

ARCHIMÈDE, BARENBLATT, ET SATO-TATE

PROJECTIONS SPHÉRIQUES ET LOIS DE PROBABILITÉS CLASSIQUES ASSOCIÉES

DJALIL CHAFAÏ

RÉSUMÉ. Ces notes proposent un voyage à travers l'histoire et l'actualité des mathématiques, à partir d'un résultat de l'antiquité grecque, avec des éléments de géométrie, de probabilités, d'analyse, d'algèbre, et de théorie des nombres. Le point de départ est une formulation moderne du théorème d'Archimède sur la sphère et le cylindre. Elle fait émerger naturellement par projection des lois de probabilité classiques comme les lois bêta, de Student, et de Gauss. Ces lois sont ensuite reliées au profil Barenblatt en analyse des équations aux dérivées partielles non-linéaires. Enfin, la loi du demi-cercle apparaît comme un cas spécial connecté aux trois noms du titre, en particulier à un théorème de Sato et Tate d'équirépartition pour les courbes elliptiques en théorie des nombres.

Ces notes proposent un voyage à travers l'histoire, avec des éléments de géométrie, de probabilités, d'analyse, d'algèbre, et de théorie des nombres. La première partie est consacrée à une exploration des lois de probabilités issues des projections des sphères, notamment les lois bêta, de Student, et de Gauss, et leurs liens avec l'actualité de l'analyse des corps convexes en grande dimension. La seconde partie connecte ces lois aux profils de Barenblatt qui interviennent dans la solution fondamentale d'une équation aux dérivées partielles de diffusion non-linéaire. La troisième partie présente un lien avec un théorème de Sato-Tate d'équirépartition sur les courbes elliptiques en théorie des nombres. En particulier, la fameuse loi du demi-cercle $(2\pi)^{-1} \sqrt{(4-x^2)_+} dx$, qui est à la fois une loi bêta symétrique et un profil de Barenblatt, est connectée aux trois noms du titre :

- (1) **Archimède** : loi marginale de la loi uniforme sur la sphère $\mathbb{S}^3$.
- (2) **Barenblatt** : profil de la solution fondamentale de l'équation des milieux poreux $1D \partial_t u = \partial_{xx}(u^3)$.
- (3) **Sato-Tate** : loi limite de la trace normalisée de Frobenius via la mesure de Haar de $SU(2)$.

Il s'agit de notes d'exposition synthétiques et éclectiques qui ont pour but de susciter la curiosité. Elles s'inscrivent dans la continuité et l'enrichissement actualisé de [R], [PR], [L], [Ch], entre autres références possibles.

1. THÉORÈME D'ARCHIMÈDE SUR LA SPHÈRE ET LE CYLINDRE

« Finally although in the year 1500 Europe knew less than Archimedes who died in the year 212 BC, yet in the year 1700, Newton's Principia had been written and the world was well started on the modern epoch. » Alfred North Whitehead, in *Science and the Modern World* (1925), repris notamment par Arthur Koestler dans *Les Somnambules* (The Sleepwalkers) (1959).

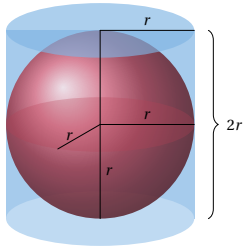


FIGURE 1. Une sphère et son cylindre circonscrit, c'est-à-dire le plus petit possible la contenant.

Pour $n = 3$ et $k = 1$, le théorème 1.1 affirme que la loi uniforme sur la sphère, projetée sur son diamètre vertical, donne la loi uniforme sur ce diamètre. Ceci coïncide avec la découverte d'Archimède de Syracuse (-287 – -212) : en considérant la section par deux plans parallèles perpendiculaires à l'axe du cylindre, la surface de la portion de sphère entre les deux plans est égale à la surface de la portion de cylindre entre les deux plans. En particulier, la sphère et la surface latérale du cylindre ont même aire, ce qui revient à dire que l'aire de la sphère de rayon r est $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$. Archimède a procédé en utilisant la méthode d'exhaustion, préfigurant, avec plus de 1800 ans d'avance, le calcul intégral. Le théorème 1.1 est la généralisation à toutes dimensions, exprimée dans le vocabulaire contemporain de la théorie des probabilités. La légende affirme qu'Archimède considérait qu'il s'agissait de son meilleur résultat, et demanda à ce

que soit gravé sur sa pierre tombale le dessin d'une sphère et de son cylindre circonscrit. Cicéron (-106 – -43) raconte dans les *Tusculanes* (V, 64–66) avoir retrouvé cette tombe à Syracuse en -75, grâce à ce motif, soit 137 ans après la mort d'Archimède, tué par un soldat romain lors du siège de la ville.

Date: 19 octobre 2026.

Ces notes ont été peaufinées à l'aide d'intelligence artificielle.

Théorème 1.1: De la sphère et du cylindre (Archimède)

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ de loi uniforme sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $n \geq 2$. Alors pour tout $1 \leq k < n$, le vecteur $Y = \text{proj}_{\mathbb{R}^k}(X) = (X_1, \dots, X_k)$, à valeurs dans la boule $\mathbb{B}^k = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| \leq 1\}$, a pour densité

$$y \mapsto c(1 - |y|^2)^{\frac{n-k-2}{2}} \quad \text{où} \quad c = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{k/2}\Gamma((n-k)/2)}.$$

En particulier, si $n \geq 3$, alors $\text{proj}_{\mathbb{R}^{n-2}}(X) = (X_1, \dots, X_{n-2})$ suit la loi uniforme sur la boule $\mathbb{B}^{n-2}$.

La propriété de projection uniforme sur $\mathbb{B}^{n-2}$ est la généralisation présentée dans [R]. Voir aussi [L]. Le résultat historique est reproduit dans [W]. Des prolongements modernes des idées d'Archimède sont présentés dans [Be], tandis que des liens avec les lois gaussiennes et la méthode de Stein sont développés dans [PR].

