

Probabilités, analyse, physique statistique

<https://djalil.chafai.net/>

Djalil CHAFAÏ

Bureau C04 (ou F005) Espace Cartan

Journée de rentrée du DMA

Mercredi 6 octobre 2021

Plan

Matrices aléatoires

Processus stochastiques

Théorie du potentiel

Loi du cercle

- Matrice aléatoire de Ginibre ou Girko dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{n1} \\ & \vdots & \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} M_{ij} \text{ indépendantes et même loi} \\ \mathbb{E}[M_{ij}] = 0 \\ \mathbb{E}[|M_{ij}|^2] = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Loi du cercle

- Matrice aléatoire de Ginibre ou Girko dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{n1} \\ & \ddots & \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} M_{ij} \text{ indépendantes et même loi} \\ \mathbb{E}[M_{ij}] = 0 \\ \mathbb{E}[|M_{ij}|^2] = \frac{1}{n} \end{cases}$$

- Spectre et rayon spectral

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(M - \lambda) = 0\} \quad \text{et} \quad \rho(M) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda\}$$

Loi du cercle

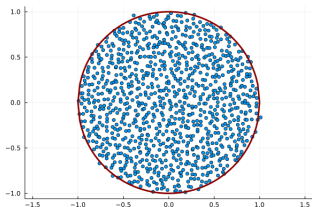
- Matrice aléatoire de Ginibre ou Girko dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{n1} \\ & \ddots & \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} M_{ij} \text{ indépendantes et même loi} \\ \mathbb{E}[M_{ij}] = 0 \\ \mathbb{E}[|M_{ij}|^2] = \frac{1}{n} \end{cases}$$

- Spectre et rayon spectral

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(M - \lambda) = 0\} \quad \text{et} \quad \rho(M) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda\}$$

- Universalité en grande dimension : loi du cercle (Tao-Vu 2010)



$$\frac{1}{n} \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_{\lambda} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{C}_b} \frac{1_{|z| \leq 1}}{\pi} dz$$

Avec Ch. Bordenave (CNRS AMU) et D. García-Zelada (SU)

- **Théorème** : convergence du support dans la loi du cercle

$$\rho(M) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Avec Ch. Bordenave (CNRS AMU) et D. García-Zelada (SU)

- **Théorème** : convergence du support dans la loi du cercle

$$\rho(M) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

- **Preuve** :

Avec Ch. Bordenave (CNRS AMU) et D. García-Zelada (SU)

- **Théorème** : convergence du support dans la loi du cercle

$$\rho(M) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

- **Preuve** :

- ▶ Fonction analytique aléatoire sur disque unité

$$\det(1 - zM) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \sqrt{1 - cz^2} \exp(F(z))$$

Avec Ch. Bordenave (CNRS AMU) et D. García-Zelada (SU)

- **Théorème** : convergence du support dans la loi du cercle

$$\rho(M) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

- **Preuve** :

- ▶ Fonction analytique aléatoire sur disque unité

$$\det(1 - zM) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \sqrt{1 - cz^2} \exp(F(z))$$

- ▶ Combinatoire des moments et **théorème limite central**

$$\det(1 - zM) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \text{Trace}(M^k) \frac{z^k}{k}\right).$$

Polynôme caractéristique réciproque : portrait de phase



julia

Plan

Matrices aléatoires

Processus stochastiques

Théorie du potentiel

Mouvement brownien de Dyson

- Système de n particules $X_{t,1}, \dots, X_{t,n}$ sur \mathbb{R} en interaction

$$dX_t^n = \sqrt{\frac{2}{n}} dB_t - \frac{1}{n} \nabla H(X_t^n) dt$$

Mouvement brownien de Dyson

- Système de n particules $X_{t,1}, \dots, X_{t,n}$ sur \mathbb{R} en interaction

$$dX_t^n = \sqrt{\frac{2}{n}} dB_t - \frac{1}{n} \nabla H(X_t^n) dt$$

- Énergie avec répulsion coulombienne (singulière)

$$H(x) = n \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\sigma^2} + \beta \sum_{j<i} \log \frac{1}{x_i - x_j}$$

Mouvement brownien de Dyson

- Système de n particules $X_{t,1}, \dots, X_{t,n}$ sur \mathbb{R} en interaction

$$dX_t^n = \sqrt{\frac{2}{n}} dB_t - \frac{1}{n} \nabla H(X_t^n) dt$$

- Énergie avec répulsion coulombienne (singulière)

$$H(x) = n \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\sigma^2} + \beta \sum_{j<i} \log \frac{1}{x_i - x_j}$$

- Convergence à l'équilibre $X_t^n \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{loi}} P_n \propto e^{-H(x)} dx$

$$e^{-H(x)} = e^{-n \frac{|x|^2}{2\sigma^2}} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^\beta.$$

Avec J. Boursier (Dauphine CFM) et C. Labbé (U. Paris)

