Projet X-MAP-311-2017-CHAFAI-1
Estimation du paramètre d'une loi exponentielle

Proposé par Djalil Chafaï

Second semestre 2016-2017

Ce petit projet a pour but d'étudier quelques propriétés des lois exponentielles.

1. Démontrer que si $(G_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires de loi géométrique de paramètres respectifs $(\mu_n)_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to\infty} n\mu_n = \mu > 0$ alors $(n^{-1}G_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre μ.

2. Démontrer que si E_1 et E_2 sont deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, alors
$$\mathrm{Loi}(E_2 - E_1 \,|\, E_2 > E_1) = \mathrm{Exp}(\lambda_2) = \mathrm{Loi}(E_2)$$
c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$,
$$\mathbb{P}(E_2 - E_1 > t \,|\, E_2 > E_1) = e^{-\lambda_2 t}.$$

3. Démontrer que si $(E_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est une famille finie ou infinie dénombrable de variables aléatoires réelles indépendantes de lois exponentielles de paramètres respectifs $(\lambda_i)_{i\in\mathcal{I}}$ avec
$$\lambda := \sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda_i < \infty,$$
alors la variable aléatoire $M := \inf_{i\in\mathcal{I}} E_i$ suit la loi exponentielle $\mathrm{Exp}(\lambda)$, et de plus, presque sûrement, l'infimum est atteint en un unique entier aléatoire I, indépendant de M, dont la loi est donnée pour tout $i \in \mathcal{I}$ par
$$\mathbb{P}(I = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}.$$

4. Démontrer que si $E_1, \ldots, E_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes et équidistribuées de loi exponentielle $\mathrm{Exp}(\lambda)$, et si
$$\min(E_1, \ldots, E_n) = E_{(1)} < \cdots < E_{(n)} = \max(E_1, \ldots, E_n)$$
est le réordonnement croissant (statistique d'ordre) de $E_1, \ldots, E_n$, alors
$$(E_{(1)}, \ldots, E_{(n)}) \overset{\text{loi}}{=} \left(\frac{E_1}{n}, \cdots, \frac{E_1}{n} + \cdots + \frac{E_n}{1}\right).$$
En particulier, pour tout $1 \leq k \leq n$, avec la convention $E_0 := 0$,
$$E_{(k)} \overset{\text{loi}}{=} \frac{E_1}{n} + \cdots + \frac{E_k}{n-k+1} = E_{(k-1)} + \frac{E_k}{n-k+1}.$$
En particulier
$$\min(E_1, \ldots, E_n) = E_{(1)} \overset{\text{loi}}{=} \frac{1}{n}E_1 \quad \text{et} \quad \max(E_1, \ldots, E_n) = E_{(n)} \overset{\text{loi}}{=} \frac{E_1}{n} + \cdots + \frac{E_n}{1}.$$

5. Démontrer que si $G, E_1, E_2, \ldots$ sont des variables aléatoires indépendantes avec G de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$ et $E_1, E_2, \ldots$ de loi exponentielles de paramètre λ. Alors la somme aléatoire $E_1 + \cdots + E_G$ suit la loi exponentielle de paramètre $p\lambda$.

6. Démontrer que si $(E_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes de lois exponentielles de paramètres respectifs $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ avec $0 < \lambda_n < \infty$ pour tout $n \geq 1$, alors l'événement $\{\sum_{n=1}^{\infty} E_n = \infty\}$ est de probabilité 0 ou 1 et

$$\mathbb{P}\Big(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} E_n = \infty\Big) = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

   Autrement dit la série aléatoire $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ diverge presque sûrement si et seulement si elle diverge en moyenne.

7. Dans toute la suite, on s'intéresse à présent à l'estimation du paramètre d'une loi exponentielle. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Posons

$$A_n = \frac{n}{X_1 + \cdots + X_n} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{\ln(n)}{\max(X_1, \ldots, X_n)}.$$

   Calculer la loi de $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ pour tout $n \geq 1$

8. Démontrer que $(A_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers λ quand $n \to \infty$

9. Calculer le biais et la variance de A_n pour tout $n \geq 1$

10. Démontrer qu'il existe une suite déterministe $(v_n)_{n\geq 1}$ appelée vitesse telle que la suite de variables alatoires $(v_n(A_n - \lambda))_{n\geq 1}$ converge en loi quand $n \to \infty$ et préciser la loi limite

11. Construire un intervalle de confiance pour λ

12. Calculer $\mathbb{P}(M_n \leq x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, où $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$

13. Démontrer que $(\lambda M_n - \ln(n))_{n\geq 1}$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers la loi de Gumbel dont la fonction de répartition est donnée par $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(-\exp(-x))$

14. En déduire un nouvel intervalle de confiance pour λ

15. Démontrer que $(B_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers λ quand $n \to \infty$

16. Qu'elle est la vitesse de l'estimateur B_n ?

17. Est-il préférable à l'estimateur A_n?

18. Proposer des programmes informatiques produisant de jolis graphiques illustrant les propriétés et performances des estimateurs ci-dessus.