Dans les densités, on convient que t_+^a vaut t^a si $t > 0$ et 0 si $t \leq 0$, y compris pour $a \leq 0$.

Le cas $k = 1$ donne la formule d'intégration zonale, cas particulier de la formule de Funk–Hecke pour l'harmonique sphérique constante, de degré zéro. Les polynômes orthogonaux associés sont ceux de Gegenbauer de paramètre $(n-2)/2$ pour $n \geq 3$, et de Tchebychev de première espèce pour $n = 2$ (cas limite du paramètre).

La loi de Y est une *loi bêta symétrique multivariée* sur $\mathbb{B}^k$, uniforme si $k = n-2$. Si $k < n-2$, son exposant est strictement positif et elle a, à dilatation près, un *profil de Barenblatt à support compact*, cf. section 2. Le cas $k = n-1$ a un exposant $-1/2$ et une densité non bornée au bord, une sorte d'arcsinus radial.

Les lois uniformes sur les boules et les sphères et leurs projections constituent des mesures d'équilibre naturelles en théorie du potentiel, cf. par exemple [CSW] pour un résultat récent lié au cas $k = n-1$.

En particulier, pour tout $n \geq 2$, avec $k = 1$, il vient, par l'invariance par rotation de la loi de X , que pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\langle X, \theta \rangle \stackrel{d}{=} X_1 \sim \text{Beta}_{[-1,1]}(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2})$, de densité proportionnelle à $x \mapsto (1-x)_+^p(1+x)_+^p = (1-x^2)_+^p$ où $p = (n-3)/2$. Il s'agit de la loi uniforme si $n = 3$, du *demi-cercle* si $n = 4$, et de l'*arcsinus* si $n = 2$.

Démonstration. L'invariance orthogonale de la loi de X assure celle de la loi de Y . Il suffit donc de déterminer la loi de $|Y|^2$. Or X a la même loi que $Z/|Z|$ où $Z = (Z_1, \dots, Z_n) \sim \mathcal{N}(0, I_n)$. Donc Y a même loi que $(Z_1, \dots, Z_k)/|Z|$, de sorte que $|Y|^2$ a même loi que $A/(A+B)$ avec $A \sim \chi^2(k)$ et $B \sim \chi^2(n-k)$ indépendantes. Il vient donc que $|Y|^2 \sim \text{Beta}_{[0,1]}(k/2, (n-k)/2)$. Donc $|Y|$ a pour densité $r \mapsto c'r_+^{k-1}(1-r^2)_+^{(n-k-2)/2}$ où $c' = 2/\text{beta}(k/2, (n-k)/2)$. En coordonnées polaires $y = r\theta$, l'élément de volume est $dy = r^{k-1}drd\sigma(\theta)$, où σ est la mesure de surface sur $\mathbb{S}^{k-1}$ (avec $|\mathbb{S}^0| = 2$). Par invariance orthogonale, la densité de Y vaut donc $c(1 - |y|^2)_+^{(n-k-2)/2}$, avec

$$c = \frac{c'}{|\mathbb{S}^{k-1}|} = \frac{2}{|\mathbb{S}^{k-1}|\text{beta}(k/2, (n-k)/2)} = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{k/2}\Gamma((n-k)/2)}.$$

□

Corollaire 1.2: Représentation de la loi uniforme sur la boule ou théorème d'Archimède renversé

Pour tout $n \geq 1$, si $Z_1, \dots, Z_n$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et E est exponentielle de moyenne 1, indépendante de $Z_1, \dots, Z_n$, alors le vecteur aléatoire $(Z_1, \dots, Z_n)/\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_n^2 + 2E}$ suit la loi uniforme sur $\mathbb{B}^n$.

Démonstration. Si $Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}$ sont i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $(Z_1, \dots, Z_n)/\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_n^2 + Z_{n+1}^2 + Z_{n+2}^2}$ suit la loi uniforme sur $\mathbb{B}^n$ d'après le théorème 1.1. D'autre part, $Z_{n+1}^2 + Z_{n+2}^2 \sim \chi^2(2) = \text{Gamma}(2/2, 1/2) = \text{Exp}(1/2) \stackrel{d}{=} 2E$. □

Ce théorème de représentation de la loi uniforme se généralise aux boules ℓ^p , voir [B+].

Théorème 1.3: Projection stéréographique de la loi uniforme sur la sphère

Soit X un vecteur aléatoire de loi uniforme sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $n \geq 2$. Soit $Y = (Y_1, \dots, Y_{n-1}) = S(X)$ son image par la projection stéréographique S de pôle nord e_n . Alors pour tout $1 \leq k \leq n-1$, le vecteur aléatoire $\text{proj}_{\mathbb{R}^k}(Y) = (Y_1, \dots, Y_k)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, a pour densité

$$y \mapsto c(1 + |y|^2)^{-\frac{n+k-1}{2}} \quad \text{où} \quad c = \frac{\Gamma(\frac{n+k-1}{2})}{\pi^{k/2}\Gamma(\frac{n-1}{2})}.$$

Cette loi a, pour $n \geq 3$ et à dilatation près, un *profil de Barenblatt à support plein*. Le cas $n = 2$ correspondrait à $m = 0$, exclu du cadre $m > 0$ de la section 2. Le vecteur complet Y suit une *loi de Student multivariée* de

1. La loi $\text{Beta}_{[0,1]}(a, b)$, $a, b > 0$, a pour densité $u \mapsto \text{beta}(a, b)^{-1}u^{a-1}(1-u)^{b-1}$ où $\text{beta}(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$.

dimension $d = n - 1$, de position $\mu = 0$, de matrice d'échelle $\Sigma = d^{-1}I_d$, avec $r = n - 1$ degrés de liberté². Ses marginales de dimension k sont des lois de Student de dimension $d = k$, avec $r = n - 1$ degrés de liberté et $\Sigma = (n - 1)^{-1}I_k$. Une telle loi de Student est celle de $\mu + A/\sqrt{B/r}$ où $A \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ et $B \sim \chi^2(r)$ sont indépendantes. Pour $n = 2$, le vecteur complet Y suit la *loi de Cauchy* sur $\mathbb{R}$, loi du rapport de deux v.a. gaussiennes réelles standard indépendantes. Pour $n = 3$, il s'agit de la *loi de Cauchy* sur $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, loi du rapport de deux v.a. gaussiennes complexes standard indépendantes.