- **Théorème** : si $\frac{1}{n}|X_0^n|^2$ d'ordre 1 (champ moyen) alors convergence **abrupte** vers l'équilibre :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\text{Loi}(X_{t_n}^n), P_n) = \begin{cases} \max & \text{si } t_n = (1 - \varepsilon)c_n \\ 0 & \text{si } t_n = (1 + \varepsilon)c_n \end{cases}$$

Avec J. Boursier (Dauphine CFM) et C. Labbé (U. Paris)

- **Théorème** : si $\frac{1}{n}|X_0^n|^2$ d'ordre 1 (champ moyen) alors convergence **abrupte** vers l'équilibre :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\text{Loi}(X_{t_n}^n), P_n) = \begin{cases} \max & \text{si } t_n = (1 - \varepsilon)c_n \\ 0 & \text{si } t_n = (1 + \varepsilon)c_n \end{cases}$$

- Temps critique universel (ne dépend pas de β)

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \log(n) & \text{si dist = Wasserstein} \\ \log(n) & \text{si dist} \in \{L^2, \text{VT}, \text{Hellinger}, \text{Entropie}\} \\ \frac{3}{2} \log(n) & \text{si dist = Fisher} \end{cases}$$

Avec J. Boursier (Dauphine CFM) et C. Labbé (U. Paris)

- **Théorème** : si $\frac{1}{n}|X_0^n|^2$ d'ordre 1 (champ moyen) alors convergence **abrupte** vers l'équilibre :

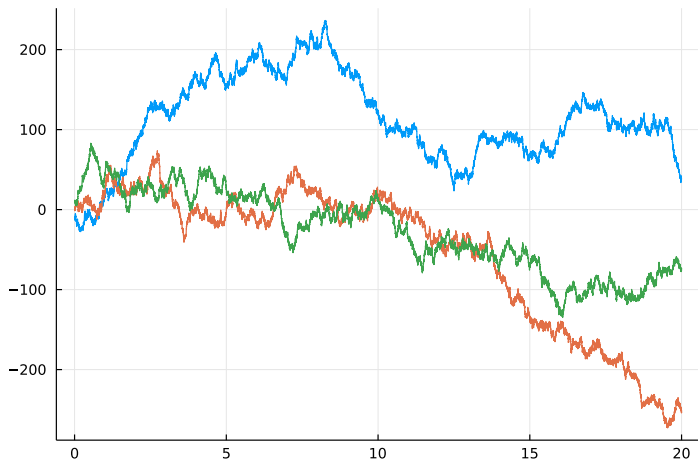
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\text{Loi}(X_{t_n}^n), P_n) = \begin{cases} \max & \text{si } t_n = (1 - \varepsilon)c_n \\ 0 & \text{si } t_n = (1 + \varepsilon)c_n \end{cases}$$

- Temps critique universel (ne dépend pas de β)

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \log(n) & \text{si dist = Wasserstein} \\ \log(n) & \text{si dist} \in \{L^2, \text{VT}, \text{Hellinger}, \text{Entropie}\} \\ \frac{3}{2} \log(n) & \text{si dist = Fisher} \end{cases}$$

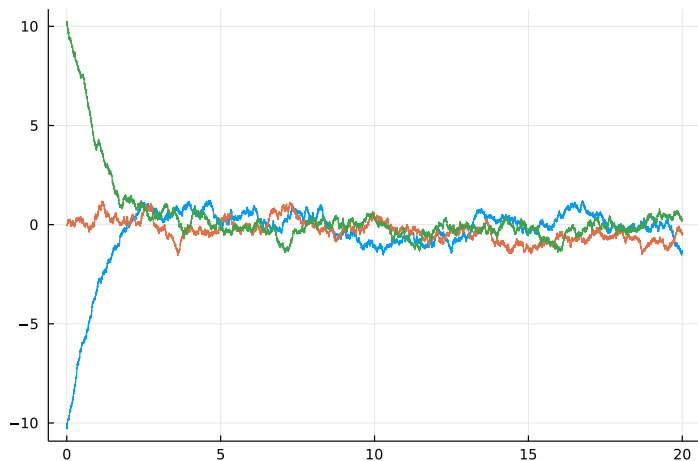
- **Preuve** : inégalités fonctionnelles (log-Sobolev), calcul stochastique, couplage, analyse gaussienne, analyse spectrale

Brownien de Dyson à trois particules



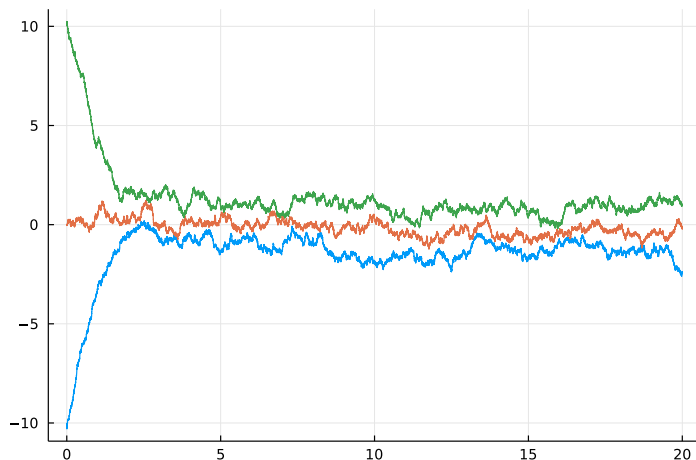
$n = 3, \sigma = \infty, \beta = 0$: browniens indépendants

