Graphes et matrices aléatoires

Quelques aspects

Djalil Chafaï
djalil.chafai.net

MAP432 École Polytechnique

20 janvier 2012

Menu de l’exposé

Menu de l’exposé

Concept de graphe

- Graphe = (N, L)

Concept de graphe

- Graphe = (N, L)
  - Ensemble de nœuds N

Concept de graphe

- Graphe = (N, L)
  - Ensemble de nœuds N
  - Ensemble de liens $L \subset N \times N$

Concept de graphe

- Graphe = (N, L)
  - Ensemble de nœuds N
  - Ensemble de liens $L \subset N \times N$
  - Codage par matrice d'adjacence $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in L \\ 0 & \text{si } (i,j) \notin L \end{cases}$

Concept de graphe

- Graphe = (N, L)
  - Ensemble de nœuds N
  - Ensemble de liens $L \subset N \times N$
  - Codage par matrice d'adjacence $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in L \\ 0 & \text{si } (i,j) \notin L \end{cases}$
- Graphe non orienté : A symétrique

Concept de graphe

- Graphe = (N, L)
  - Ensemble de nœuds N
  - Ensemble de liens $L \subset N \times N$
  - Codage par matrice d'adjacence $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in L \\ 0 & \text{si } (i,j) \notin L \end{cases}$
- Graphe non orienté : A symétrique
- Graphe simple : $\mathrm{diag}(A) = 0$

Concept de graphe

- Graphe = (N, L)
  - Ensemble de nœuds N
  - Ensemble de liens $L \subset N \times N$
  - Codage par matrice d'adjacence $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in L \\ 0 & \text{si } (i,j) \notin L \end{cases}$
- Graphe non orienté : A symétrique
- Graphe simple : $\mathrm{diag}(A) = 0$
- $(A^k)_{ij}$ = nombre de chemins de longueur k de i à j

Concept de graphe

- Graphe = (N, L)
  - Ensemble de nœuds N
  - Ensemble de liens $L \subset N \times N$
  - Codage par matrice d'adjacence $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in L \\ 0 & \text{si } (i,j) \notin L \end{cases}$
- Graphe non orienté : A symétrique
- Graphe simple : $\mathrm{diag}(A) = 0$
- $(A^k)_{ij}$ = nombre de chemins de longueur k de i à j
- DegréSortant$(i) = \mathrm{card}\{j \in N : (i,j) \in L\} = sum(A_{i,:})$

Concept de graphe

- Graphe = (N, L)
  - Ensemble de nœuds N
  - Ensemble de liens $L \subset N \times N$
  - Codage par matrice d'adjacence $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in L \\ 0 & \text{si } (i,j) \notin L \end{cases}$
- Graphe non orienté : A symétrique
- Graphe simple : $\mathrm{diag}(A) = 0$
- $(A^k)_{ij}$ = nombre de chemins de longueur k de i à j
- $\text{DegréSortant}(i) = \mathrm{card}\{j \in N : (i,j) \in L\} = sum(A_{i,:})$
- $\text{DegréEntrant}(i) = \mathrm{card}\{j \in N : (j,i) \in L\} = sum(A_{:,i})$

Concept de graphe

- Graphe = (N, L)
  - Ensemble de nœuds N
  - Ensemble de liens $L \subset N \times N$
  - Codage par matrice d'adjacence $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in L \\ 0 & \text{si } (i,j) \notin L \end{cases}$
- Graphe non orienté : A symétrique
- Graphe simple : $\operatorname{diag}(A) = 0$
- $(A^k)_{ij}$ = nombre de chemins de longueur k de i à j
- DegréSortant$(i) = \operatorname{card}\{j \in N : (i,j) \in L\} = sum(A_{i,:})$
- DegréEntrant$(i) = \operatorname{card}\{j \in N : (j,i) \in L\} = sum(A_{:,i})$
- Concept : marche aléatoire sur (N, L) (chaîne de Markov)

World Wide Web et Google PageRank

- N = pages du World Wide Web ($\approx 10^{10}$)

World Wide Web et Google PageRank

- N = pages du World Wide Web ($\approx 10^{10}$)
- L = liens entre pages

World Wide Web et Google PageRank

- N = pages du World Wide Web ($\approx 10^{10}$)
- L = liens entre pages
- Importance d'une page mal mesurée par DegréEntrant

World Wide Web et Google PageRank

- N = pages du World Wide Web ($\approx 10^{10}$)
- L = liens entre pages
- Importance d'une page mal mesurée par DegréEntrant
- Solution : loi invariante de la marche aléatoire !