Démonstration. La projection stéréographique $S : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ est définie par

$$S(x) = \frac{(x_1, \dots, x_{n-1})}{1 - x_n} \quad \text{si } x = (x_1, \dots, x_n) \neq e_n \quad \text{et} \quad S(e_n) = \infty.$$

Elle est associée au pôle nord e_n de $\mathbb{S}^{n-1}$, et laisse invariante la sphère unité horizontale $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1, x_n = 0\}$.

L'invariance par rotation de la loi de X entraîne celle de la loi de $(Y_1, \dots, Y_k)$. Ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^k$, $\langle \theta, (Y_1, \dots, Y_k) \rangle \stackrel{d}{=} |\theta| Y_1$. Or comme $Y_1 = X_1 / (1 - X_n)$, il vient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Y_1 \leq t) = \mathbb{P}(X_1 + tX_n \leq t) = \mathbb{P}\left(X_1 \leq \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

où la seconde égalité provient de l'invariance par rotation de la loi de X . Comme $t \mapsto t/\sqrt{1+t^2}$ a pour inverse $u \mapsto u/\sqrt{1-u^2}$, il vient que $Y_1 \stackrel{d}{=} X_1 / \sqrt{1 - X_1^2}$. Comme $X \stackrel{d}{=} Z/|Z|$ où $Z = (Z_1, \dots, Z_n) \sim \mathcal{N}(0, I_n)$, nous obtenons

$$Y_1 \stackrel{d}{=} \frac{Z_1}{\sqrt{Z_2^2 + \dots + Z_n^2}} = \frac{A}{\sqrt{B}}$$

où $A \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $B \sim \chi^2(n-1)$ sont indépendantes. Donc $\sqrt{n-1}Y_1$ suit la loi de Student $t(n-1)$. Si $G \sim \mathcal{N}(0, I_k)$ est indépendant de B , alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}^k$, $\langle \theta, G/\sqrt{B} \rangle \stackrel{d}{=} |\theta|A/\sqrt{B} \stackrel{d}{=} \langle \theta, (Y_1, \dots, Y_k) \rangle$. Ainsi $(Y_1, \dots, Y_k) \stackrel{d}{=} G/\sqrt{B}$ par les fonctions caractéristiques (théorème de Cramér-Wold). D'où le résultat annoncé.

Après cette preuve géométrico-probabiliste, donnons une preuve purement analytique en utilisant la formule du changement de variable. Le pôle nord e_n est de mesure de surface nulle, donc $S(X)$ est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-1}$. L'inverse de S sur $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{e_n\}$ est $F(y) = (2y/(1+|y|^2), (|y|^2-1)/(1+|y|^2))$. Posons $q = 1+|y|^2$. Pour $1 \leq i \leq n-1$, $\partial_i F(y) = (2e_i/q - 4y_i y/q^2, 4y_i/q^2)$ et $\langle \partial_i F(y), \partial_j F(y) \rangle = (4/q^2)\delta_{ij}$. Le jacobien vaut donc

$$J_F(y) = \sqrt{\det((DF(y))^T DF(y))} = \left(\frac{2}{1+|y|^2}\right)^{n-1}.$$

Si $|\mathbb{S}^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ désigne la mesure de surface de $\mathbb{S}^{n-1}$, la formule du changement de variables donne

$$\mathbb{E}[h(S(X))] = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(y) J_F(y) dy$$

pour toute fonction borélienne bornée $h : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$. □

Remarque 1.4: Phénomène limite central par projection en grande dimension

La loi gaussienne standard apparaît par projection en grande dimension.

- Pour tout $k \geq 1$ fixé, si X suit la loi uniforme sur $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{n})$, $n > k$, alors $\text{proj}_{\mathbb{R}^k}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I_k)$ quand $n \rightarrow \infty$. En effet, $X \stackrel{d}{=} \sqrt{n}Z/|Z|$ où $Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)$, et $\sqrt{n}/|Z| = 1 + o_n(1)$ par la loi des grands nombres. Les lois gaussiennes standards peuvent donc être conçues comme des lois uniformes sur des sphères de grande dimension et de grand rayon. Ce phénomène, dont la découverte est souvent attribuée à Émile Borel ou à Henri Poincaré, figure antérieurement dans l'œuvre de Ferdinand Gustav Mehler [M]. Cela se vérifie aussi directement sur la formule du théorème 1.1 :

$$\left(1 - \frac{|y|^2}{n}\right)_+^{\frac{n-k-2}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{|y|^2}{2}}, \quad y \in \mathbb{R}^k, \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma(n/2)}{n^{k/2} \pi^{k/2} \Gamma((n-k)/2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{k/2}}.$$

Dans le même esprit, et avec la projection stéréographique, le théorème 1.3 pour $k = 1$ indique que si X suit la loi uniforme sur $\mathbb{S}^{n-1}$ et $Y = S(X)$ alors $\sqrt{n}Y_1 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$ si $n \rightarrow \infty$, car

$$\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{n\pi} \Gamma((n-1)/2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

- Le corollaire 1.2, combiné à la loi des grands nombres pour le dénominateur, indique que si X suit la loi uniforme sur $\mathbb{B}^n(\sqrt{n})$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\langle X, \theta \rangle \stackrel{d}{=} X_1 \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$ quand $n \rightarrow \infty$. Il s'agit d'un cas particulier du phénomène limite central pour les corps convexes, démontré dans [K].

