mathbb{S}^3$. Les éléments de $SU(2)$ sont paramétrés de manière unique par

$$U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

En écrivant $a = x_1 + ix_2$ et $b = x_3 + ix_4$, le groupe $SU(2)$ est identifié avec la sphère $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, qui est aussi la sphère unité des quaternions. Les multiplications à gauche et à droite du groupe agissent orthogonalement sur ces quatre coordonnées, de sorte que la mesure de Haar sur $SU(2)$ correspond à la loi uniforme sur $\mathbb{S}^3$.

Archimède donne la loi de la trace. Si $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ suit la loi uniforme sur $\mathbb{S}^3$, alors sa projection (X_1, X_2) sur $\mathbb{R}^2$ est uniforme sur le disque unité, d’après le théorème 1.1 d’Archimède. Il en découle immédiatement que sa projection X_1 sur la droite suit la loi du demi-cercle portée par $[-1, 1]$ et de densité

$$\frac{2\sqrt{(1-s^2)_+}}{\pi}.$$

Par conséquent, si U suit la mesure de Haar (loi uniforme) sur $\mathrm{SU}(2)$, alors

$$\mathrm{Tr}(U) = a + \bar{a} \stackrel{d}{=} 2X_1$$

suit la loi du demi-cercle portée par $[-2, 2]$ et de densité

$$\frac{\sqrt{(4-s^2)_+}}{2\pi}.$$

Elle est de moyenne nulle et de variance unité. Les valeurs propres de U sont $e^{\pm i\theta}$, avec $\theta \in [0, \pi]$, et $\mathrm{Tr}(U) = 2\cos(\theta)$. Un changement de variable conduit à la loi angulaire de Sato–Tate, de densité

$$\theta \in [0, \pi] \mapsto \frac{2}{\pi} \sin^2(\theta).$$

Le théorème arithmétique. Soit $E/\mathbb{Q}$ une courbe elliptique sans multiplication complexe. Pour tout nombre premier p de bonne réduction, en comptant tous les points, point à l’infini compris, définissons

$$a_p = p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p), \quad \text{et} \quad s_p = \frac{a_p}{\sqrt{p}} = 2\cos\theta_p \in [-2, 2], \quad \theta_p \in [0, \pi].$$

La borne $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$ est le théorème de Hasse. Le théorème d’équidistribution de Sato–Tate, anciennement conjecture, affirme que les angles θ_p sont équi-distribués selon la mesure d’angle précédente. De manière équivalente, si $\mathcal{P}(x)$ est l’ensemble des bons nombres premiers plus petits ou égaux à x , alors pour toute fonction réelle continue h sur $[-2, 2]$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{P}(x)|} \sum_{p \in \mathcal{P}(x)} h(s_p) = \int_{-2}^2 h(s) \frac{\sqrt{4-s^2}}{2\pi} ds.$$

Les valeurs propres de Frobenius ont module $\sqrt{p}$ et produit p . La normalisation donne une classe de conjugaison dans $\mathrm{SU}(2)$ de trace s_p . Le théorème d’Archimède identifie la loi de la trace sous la mesure de Haar, l’équidistribution des classes de Frobenius est le contenu arithmétique profond du théorème de Sato–Tate.

Cette section est inspirée de [LPMO3]. Une présentation des distributions de Sato–Tate et de leur lien avec les groupes compacts se trouve dans [S19]. Une présentation des premières étapes de la preuve du théorème de Sato–Tate, pour les courbes ayant une réduction potentiellement multiplicative en au moins un nombre premier, se trouve dans [C]. Elle est reliée au grand théorème de Fermat et à la conjecture de Taniyama–Shimura–Weil!

RÉFÉRENCES

- [B] G. I. Barenblatt, *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*, CUP, 1996
- [B+] F. Barthe, O. Guédon, S. Mendelson et A. Naor, *A probabilistic approach to the geometry of the ℓ_p^n -ball*, Annals of Probab. **33** (2005)
- [C] H. Carayol, *La conjecture de Sato–Tate [d’après Clozel, Harris, Shepherd-Barron, Taylor]*, Séminaire Bourbaki, Astérisque **317** (2008)
- [CK] Y. Chen et B. Klartag, *Digesting the proof of the sharp thin-shell inequality*, arXiv:2607.23307
- [IMU] Union mathématique internationale, <https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal> (description de la médaille)
- [K] B. Klartag, *A central limit theorem for convex sets*, Inventiones Mathematicae **168** (2007)
- [KL] B. Klartag et J. Lehec, *Thin-shell bounds via parallel coupling*, arXiv:2507.15495
- [LPMO1] <https://djalil.chafai.net/blog/2024/03/18/archimedes-theorem-sphere-cylinder/>
- [LPMO2] <https://djalil.chafai.net/blog/2024/10/20/back-to-basics-student-and-barenblatt/>
- [LPMO3] <https://djalil.chafai.net/blog/2025/04/18/s3-archimedes-su2-and-the-semicircle/>
- [L3GD] <https://djalil.chafai.net/docs/L3/cours-gd.pdf> (cours de L3 maths/phys. sur phénomènes de grande dimension)
- [S19] A. V. Sutherland, *Sato–Tate distributions*, dans *Analytic Methods in Arithmetic Geometry*, Contemporary Mathematics **740** (2019)
- [Vi] Ministère de l’Éducation nationale, Odysseum, *Archimède. Sources iconographiques*, illustration n° 48.
- [V] J. L. Vázquez, *Smoothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations: Equations of Porous Medium Type*, OUP, 2006



FIGURE 3. Il se trouve que la médaille Fields porte explicitement le théorème 1.1 d'Archimède dans sa version antique. À gauche, le portrait d'Archimède sur l'avvers de la médaille Fields, son nom en grec, une date, et une citation latine du poète Marcus Manilius : « *Transire suum pectus mundoque potiri* (s'élever au-dessus de soi-même et conquérir le monde) ». À droite, au revers de la médaille, une phrase en latin : « *Congregati ex toto orbe mathematici ob scripta insignia tribuere* (les mathématiciens rassemblés du monde entier ont récompensé pour des contributions exceptionnelles) » et à l'arrière-plan, une sphère inscrite dans un cylindre, disposée derrière un rameau et rappelant le motif de la tombe d'Archimède et son théorème « De la sphère et du cylindre », ce qui correspond au cas $n = 3$ du théorème 1.1. La tranche de la médaille, non reproduite ici, porte le nom du lauréat. Voir la description de la médaille par l'Union mathématique internationale [IMU].



FIGURE 4. La mort d'Archimède, illustration d'après un tableau d'Édouard Vimont, reproduite dans les *Beacon Lights of History* de John Lord, évoquant le meurtre d'Archimède de Syracuse durant le siège de cette ville grecque de Sicile par les soldats romains en -212. La mort d'Archimède est un thème classique de la peinture. Cette illustration a le mérite de figurer très explicitement la sphère et le cylindre, sur le mur derrière le siège du savant [Vi].