World Wide Web et Google PageRank

- N = pages du World Wide Web ($\approx 10^{10}$)
- L = liens entre pages
- Importance d'une page mal mesurée par DegréEntrant
- Solution : loi invariante de la marche aléatoire !
- Estimation par loi des grands nombres (GoogleBots)

World Wide Web et Google PageRank

- N = pages du World Wide Web ($\approx 10^{10}$)
- L = liens entre pages
- Importance d'une page mal mesurée par DegréEntrant
- Solution : loi invariante de la marche aléatoire !
- Estimation par loi des grands nombres (GoogleBots)

- Brin et Page ($\approx$ 1995)

World Wide Web et Google PageRank

- N = pages du World Wide Web ($\approx 10^{10}$)
- L = liens entre pages
- Importance d'une page mal mesurée par DegréEntrant
- Solution : loi invariante de la marche aléatoire !
- Estimation par loi des grands nombres (GoogleBots)

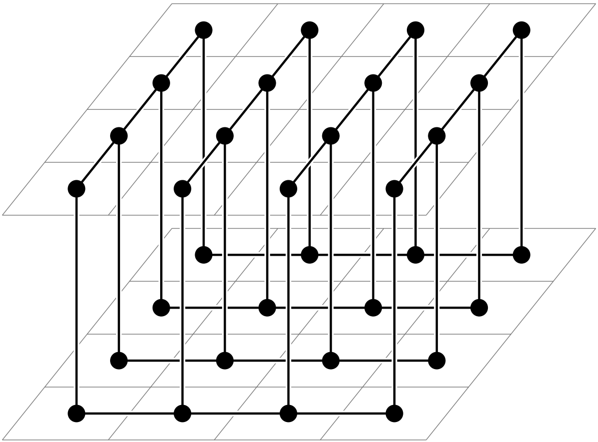
- Brin et Page ($\approx$ 1995)
- Google Inc.: $8 milliards de profit en 2010

World Wide Web et Google PageRank

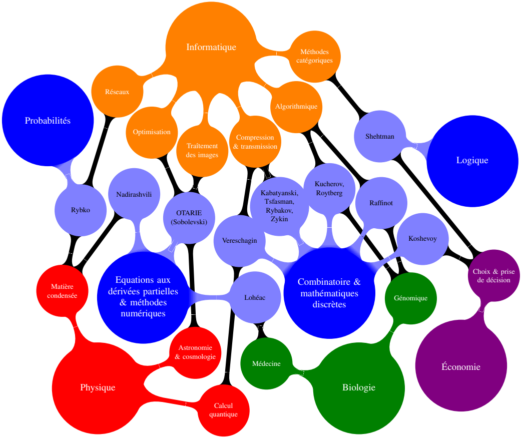
- N = pages du World Wide Web ($\approx 10^{10}$)
- L = liens entre pages
- Importance d'une page mal mesurée par DegréEntrant
- Solution : loi invariante de la marche aléatoire !
- Estimation par loi des grands nombres (GoogleBots)

- Brin et Page ($\approx$ 1995)
- Google Inc.: \$8 milliards de profit en 2010
- Markov ($\approx$ 1906), Perron ($\approx$ 1907), Frobenius ($\approx$ 1908)