2. De densité $y \in \mathbb{R}^d \mapsto c(1+r^{-1}(y-\mu) \cdot \Sigma^{-1}(y-\mu))^{-(r+d)/2}$ où $c = \Gamma((r+d)/2)/(\Gamma(r/2)(r\pi)^{d/2}\sqrt{\det \Sigma})$.

D'autre part, le corollaire 1.2 indique également qu'en grande dimension $n \rightarrow \infty$, l'essentiel de la masse de $\mathbb{B}^n(\sqrt{n})$ se situe près de $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{n})$. Il s'agit d'un cas particulier du phénomène couche mince (thin shell) pour les corps convexes, démontré récemment avec une constante optimale dans [CK] : pour un vecteur log-concave isotrope W de $\mathbb{R}^n$, $\text{Var}(|W|^2) \leq 8n$.

Remarque 1.5: Sphères, projections, lois bêta et de Student, profils Barenblatt, et gaussiennes

Le théorème 1.1 indique que la projection de $\mathbb{S}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}^k$, linéaire, produit des profils $c(1 - |y|^2)_+^a$ avec $a = (n - k - 2)/2 \geq -1/2$, à support compact, tandis que le théorème 1.3 indique que la projection stéréographique de $\mathbb{S}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}^{n-1}$, non linéaire, produit un profil $c(1 + |y|^2)^{-b}$, avec $b > 0$, à queue lourde. Les paramètres a et b sont entiers ou demi-entiers, et cette quantification provient de la réalisation géométrique qui implique des dimensions, qui sont entières. Tout cela peut être vu également comme une mécanique des fonctions spéciales eulériennes Gamma et bêta multivariées. Il est possible de définir les lois bêta et de Student géométriquement comme des généralisations à paramètre continu des lois des projections sphériques. Comme expliqué plus loin, elles sont reliées par la famille des profils ou lois de Barenblatt dans les domaines de paramètres précisés ci-dessus. Cette famille contient également la loi gaussienne comme cas critique commun.

Remarque 1.6: Lois de Dirichlet

La preuve du théorème 1.1 fait poindre la mécanique des lois de Dirichlet. Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendantes avec $A_k \sim \text{Gamma}(a_k, \lambda)$, alors $(A_1, \dots, A_n)/(A_1 + \dots + A_n) \sim \text{Dirichlet}_n(a_1, \dots, a_n)$, qui ne dépend pas de λ . Il s'agit d'une loi sur le simplexe des lois de probabilité discrètes $\{(p_1, \dots, p_n) \in [0, 1]^n : p_1 + \dots + p_n = 1\}$. Si $(B_1, \dots, B_n) \sim \text{Dirichlet}_n(a_1, \dots, a_n)$, alors pour tous $I_1, \dots, I_r$ formant une partition de $\{1, \dots, n\}$ en $r \geq 2$ blocs non vides, $(\sum_{i \in I_1} B_i, \dots, \sum_{i \in I_r} B_i) \sim \text{Dirichlet}_r(\sum_{i \in I_1} a_i, \dots, \sum_{i \in I_r} a_i)$, et pour toute partie non vide et propre $I \subset \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i \in I} B_i \sim \text{Beta}_{[0,1]}(\sum_{i \in I} a_i, \sum_{i \notin I} a_i)$. Si $U_1, \dots, U_n$ sont i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$, et si $B_1, \dots, B_{n+1}$ sont les longueurs des blocs de la partition associée de $[0, 1]$, écarts successifs dans la statistique d'ordre, c'est-à-dire le réordonnement croissant, alors $(B_1, \dots, B_{n+1}) \sim \text{Dirichlet}_{n+1}(1, \dots, 1)$. Les lois de Dirichlet jouent un rôle fondamental en simulation, en statistique mathématique non paramétrique, et en théorie des probabilités. Les lois de Poisson-Dirichlet sont des lois sur des partitions aléatoires de masse en une infinité de composantes, liées aux lois de Dirichlet par des procédures de passage à la limite et de réordonnement.

a. La loi $\text{Gamma}(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$, a pour densité $u \mapsto \Gamma(a)^{-1} \lambda^a u^{a-1} e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{u \geq 0}$, où $\Gamma(a) = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du$.

2. PROFILS BARENBLATT : DIFFUSION RAPIDE ET MILIEUX POREUX

Considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante, pour une densité u sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$:

$$\partial_t u = \Delta(u^m) = \text{div}(m u^{m-1} \nabla u), \quad t > 0.$$

Le paramètre m est réel positif. Le cas $m = 1$ est l'équation de la chaleur, linéaire. Le cas $0 < m < 1$ est appelé équation de diffusion rapide. Le cas $m > 1$ est appelé équation des milieux poreux. Supposons que

$$m > \max\left(0, 1 - \frac{2}{n}\right) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2 + n(m-1)} > 0,$$

ce qui va garantir que des profils Barenblatt, de masse finie, sont solutions.

Recherchons des solutions autosimilaires conservant la masse, sous la forme

$$u(t, x) = t^{-n\beta} B(x t^{-\beta})$$

où B est un profil à préciser. Les puissances entraînent la condition $1 = 2\beta + n\beta(m-1)$, tandis que pour le profil,

$$\Delta B^m + \beta \text{div}(xB) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \text{div}(\nabla B^m + \beta x B) = 0.$$

En recherchant B radial avec un flux radial nul, cela donne $\nabla B^m = -\beta x B$. Pour $m \neq 1$, sur $\{B > 0\}$, cela donne

$$\nabla B^{m-1} = -\frac{\beta(m-1)}{m} x.$$



FIGURE 2. La médaille Fields, conçue vers 1933, évoque explicitement le théorème 1.1 d'Archimède dans sa version antique $n = 3$ et $k = 1$. Plus précisément, à gauche, le portrait d'Archimède sur l'avvers de la médaille Fields, son nom en grec, une date, et une citation latine du poète Marcus Manilius : « *Transire suum pectus mundoque potiri (s'élever au-dessus de soi-même et conquérir le monde)* ». À droite, au revers de la médaille, une phrase en latin : « *Congregati ex toto orbe mathematici ob scripta insignia tribuere (les mathématiciens rassemblés du monde entier ont récompensé pour des contributions exceptionnelles)* » et à l'arrière-plan, une sphère inscrite dans un cylindre, disposée derrière un rameau et rappelant le motif de la tombe d'Archimède et son théorème « De la sphère et du cylindre ». La tranche de la médaille, non reproduite ici, porte le nom du lauréat. La description de la médaille est tirée de [IMU].

