# Projet X-MAP-311-2016-CHAFAI-1
# Marche aléatoire sur le cercle

Proposé par Djalil Chafaï

Second semestre 2015-2016

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées vérifiant $\mathbb{P}(X_n = \pm 1) = 1/2$ pour tout $n \geq 1$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$. On s'intéresse à la marche aléatoire simple $(S_n \bmod L)_{n\geq 0}$ sur le cercle $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z} = \{0, \ldots, L-1\}$, où $L \geq 2$ est un entier fixé. Pour tout $r \in \{0, \ldots, L-1\}$ et tout $n \geq 0$, on pose

$$p_r^{(n)} := \mathbb{P}(S_n = r \bmod L).$$

Ce projet est tiré d'un exercice de révision du MAP 432.

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}\left(e^{2ik\pi S_n/L}\right)$ de deux manières et en déduire que
$$\sum_{\ell=0}^{L-1} p_\ell^{(n)} e^{2ik\pi\ell/L} = \cos^n\Big(\frac{2k\pi}{L}\Big);$$
2. En déduire que pour tout $r \in \{0, \ldots, L-1\}$,
$$p_r^{(n)} = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} \cos^n\Big(\frac{2k\pi}{L}\Big) e^{-i2k\pi r/L}.$$
3. Montrer que si $L$ est impair alors $\lim_{n\to+\infty} p_r^{(n)} = \frac{1}{L}$ pour tout $r \in \{0, \ldots, L-1\}$;
4. Que se passe-t-il si $L$ est pair ?
5. Démontrer que si $L$ est impair alors
$$\max_{0\leq r\leq L-1} \left|p_r^{(n)} - \tfrac{1}{L}\right| \leq \exp\Big(-\frac{n\pi^2}{2L^2}\Big).$$
Indication: $|\cos(\pi - x)| \leq \exp(-x^2/2)$ pour tout $|x| \leq \pi/2$.
6. Écrire un programme informatique simulant des réalisations de la v.a. $S_n$. Utilisez des histogrammes pour visualiser la convergence vers la loi uniforme. Proposez également un graphique visualisant la vitesse de convergence (comparer avec la borne sous-exponentielle).
7. Relaxons la condition $S_0 = 0$. Soit $P$ la matrice $L \times L$ définie par $P_{i,j} = \mathbb{P}(S_1 = j \mid S_0 = i)$ pour tous $i, j \in \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$. Quelle est sa structure ? Montrer que pour tout $n \geq 0$,
$$(P^n)_{i,j} = \mathbb{P}(S_n = j \mid S_0 = i).$$
8. Étudier le comportement de la suite $(P^n)_{n\geq 0}$ en fonction de la parité de $L$;
9. Écrire un programme illustrant le comportement de la suite $(P^n)_{n\geq 0}$;
10. Montrer que les valeurs propres de $P$ sont dans l'intervalle $[-1, 1]$. Montrer que 1 est valeur propre de $P$, et préciser l'espace propre associé. Écrire un programme illustrant le comportement des valeurs propres et des vecteurs propres de $P^n$ lorsque $n \to \infty$.