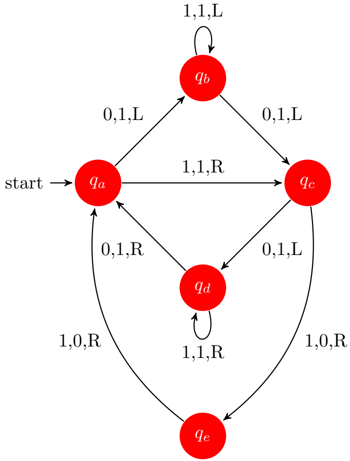
Autres exemples de graphes



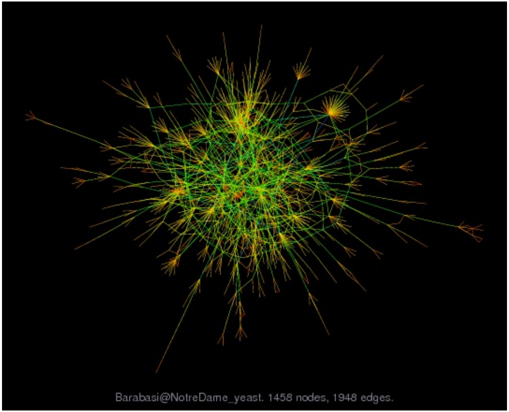
Autres exemples de graphes



Autres exemples de graphes

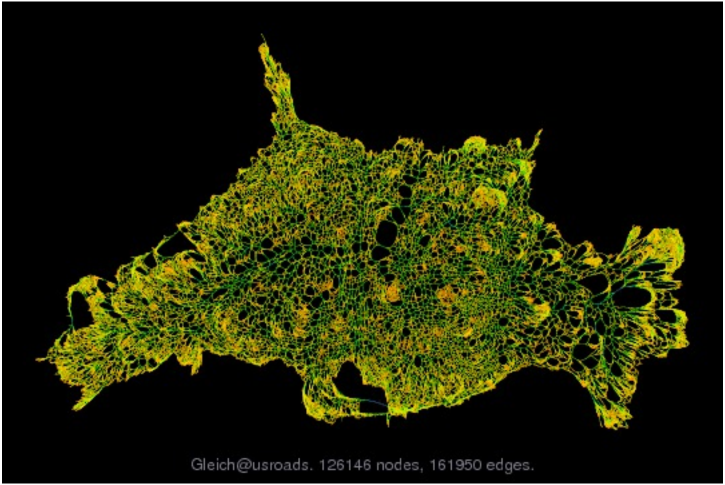


Autres exemples de graphes

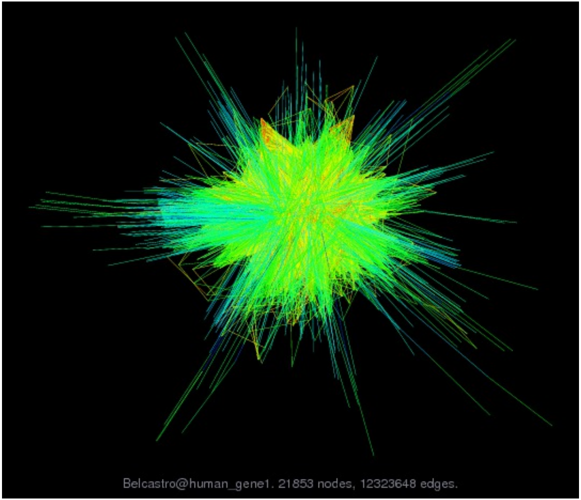


Problème de représentation des graphes !