Par intégration, on obtient deux profils, avec une constante $c > 0$ choisie pour que $\int_{\mathbb{R}^n} B(x) dx = 1$:

$$B(x) = \begin{cases} \left(c + \frac{\beta(1-m)}{2m} |x|^2 \right)^{-1/(1-m)} & \text{si } 0 < m < 1 \\ \left(c - \frac{\beta(m-1)}{2m} |x|^2 \right)_+^{1/(m-1)} & \text{si } m > 1 \end{cases}.$$

La solution pour l'équation de diffusion rapide (cas $m < 1$) a une queue lourde polynomiale, et la condition d'intégrabilité impose $2/(1-m) > n$, c'est-à-dire $m > 1 - 2/n$. Le profil pour l'équation des milieux poreux (cas $m > 1$) a un support compact, la boule centrée dont le rayon augmente au cours du temps (diffusion lente) :

$$u(t, x) = t^{-n\beta} c^{1/(m-1)} \left(1 - \frac{|x|^2}{R(t)^2} \right)_+^{1/(m-1)} \quad \text{où} \quad R(t) = \sqrt{\frac{2mc}{\beta(m-1)}} t^\beta.$$

Pour $m = 1$, la solution autosimilaire centrée de masse unité est le noyau (gaussien) de la chaleur

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Pour $n = 1$ et $m = 3$, on retrouve explicitement la loi du demi-cercle :

$$\beta = \frac{1}{4}, \quad c = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}, \quad B(x) = \left(\frac{1}{\pi\sqrt{3}} - \frac{x^2}{12} \right)_+^{1/2},$$

et la solution de masse unité s'écrit

$$u(t, x) = \frac{2}{\pi R(t)^2} \sqrt{(R(t)^2 - x^2)_+}, \quad R(t) = \left(\frac{48t}{\pi^2} \right)^{1/4}.$$

La loi de l'arcsinus correspond formellement au cas hors cadre $m = -1$.

Si $m > 1$, alors le prolongement par zéro satisfait l'équation au sens faible, y compris au bord du support. Dans les trois cas, les mesures $u(t, x) dx$ convergent faiblement vers la masse de Dirac δ_0 quand $t \searrow 0$.

Le profil Barenblatt B interpole entre la loi de Student multivariée (quand $\max(0, 1 - 2/n) < m < 1$) et la loi bêta multivariée (quand $m > 1$), en passant par la gaussienne pour $m = 1$. Le nombre de degrés de liberté dans le cas Student est $r = 2/(1-m) - n > 0$. Avec la normalisation de masse unité, les profils convergent vers $(4\pi)^{-n/2} \exp(-|x|^2/4)$, le profil gaussien de covariance $2I_n$, lorsque $m \rightarrow 1$, de part et d'autre.

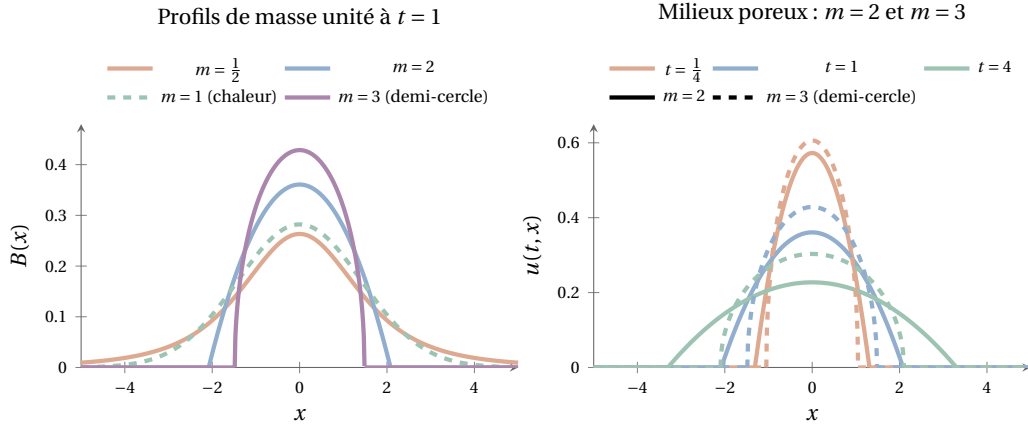


FIGURE 3. Solutions exactes de masse unité en dimension un.

Le dictionnaire avec les projections sphériques est donc explicite : en notant d la dimension ambiante de la sphère et k celle de la projection (donc $n = k$ dans l'équation de diffusion), l'identification des exposants donne $m = 1 + 2/(d - k - 2)$ si $1 \leq k < d - 2$, et $m = 1 - 2/(d + k - 1)$ si $1 \leq k \leq d - 1$ et $d + k > 3$, respectivement pour les projections orthogonales et les marginales stéréographiques des théorèmes 1.1 et 1.3. Dans le second cas, $\max(0, 1 - 2/k) < m < 1$. Il s'agit d'une correspondance entre densités et profils de masse unité, à dilatation près. En particulier, $d = 4$ et $k = 1$ donnent $m = 3$ dans le premier cas : c'est le demi-cercle.