Brownien de Dyson à trois particules



$n = 3, \sigma = 1, \beta = 0$: confinement

Brownien de Dyson à trois particules



$n = 3, \sigma = 1, \beta = 2$: confinement et répulsion

Plan

Matrices aléatoires

Processus stochastiques

Théorie du potentiel

Avec E. Saff (Nashville USA) et R. Womersley (Sydney AU)

- Noyau de M. Riesz dans \mathbb{R}^d paramètre $s > -2$

$$x \mapsto K_s(x) = \begin{cases} -\log|x| & \text{si } s = 0 \\ \frac{1}{s|x|^s} & \text{si } s \neq 0 \end{cases}$$

Avec E. Saff (Nashville USA) et R. Womersley (Sydney AU)

- Noyau de M. Riesz dans \mathbb{R}^d paramètre $s > -2$

$$x \mapsto K_s(x) = \begin{cases} -\log|x| & \text{si } s = 0 \\ \frac{1}{s|x|^s} & \text{si } s \neq 0 \end{cases}$$

- Coulomb ou Newton : $s = d - 2$

Avec E. Saff (Nashville USA) et R. Womersley (Sydney AU)

- Noyau de M. Riesz dans \mathbb{R}^d paramètre $s > -2$

$$x \mapsto K_s(x) = \begin{cases} -\log|x| & \text{si } s = 0 \\ \frac{1}{s|x|^s} & \text{si } s \neq 0 \end{cases}$$

- Coulomb ou Newton : $s = d - 2$
- Énergie d'une mesure de probabilité μ

$$\mathcal{E}(\mu) = \int V(x)\mu(dx) + \frac{1}{2} \iint K_s(x-y)\mu(dx)\mu(dy).$$

Avec E. Saff (Nashville USA) et R. Womersley (Sydney AU)

- Noyau de M. Riesz dans \mathbb{R}^d paramètre $s > -2$

$$x \mapsto K_s(x) = \begin{cases} -\log|x| & \text{si } s = 0 \\ \frac{1}{s|x|^s} & \text{si } s \neq 0 \end{cases}$$

- Coulomb ou Newton : $s = d - 2$
- Énergie d'une mesure de probabilité μ

$$\mathcal{E}(\mu) = \int V(x)\mu(dx) + \frac{1}{2} \iint K_s(x-y)\mu(dx)\mu(dy).$$

- Mesure d'équilibre : $\mu_{\text{eq}} = \arg \inf \mathcal{E}$

Avec E. Saff (Nashville USA) et R. Womersley (Sydney AU)

- Noyau de M. Riesz dans \mathbb{R}^d paramètre $s > -2$

$$x \mapsto K_s(x) = \begin{cases} -\log|x| & \text{si } s = 0 \\ \frac{1}{s|x|^s} & \text{si } s \neq 0 \end{cases}$$

- Coulomb ou Newton : $s = d - 2$
- Énergie d'une mesure de probabilité μ

$$\mathcal{E}(\mu) = \int V(x)\mu(dx) + \frac{1}{2} \iint K_s(x-y)\mu(dx)\mu(dy).$$

- Mesure d'équilibre : $\mu_{\text{eq}} = \arg \inf \mathcal{E}$
- **Théorème** : si $(d, s, V) = (3, 0, |\cdot|^2)$ alors $\mu_{\text{eq}} = \text{arcsinus radial}$

Avec E. Saff (Nashville USA) et R. Womersley (Sydney AU)

- Noyau de M. Riesz dans \mathbb{R}^d paramètre $s > -2$

$$x \mapsto K_s(x) = \begin{cases} -\log|x| & \text{si } s = 0 \\ \frac{1}{s|x|^s} & \text{si } s \neq 0 \end{cases}$$

- Coulomb ou Newton : $s = d - 2$
- Énergie d'une mesure de probabilité μ

$$\mathcal{E}(\mu) = \int V(x)\mu(dx) + \frac{1}{2} \iint K_s(x-y)\mu(dx)\mu(dy).$$

- Mesure d'équilibre : $\mu_{\text{eq}} = \arg \inf \mathcal{E}$
- **Théorème** : si $(d, s, V) = (3, 0, |\cdot|^2)$ alors $\mu_{\text{eq}} = \text{arcsinus radial}$
- **Preuve** : Euler–Lagrange, Funk–Hecke, fonctions spéciales (intégrales elliptiques, fonctions hypergéométriques), ...

Mesure d'équilibre pour potentiel $V = |\cdot|_4^4$ en dimension $d = 4$ 