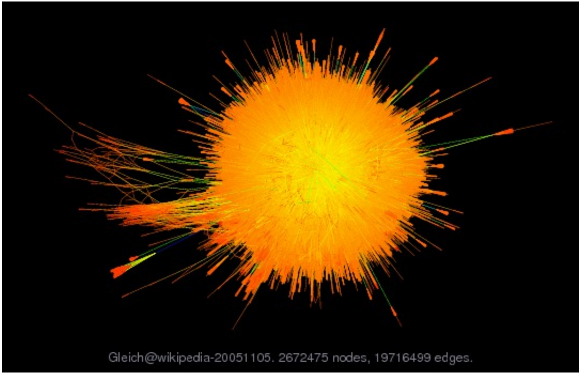
Autres exemples de graphes



Autres exemples de graphes

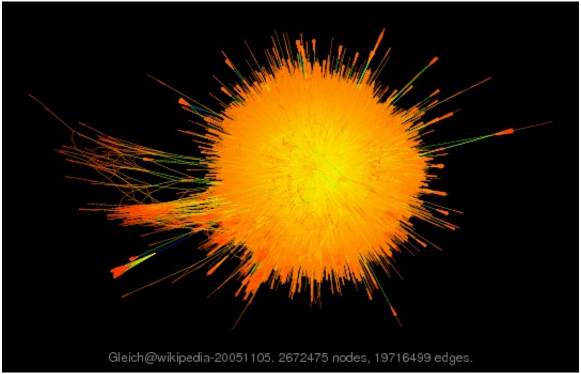


Autres exemples de graphes



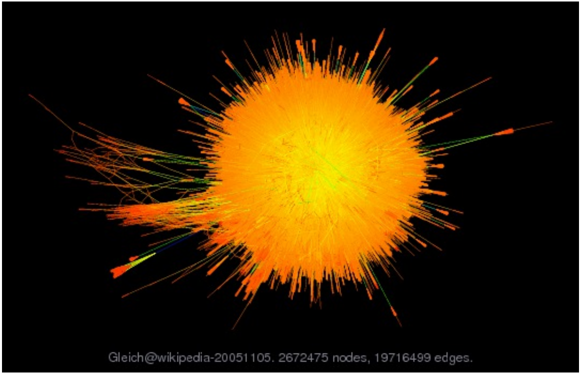
- Réseaux sociaux (Wikipédia, FaceBook, Peer2Peer, . . .)

Autres exemples de graphes



- Réseaux sociaux (Wikipédia, FaceBook, Peer2Peer, . . .)
- Matrice d'adjacence aléatoire $\leftrightarrow$ graphe aléatoire

Autres exemples de graphes



- Réseaux sociaux (Wikipédia, FaceBook, Peer2Peer, . . .)
- Matrice d'adjacence aléatoire $\leftrightarrow$ graphe aléatoire
- Composantes connexes géantes, « hubs », nœuds isolés

Modèle d'Erdős et Rényi $G(n, p)$

- Liens i.i.d. Bernoulli $p = p_n$ entre les $n = \mathrm{Card}(N)$ nœuds

Modèle d'Erdős et Rényi $G(n, p)$

- Liens i.i.d. Bernoulli $p = p_n$ entre les $n = \mathrm{Card}(N)$ nœuds
- Matrice d'adjacence A aléatoire à entrées i.i.d. Bernoulli

Modèle d'Erdős et Rényi $G(n, p)$

- Liens i.i.d. Bernoulli $p = p_n$ entre les $n = \mathrm{Card}(N)$ nœuds
- Matrice d'adjacence A aléatoire à entrées i.i.d. Bernoulli
- DegréEntrant et DegréSortant Poisson(λ) si $np \to \lambda$

Modèle d'Erdős et Rényi $G(n, p)$

- Liens i.i.d. Bernoulli $p = p_n$ entre les $n = \mathrm{Card}(N)$ nœuds
- Matrice d'adjacence A aléatoire à entrées i.i.d. Bernoulli
- DegréEntrant et DegréSortant Poisson(λ) si $np \to \lambda$

Théorème (Phénomène de seuil d'Erdős et Rényi (1959))

Si $np \to \lambda > 1$ alors presque sûrement $G(n, p)$ possède une unique composante connexe géante contenant une fraction positive de nœuds, et aucune autre composante connexe ne contient plus de $\mathcal{O}(\log(n))$ nœuds.

Modèle d'Erdős et Rényi $G(n,p)$

- Liens i.i.d. Bernoulli $p = p_n$ entre les $n = \mathrm{Card}(N)$ nœuds
- Matrice d'adjacence A aléatoire à entrées i.i.d. Bernoulli
- DegréEntrant et DegréSortant Poisson(λ) si $np \to \lambda$

Théorème (Phénomène de seuil d'Erdős et Rényi (1959))

Si $np \to \lambda > 1$ alors presque sûrement $G(n,p)$ possède une unique composante connexe géante contenant une fraction positive de nœuds, et aucune autre composante connexe ne contient plus de $\mathcal{O}(\log(n))$ nœuds. De plus:

- *Si $np < (1-\varepsilon)\log(n)$ alors $G(n,p)$ a des nœuds isolés*
- *Si $np > (1+\varepsilon)\log(n)$ alors $G(n,p)$ est connexe*

Modèle d'Erdős et Rényi $G(n,p)$

- Liens i.i.d. Bernoulli $p = p_n$ entre les $n = \mathrm{Card}(N)$ nœuds
- Matrice d'adjacence A aléatoire à entrées i.i.d. Bernoulli
- DegréEntrant et DegréSortant Poisson(λ) si $np \to \lambda$

Théorème (Phénomène de seuil d'Erdős et Rényi (1959))

Si $np \to \lambda > 1$ alors presque sûrement $G(n,p)$ possède une unique composante connexe géante contenant une fraction positive de nœuds, et aucune autre composante connexe ne contient plus de $\mathcal{O}(\log(n))$ nœuds. De plus:

- *Si $np < (1-\varepsilon)\log(n)$ alors $G(n,p)$ a des nœuds isolés*
- *Si $np > (1+\varepsilon)\log(n)$ alors $G(n,p)$ est connexe*