Nous renvoyons à [V] pour une étude approfondie des profils et de leur rôle dans la diffusion non linéaire, et à [B] pour l'autosimilarité et les asymptotiques intermédiaires. Le profil demi-cercle est également conservé par une équation d'évolution non-linéaire non-locale de McKean–Vlasov. Sa transformée de Cauchy–Stieltjes satisfait une équation de Burgers complexe, et son potentiel logarithmique complexe une équation de Hamilton–Jacobi. La loi du demi-cercle joue le rôle de la loi gaussienne dans la théorie des probabilités libres de Dan-Virgil Voiculescu. Enfin, un fameux théorème de Eugene Wigner affirme que la loi du demi-cercle apparaît comme la loi limite des mesures spectrales empiriques de matrices aléatoires $n \times n$ de Wigner hermitiennes³, dans la limite de grande dimension $n \rightarrow \infty$. Cependant, la section 3 indique que la situation spectrale la plus élémentaire la faisant apparaître est celle des matrices 2×2 suivant la mesure de Haar sur $SU(2)$, en rapport avec le principe d'Archimède pour $\mathbb{S}^3$.



Grigory Isaakovich Barenblatt (1927 – 2018)

3. LOI DE SATO–TATE EN THÉORIE DES NOMBRES VIA $\mathbb{S}^3$ ET $SU(2)$

Le groupe $SU(2)$ et la sphère $\mathbb{S}^3$. Les éléments de $SU(2)$ sont paramétrés de manière unique par

$$U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

En écrivant $a = x_1 + ix_2$ et $b = x_3 + ix_4$, le groupe $SU(2)$ est identifié avec la sphère $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, qui est également la sphère unité des quaternions. Les multiplications à gauche et à droite agissent orthogonalement sur ces quatre coordonnées réelles, de sorte que la mesure de Haar sur $SU(2)$ correspond à la loi uniforme sur $\mathbb{S}^3$.

Loi de la trace via Archimède. Si $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ suit la loi uniforme sur $\mathbb{S}^3$, alors sa projection (X_1, X_2) sur $\mathbb{R}^2$ est uniforme sur le disque unité (théorème 1.1). Il en découle immédiatement que X_1 suit la loi du demi-cercle portée par $[-1, 1]$, de densité $s \mapsto 2\sqrt{(1 - s^2)_+}/\pi$. Par conséquent, si U suit la mesure de Haar sur $SU(2)$, alors

$$\text{Tr}(U) = a + \bar{a} \stackrel{d}{=} 2X_1$$

suit la loi du demi-cercle portée par $[-2, 2]$, de densité (de moyenne nulle et de variance 1)

$$s \mapsto \frac{\sqrt{(4 - s^2)_+}}{2\pi}.$$

3. Leurs coefficients strictement au-dessus de la diagonale sont i.i.d., centrés et de variance $1/n$.

Courbes elliptiques et réduction modulo un premier. Une *courbe elliptique* sur $\mathbb{Q}$ peut être représentée par une *équation de Weierstrass* de la forme (la condition $\Delta_E \neq 0$ garantit la lissité)

$$E: y^2 = x^3 + ax + b \quad \text{où } a, b \in \mathbb{Z} \text{ vérifient } \Delta_E := -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0.$$

La courbe projective lisse E est obtenue en ajoutant au modèle affine ci-dessus son unique point à l’infini $\mathcal{O}$. L’ensemble $E(\mathbb{Q}) = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\mathcal{O}\}$ des points rationnels, où $\mathcal{O}$ est le point à l’infini, est muni d’une loi de groupe abélien par la construction dite de la corde et de la tangente, avec $\mathcal{O}$ pour élément neutre. Pour un nombre premier p ne divisant pas $2\Delta_E$ (condition suffisante de *bonne réduction*), la réduction modulo p donne une courbe lisse $\tilde{E}$ sur $\mathbb{F}_p$, et l’on définit le *coefficient de Frobenius*

$$a_p(E) := p + 1 - \#\tilde{E}(\mathbb{F}_p).$$

Le terme $p + 1$ est le nombre de points d’une conique projective lisse sur $\mathbb{F}_p$, et $a_p(E)$ mesure l’écart à cette valeur de référence. Un théorème de Helmut Hasse (1898 – 1979) datant de 1936 affirme que pour tout nombre premier p de bonne réduction pour E ,

$$|a_p(E)| \leq 2\sqrt{p}.$$

Ceci permet de comparer les coefficients $a_p(E)$ pour différents nombres premiers en considérant les traces normalisées $s_p := a_p(E)/\sqrt{p} \in [-2, 2]$. Le tableau ci-dessous illustre ces quantités pour la courbe

$$E_{11}: y^2 + y = x^3 - x^2,$$

dont le seul premier de mauvaise réduction est 11. Les valeurs de $\#\tilde{E}_{11}(\mathbb{F}_p)$ s’obtiennent par énumération directe des solutions dans $\mathbb{F}_p^2$, augmentée du point à l’infini.

p	$\#\tilde{E}_{11}(\mathbb{F}_p)$	a_p	$s_p = a_p/\sqrt{p}$
2	5	-2	-1,414
3	5	-1	-0,577
5	5	+1	+0,447
7	10	-2	-0,756
13	10	+4	+1,109
17	20	-2	-0,485
19	20	+0	+0,000
23	25	-1	-0,209

TABLE 1. Coefficients de Frobenius pour la courbe elliptique $E_{11}: y^2 + y = x^3 - x^2$. Le premier $p = 11$ est exclu (mauvaise réduction).

À ce stade, la distribution des traces normalisées s_p n’est pas évidente. Dans les années 1960, Mikio Satō (1928 – 2023) et John Tate (1925 – 2019) ont formulé indépendamment une conjecture prédisant, pour les courbes sans multiplication complexe, la loi du demi-cercle. Pour comprendre la forme de cette loi, revenons à $SU(2)$.