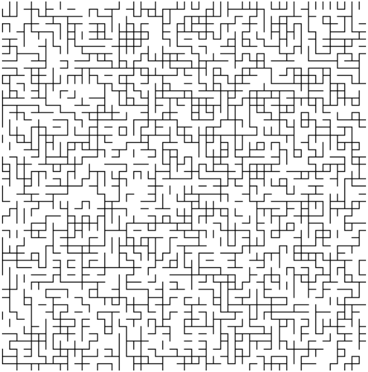
- Outils : marches aléatoires et processus de branchement

Modèle de percolation d’Hammersley et Kesten

- Graphe $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$

Modèle de percolation d'Hammersley et Kesten

- Graphe $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$
- On retire des liens avec probabilité $1 - p$ de manière i.i.d.



Modèle de percolation d'Hammersley et Kesten

- Graphe $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$
- On retire des liens avec probabilité $1 - p$ de manière i.i.d.
- Probabilité de percolation : $c(p) = \mathbb{P}(0 \to \infty)$

Modèle de percolation d'Hammersley et Kesten

- Graphe $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$
- On retire des liens avec probabilité $1 - p$ de manière i.i.d.
- Probabilité de percolation : $c(p) = \mathbb{P}(0 \to \infty)$
- $c(p) = 0$ ou $c(p) = 1$ par loi du 0-1 de Kolmogorov

Modèle de percolation d'Hammersley et Kesten

- Graphe $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$
- On retire des liens avec probabilité $1 - p$ de manière i.i.d.
- Probabilité de percolation : $c(p) = \mathbb{P}(0 \to \infty)$
- $c(p) = 0$ ou $c(p) = 1$ par loi du 0-1 de Kolmogorov
- $c(0) = 0$ et $c(1) = 1$, monotonie de $p \mapsto c(p)$ par couplage

Modèle de percolation d'Hammersley et Kesten

- Graphe $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$
- On retire des liens avec probabilité $1 - p$ de manière i.i.d.
- Probabilité de percolation : $c(p) = \mathbb{P}(0 \to \infty)$
- $c(p) = 0$ ou $c(p) = 1$ par loi du 0-1 de Kolmogorov
- $c(0) = 0$ et $c(1) = 1$, monotonie de $p \mapsto c(p)$ par couplage
- Existence d'un seuil critique $p_c \in [0, 1]$ pour $p \mapsto c(p)$

Modèle de percolation d'Hammersley et Kesten

- Graphe $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$
- On retire des liens avec probabilité $1-p$ de manière i.i.d.
- Probabilité de percolation : $c(p) = \mathbb{P}(0 \to \infty)$
- $c(p) = 0$ ou $c(p) = 1$ par loi du 0-1 de Kolmogorov
- $c(0) = 0$ et $c(1) = 1$, monotonie de $p \mapsto c(p)$ par couplage
- Existence d'un seuil critique $p_c \in [0,1]$ pour $p \mapsto c(p)$

Théorème (Hammersely (1957) et Kesten (1982))

On a $0 < p_c < 1$ pour tout $d \geqslant 2$ et $p_c = 1/2$ pour $d = 2$.

Modèle de percolation d'Hammersley et Kesten

- Graphe $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$
- On retire des liens avec probabilité $1 - p$ de manière i.i.d.
- Probabilité de percolation : $c(p) = \mathbb{P}(0 \to \infty)$
- $c(p) = 0$ ou $c(p) = 1$ par loi du 0-1 de Kolmogorov
- $c(0) = 0$ et $c(1) = 1$, monotonie de $p \mapsto c(p)$ par couplage
- Existence d'un seuil critique $p_c \in [0, 1]$ pour $p \mapsto c(p)$

Théorème (Hammersely (1957) et Kesten (1982))

On a $0 < p_c < 1$ pour tout $d \geqslant 2$ et $p_c = 1/2$ pour $d = 2$.

- Outils : marche aléatoire auto-évitante entre autres

Modèle de percolation d'Hammersley et Kesten

- Graphe $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$
- On retire des liens avec probabilité $1 - p$ de manière i.i.d.
- Probabilité de percolation : $c(p) = \mathbb{P}(0 \to \infty)$
- $c(p) = 0$ ou $c(p) = 1$ par loi du 0-1 de Kolmogorov
- $c(0) = 0$ et $c(1) = 1$, monotonie de $p \mapsto c(p)$ par couplage
- Existence d'un seuil critique $p_c \in [0, 1]$ pour $p \mapsto c(p)$

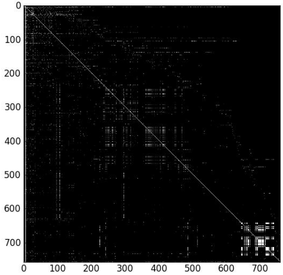
Théorème (Hammersely (1957) et Kesten (1982))

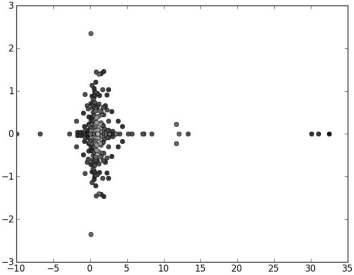
On a $0 < p_c < 1$ pour tout $d \geqslant 2$ et $p_c = 1/2$ pour $d = 2$.

- Outils : marche aléatoire auto-évitante entre autres
- Nombreuses questions ouvertes : Werner, Smirnov, ...

Matrices aléatoires

Wikipédia





http://djalil.chafai.net/blog/2011/12/28/w2m-python-module/

Un théorème de Tao et Vu ($\approx$ 2009)

Théorème (Uniformisation du spectre sur le disque)

Si A est une matrice aléatoire $n \times n$ avec $(A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ i.i.d. de variance σ^2/n

Un théorème de Tao et Vu ($\approx$ 2009)

Théorème (Uniformisation du spectre sur le disque)

Si A est une matrice aléatoire $n \times n$ avec $(A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ i.i.d. de variance σ^2/n alors pour tout ensemble borélien E de $\mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Card}\{1 \leqslant i \leqslant n : \lambda_i(A) \in E\}}{n} = \frac{\mathrm{Leb}(E \cap \sigma D)}{\mathrm{Leb}(\sigma D)}.$$

Un théorème de Tao et Vu ($\approx$ 2009)

Théorème (Uniformisation du spectre sur le disque)

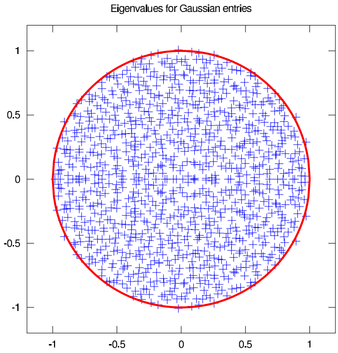
Si A est une matrice aléatoire $n \times n$ avec $(A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ i.i.d. de variance σ^2/n alors pour tout ensemble borélien E de $\mathbb{C}$,

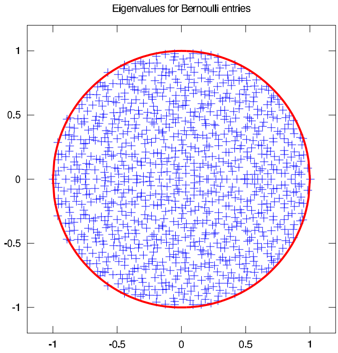
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Card}\{1 \leqslant i \leqslant n : \lambda_i(A) \in E\}}{n} = \frac{\mathrm{Leb}(E \cap \sigma D)}{\mathrm{Leb}(\sigma D)}.$$

Si de plus $\mathbb{E}(A_{11}) = 0$ et $\mathbb{E}(|A_{11}|^4) < \infty$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i(A)| = \sigma.$$

Universalité : lois de Gauss et de Bernoulli





Idée de la preuve

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ racines dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = \det(A - zI)$

Idée de la preuve

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ racines dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = \det(A - zI)$
- Mesure spectrale : $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}$

Idée de la preuve

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ racines dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = \det(A - zI)$
- Mesure spectrale : $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}$
- Solution fondamentale de l'équation de Laplace sur $\mathbb{C}$

$$\Delta \log |\cdot| = 2\pi\delta_0$$

Idée de la preuve

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ racines dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = \det(A - zI)$
- Mesure spectrale : $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}$
- Solution fondamentale de l'équation de Laplace sur $\mathbb{C}$

$$\Delta \log |\cdot| = 2\pi\delta_0$$

- Caractérisation dans l'espace de Schwartz $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$

$$\Delta(\log |\cdot| * \mu) = 2\pi\mu$$

Idée de la preuve

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ racines dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = \det(A - zI)$
- Mesure spectrale : $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}$
- Solution fondamentale de l'équation de Laplace sur $\mathbb{C}$

$$\Delta \log |\cdot| = 2\pi\delta_0$$

- Caractérisation dans l'espace de Schwartz $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$

$$\Delta(\log |\cdot| * \mu) = 2\pi\mu$$

- Il suffit donc de calculer pour presque tout z la quantité

$$(\log |\cdot| * \mu_n)(z) = \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| \, d\mu_n$$