Du comptage de points aux classes de Frobenius. La borne de Hasse permet d’écrire de manière unique $s_p = 2 \cos \theta_p$, avec $\theta_p \in [0, \pi]$. La matrice

$$\tilde{M}_p = \begin{pmatrix} e^{i\theta_p} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_p} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

a pour trace s_p . Toute matrice de $SU(2)$ est conjuguée dans ce groupe à une telle matrice, et sa trace détermine entièrement sa classe de conjugaison. À chaque premier de bonne réduction est ainsi associée une classe, appelée *classe de Frobenius normalisée*. Ce nom vient de l’endomorphisme de Frobenius de la courbe réduite, $(x, y) \mapsto (x^p, y^p)$. Son action sur les points de torsion d’ordre une puissance d’un premier $\ell \neq p$, décrite par le module de Tate, a pour polynôme caractéristique $T^2 - a_p(E)T + p$. Ses deux racines complexes sont $\sqrt{p}e^{\pm i\theta_p}$: leur normalisation redonne les valeurs propres de $\tilde{M}_p$. La question devient donc : les classes de Frobenius se répartissent-elles comme les classes de conjugaison d’une matrice tirée selon la mesure de Haar sur $SU(2)$? Si oui, leurs traces doivent suivre la loi du demi-cercle calculée plus haut grâce au théorème d’Archimède.

Énoncé du théorème de Sato–Tate. On dit qu’une courbe elliptique est *sans multiplication complexe* si ses seuls endomorphismes sur $\mathbb{Q}$ sont les multiplications par les entiers. C’est notamment le cas de E_{11} . Le théorème suivant a été établi entre 2006 et 2011 par Laurent Clozel, Michael Harris, Nicholas Shepherd-Barron et Richard Taylor, puis Tom Barnet-Lamb, David Geraghty, Harris et Taylor [B++].

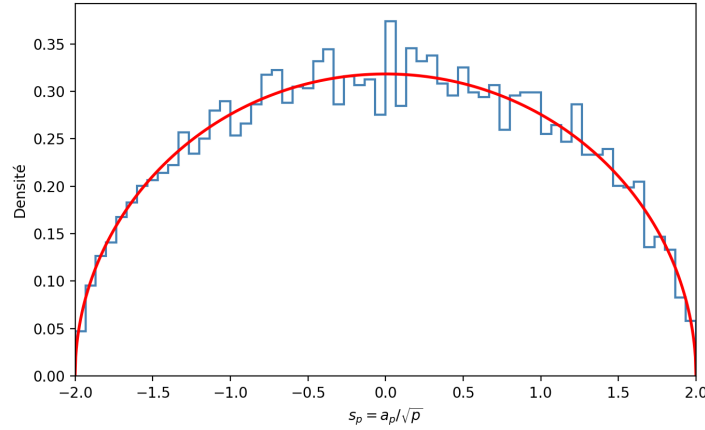


FIGURE 4. Histogramme des traces normalisées $(s_p)_{p \leq 10^5}$ pour la courbe $E_{11} : y^2 + y = x^3 - x^2$, superposé à la densité du demi-cercle $s \mapsto \sqrt{(4-s^2)_+}/(2\pi)$. Code SageMath :

```
E = EllipticCurve('11a3')
traces = []
for p in prime_range(100001):
    if E.has_good_reduction(p):
        traces.append(float(E.ap(p) / sqrt(RR(p))))
G = histogram(traces, bins=60, density=True, histtype='step',
              color='steelblue', linewidth=1.5)
G += plot(sqrt(4-x^2)/(2*pi), (x, -2, 2), color='red', thickness=2)
G.show()
```

Théorème 3.1: Sato–Tate, 2006–2011

Soit $E/\mathbb{Q}$ une courbe elliptique sans multiplication complexe, et $P(x)$ l'ensemble des premiers $p \leq x$ de bonne réduction pour E . Alors, pour les fonctions tests continues et bornées (convergence étroite),

$$\frac{1}{\#P(x)} \sum_{p \in P(x)} \delta_{s_p} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(4-s^2)_+}}{2\pi} ds.$$

Le théorème d'Archimède identifie la mesure candidate : le demi-cercle est la loi de la trace d'une matrice de Haar de $SU(2)$. Le contenu arithmétique profond du théorème de Sato–Tate est l'équidistribution des classes de Frobenius selon l'image de cette mesure de Haar sur l'espace des classes de conjugaison. En termes d'angles, le changement de variable $s = 2 \cos(\theta)$ transforme le demi-cercle en la loi de densité $\theta \in [0, \pi] \mapsto (2/\pi) \sin^2(\theta) d\theta$.

Multiplication complexe. L'hypothèse d'absence de multiplication complexe est essentielle. Une courbe a *multiplication complexe* (CM) lorsque son algèbre $\text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un corps quadratique imaginaire K . Par exemple, $E : y^2 = x^3 - x$ possède l'endomorphisme $(x, y) \mapsto (-x, iy)$ et a multiplication complexe par $\mathbb{Z}[i]$, avec $K = \mathbb{Q}(i)$. Pour une telle courbe, la distribution des traces normalisées s_p diffère radicalement du demi-cercle :

- lorsque p parcourt les premiers de bonne réduction *décomposés* dans K , les s_p sont équidistribués selon la *loi de l'arcsinus* sur $[-2, 2]$, de densité $s \mapsto 1/(\pi\sqrt{4-s^2})$ pour $|s| < 2$.
- si p est *inerte* dans K , alors $a_p(E) = 0$, donc $s_p = 0$, et la distribution des s_p est la masse de Dirac δ_0 .

Ce résultat, dû à Erich Hecke (1887 – 1947), et la densité $1/2$ de chacune des deux familles de premiers donnent la loi limite $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\mu_{\text{arcsinus}}$, voir [S19]. En particulier, l'ensemble des premiers tels que $s_p = 0$ a pour densité $1/2$. Pour $E : y^2 = x^3 - x$ par exemple, $a_p = 0$ pour tout premier $p \equiv 3 \pmod{4}$.