Hermitisation

- Si $z \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, en posant $H_z = \sqrt{(A - zI)(A - zI)^*}$,

$$\int_{\mathbb{C}} \log |z - w| \, d\mu_n(w) = \frac{1}{n} \log |\det(A - zI)| = \frac{1}{n} \log(\det(H_z))$$

Hermitisation

- Si $z \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, en posant $H_z = \sqrt{(A - zI)(A - zI)^*}$,

$$\int_{\mathbb{C}} \log |z - w| \, d\mu_n(w) = \frac{1}{n} \log | \det(A - zI)| = \frac{1}{n} \log(\det(H_z))$$

- En notant $\nu_{n,z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{s_i}$ où $s_1, \ldots, s_n = \mathrm{spectre}(H_z)$,

$$\int_{\mathbb{C}} \log |z - w| \, d\mu_n(w) = \int_0^{\infty} \log(s) \, d\nu_{n,z}(s)$$

Hermitisation

- Si $z \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, en posant $H_z = \sqrt{(A - zI)(A - zI)^*}$,

$$\int_{\mathbb{C}} \log |z - w| \, d\mu_n(w) = \frac{1}{n} \log |\det(A - zI)| = \frac{1}{n} \log(\det(H_z))$$

- En notant $\nu_{n,z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{s_i}$ où $s_1, \ldots, s_n = \mathrm{spectre}(H_z)$,

$$\int_{\mathbb{C}} \log |z - w| \, d\mu_n(w) = \int_0^{\infty} \log(s) \, d\nu_{n,z}(s)$$

- $\rightsquigarrow$ analyse du spectre de H_z (hermitienne aléatoire)

Moments et matrices hermitiennes

- H hermitienne aléatoire de valeurs propres $s_1, \dots, s_n$

Moments et matrices hermitiennes

- H hermitienne aléatoire de valeurs propres $s_1, \ldots, s_n$
- Mesure spectrale : $\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{s_i}$

Moments et matrices hermitiennes

- H hermitienne aléatoire de valeurs propres $s_1, \ldots, s_n$
- Mesure spectrale : $\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{s_i}$
- $\mathrm{supp}(\nu) \subset \mathbb{R} \rightsquigarrow$ les moments suffisent

Moments et matrices hermitiennes

- H hermitienne aléatoire de valeurs propres $s_1, \ldots, s_n$
- Mesure spectrale : $\nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{s_i}$
- $\mathrm{supp}(\nu) \subset \mathbb{R} \rightsquigarrow$ les moments suffisent
- Pour tout entier k,

$$\int s^k \, d\nu(s) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(H^k) = \frac{1}{n}\sum_{i_1,\ldots,i_k} H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_{i_k} i_1}$$

Moments et matrices hermitiennes

- H hermitienne aléatoire de valeurs propres $s_1, \ldots, s_n$
- Mesure spectrale : $\nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{s_i}$
- $\mathrm{supp}(\nu) \subset \mathbb{R} \rightsquigarrow$ les moments suffisent
- Pour tout entier k,

$$\int s^k \, d\nu(s) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(H^k) = \frac{1}{n}\sum_{i_1,\ldots,i_k} H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_k i_1}$$

- Concentration : ν est proche de $\mathbb{E}\nu$

Moments et matrices hermitiennes

- H hermitienne aléatoire de valeurs propres $s_1, \ldots, s_n$
- Mesure spectrale : $\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{s_i}$
- $\mathrm{supp}(\nu) \subset \mathbb{R} \rightsquigarrow$ les moments suffisent
- Pour tout entier k,

$$\int s^k \, d\nu(s) = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}(H^k) = \frac{1}{n} \sum_{i_1, \ldots, i_k} H_{i_1 i_2} \cdots H_{i_k i_1}$$

- Concentration : ν est proche de $\mathbb{E}\nu$
- Combinatoire : $\mathbb{E}\nu$ calculable (indép. et comptage)

Matrice de transition au lieu de matrice d’adjacence ?