L'interprétation par la mesure de Haar est ici tout aussi simple. Le tore

$$T = \{\text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) : \theta \in [0, 2\pi)\} \subset SU(2)$$

est isomorphe au cercle : sa mesure de Haar correspond à un angle θ uniforme sur $[0, 2\pi)$. La trace $2 \cos \theta$ suit donc, par changement de variable, la loi de l'arcsinus sur $[-2, 2]$. Pour une courbe CM sur $\mathbb{Q}$, le groupe de Sato–Tate est le normalisateur de T dans $SU(2)$: il possède deux composantes de même masse de Haar, T et une seconde composante dont toutes les matrices ont une trace nulle. On retrouve ainsi le mélange $\frac{1}{2}\mu_{\text{arcsinus}} + \frac{1}{2}\delta_0$.

Un aperçu de la preuve. Le premier pas peut se formuler en termes de polynômes. Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce, définis par $U_0(t) = 1$, $U_1(t) = 2t$ et $U_{n+1}(t) = 2tU_n(t) - U_{n-1}(t)$, vérifient

$$\int_{-2}^2 U_n(s/2) \frac{\sqrt{4-s^2}}{2\pi} ds = 0, \quad n \geq 1.$$

Comme ils forment une base de l’espace des polynômes, la densité des polynômes dans les fonctions continues sur $[-2, 2]$ ramène Sato–Tate à

$$\frac{1}{\#P(x)} \sum_{p \in P(x)} U_n(s_p/2) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, \quad n \geq 1.$$

Pour $n = 1$ et $n = 2$, puisque $U_1(s/2) = s$ et $U_2(s/2) = s^2 - 1$, il s’agit de retrouver la moyenne nulle et le second moment égal à 1 du demi-cercle :

$$\frac{1}{\#P(x)} \sum_{p \in P(x)} s_p \longrightarrow 0, \quad \frac{1}{\#P(x)} \sum_{p \in P(x)} s_p^2 \longrightarrow 1.$$

Ce choix de polynômes a aussi une signification dans $SU(2)$: $U_n(\text{Tr}(U)/2)$ est le caractère de la puissance symétrique d’ordre n de la représentation naturelle. La condition précédente est donc le critère de Weyl pour l’équidistribution des classes de conjugaison.

La difficulté arithmétique est de démontrer ces limites pour tout n . La modularité relie les $a_p(E)$ aux coefficients de Fourier d’une forme modulaire. Les fonctions L associées à ses puissances symétriques encodent alors les sommes précédentes ; dans la normalisation unitaire, leur holomorphie et leur non-annulation sur la droite $\text{Re}(s) = 1$ permettent d’obtenir les limites recherchées. Les théorèmes d’automorphie potentielle fournissent ces propriétés analytiques. Pour cette partie profonde de la preuve, voir [Ca] pour le cas avec réduction multiplicative en une place et [B++] pour le cas général.

RÉFÉRENCES

- [B] G. I. Barenblatt, *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*, CUP, 1996
- [B+] F. Barthe, O. Guédon, S. Mendelson et A. Naor, *A probabilistic approach to the geometry of the ℓ_p^n -ball*, Annals of Probab. **33** (2005)
- [B++] T. Barnet-Lamb, D. Geraghty, M. Harris et R. Taylor, *A Family of Calabi–Yau Varieties and Potential Automorphy II*, (2011)
- [Be] B. Beauzamy, *Archimedes’ Modern Works*, Société de Calcul Mathématique, 2012.
- [Ca] H. Carayol, *La conjecture de Sato–Tate [d’après Clozel, Harris, Shepherd-Barron, Taylor]*, Séminaire Bourbaki, Astérisque **317** (2008)
- [Ch] D. Chafaï, *Archimedes, Barenblatt, and Sato–Tate*, Libres pensées d’un mathématicien ordinaire blog, 16 octobre 2026.
- [CK] Y. Chen et B. Klartag, *Digesting the proof of the sharp thin-shell inequality*, arXiv:2607.23307
- [CSW] D. Chafaï, E. B. Saff et R. S. Womersley, *On the solution of a Riesz equilibrium problem...*, J. of Math. Analysis and App. **515** (2022)
- [IMU] Union mathématique internationale, <https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal> (description de la médaille)
- [K] B. Klartag, *A central limit theorem for convex sets*, Inventiones Mathematicae **168** (2007)
- [L] G. Letac, *From Archimedes to statistics: the area of the sphere*, notes d’exposé pour l’académie d’été de Rovinj, 2004.
- [M] F. G. Mehler, *Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach Laplaceschen Functionen höherer Ordnung*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **66** (1866)
- [PR] J. Pitman et N. Ross, *Archimedes, Gauss, and Stein*, Notices of the AMS **59** (2012)
- [R] W. Rudin, *A Generalization of a Theorem of Archimedes*, The American Mathematical Monthly **80** (1973)
- [S19] A. V. Sutherland, *Sato–Tate distributions*, dans *Analytic Methods in Arithmetic Geometry*, Contemporary Mathematics **740** (2019)
- [V] J. L. Vázquez, *Smoothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations: Equations of Porous Medium Type*, OUP, 2006
- [Vi] Ministère de l’Éducation nationale, Odysseum, *Archimède. Sources iconographiques*, illustration n° 48.
- [W] Wikipédia, *On the Sphere and Cylinder*.



FIGURE 5. Illustration d'après un tableau d'Édouard Vimont, *La mort d'Archimède*, reproduite dans les *Beacon Lights of History* de John Lord, évoquant le meurtre d'Archimède de Syracuse durant le siège de cette ville grecque de Sicile par les soldats romains en -212. La mort d'Archimède est un thème classique de la peinture. Cette illustration a le mérite de figurer très explicitement la sphère et le cylindre, sur le mur derrière le siège du savant [Vi].