Matrices de transition aléatoires

Théorème (Uniformisation du spectre sur le disque)

Soit A une matrice aléatoire $n \times n$ avec $(A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ i.i.d. sur $[0,1]$ et $\kappa = \sqrt{\mathrm{Var}(A_{11})}/\mathbb{E}(A_{11})$ fini et non nul.

Matrices de transition aléatoires

Théorème (Uniformisation du spectre sur le disque)

Soit A une matrice aléatoire $n \times n$ avec $(A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ i.i.d. sur $[0,1]$ et $\kappa = \sqrt{\mathrm{Var}(A_{11})}/\mathbb{E}(A_{11})$ fini et non nul. Soit P la matrice de transition aléatoire $n \times n$ définie par

$$P_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{i1} + \cdots + A_{in}}$$

Matrices de transition aléatoires

Théorème (Uniformisation du spectre sur le disque)

Soit A une matrice aléatoire $n \times n$ avec $(A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ i.i.d. sur $[0,1]$ et $\kappa = \sqrt{\mathrm{Var}(A_{11})}/\mathbb{E}(A_{11})$ fini et non nul. Soit P la matrice de transition aléatoire $n \times n$ définie par

$$P_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{i1} + \cdots + A_{in}}$$

Alors pour tout ensemble borélien E de $\mathbb{C}$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{Card}\{1 \leqslant i \leqslant n : \lambda_i(\sqrt{n}P) \in E\}}{n} = \frac{\mathrm{Leb}(E \cap \kappa D)}{\mathrm{Leb}(\kappa D)}.$$

Matrices de transition aléatoires

Théorème (Uniformisation du spectre sur le disque)

Soit A une matrice aléatoire $n \times n$ avec $(A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ i.i.d. sur $[0,1]$ et $\kappa = \sqrt{\mathrm{Var}(A_{11})}/\mathbb{E}(A_{11})$ fini et non nul. Soit P la matrice de transition aléatoire $n \times n$ définie par

$$P_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{i1} + \cdots + A_{in}}$$

Alors pour tout ensemble borélien E de $\mathbb{C}$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{Card}\{1 \leqslant i \leqslant n : \lambda_i(\sqrt{n}P) \in E\}}{n} = \frac{\mathrm{Leb}(E \cap \kappa D)}{\mathrm{Leb}(\kappa D)}.$$

Idée de la preuve : $A_{i1} + \cdots + A_{in} = n(\mathbb{E}(A_{11}) + o(1))$ (LGN !)

Trou spectral et loi invariante

Théorème (Trou spectral et uniformisation de la loi invariante)

Pour le modèle markovien aléatoire précédent :

- $1 \in \mathrm{spec}(P) \subset D$ *et* $|\lambda_1(P)| := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i(P)| = 1$

Trou spectral et loi invariante

Théorème (Trou spectral et uniformisation de la loi invariante)

Pour le modèle markovien aléatoire précédent :

- $1 \in \mathrm{spec}(P) \subset D$ *et* $|\lambda_1(P)| := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i(P)| = 1$
- $\{\lambda_2(P), \ldots, \lambda_n(P)\} \subset n^{-1/2}(\kappa + o(1))D$ *presque sûrement*

Trou spectral et loi invariante

Théorème (Trou spectral et uniformisation de la loi invariante)

Pour le modèle markovien aléatoire précédent :

- $1 \in \mathrm{spec}(P) \subset D$ *et* $|\lambda_1(P)| := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i(P)| = 1$
- $\{\lambda_2(P), \ldots, \lambda_n(P)\} \subset n^{-1/2}(\kappa + o(1))D$ *presque sûrement*
- *Loi invariante : si* $v \in [0,1]^n$ *est invariant, c'est-à-dire* $vP = v$ *et* $v_1 + \cdots + v_n = 1$, *alors presque sûrement*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left| v_i - \frac{1}{n} \right| = 0.$$

Merci pour votre attention !

- R. van der Hofstad, *Random Graphs and Complex Networks*
- T. Lévy, *Probabilistic Methods in Statistical Physics*
- T. Tao blog `http://terrytao.wordpress.com/`
- Ch. Bordenave & D. Chafaï, *Around the circular law*