

Seconde feuille de TD :

Nombres Complexes et Développements Limités

Exercice 1. Mettre sous la forme $a + ib$, a et b réels, les nombres suivants.

$$\text{a. } \frac{3+6i}{3-4i}, \quad \text{b. } \frac{5+2i}{1-2i}, \quad \text{c. } \left(-1/2 + i\sqrt{3}/2\right)^3, \quad \text{d. } \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

Exercice 2. Représenter les nombres suivants sous forme trigonométrique: module, argument. (Faire un dessin est souvent utile).

a. $1 + i$

b. $\sqrt{3} + i$

c. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

d. $1 + e^{i\theta}$ et $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$ pour $\theta \in [-\pi, \pi]$ fixé (et $\theta \neq 0$).

Exercice 3. Soit D l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie $|z| \leq 1$, soit K_1 l'ensemble des points z vérifiant $|\operatorname{Re}(z)| \leq 1$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$, et soit K_2 l'ensemble des points z vérifiant $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq 1$. Dessiner D , K_1 et K_2 , et les comparer.

Exercice 4. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants.

$$\text{a. } 7 + 24i, \quad \text{b. } 5 + 12i, \quad \text{c. } \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}.$$

Exercice 5. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

a. $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$.

b. $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.

c. $z^6 = 1 + i$.

Exercice 6. Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ à valeurs dans $[0; 1]$.

1. Montrer qu'il existe au moins un point α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

2. On suppose de plus que f est dérivable sur $[0; 1]$ et que sa dérivée vérifie : $|f'(x)| < 1$.
Montrer alors que α est la seule solution de l'équation $f(x) = x$.

Exercice 7. Donner un développement limité des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto \exp(\sin x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 4 ;

b. $x \mapsto \tan x$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$, à l'ordre 3 ;

c. $x \mapsto \arctan(x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 3 ;

d. $x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x + 2}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.

Exercice 8. En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes :

a.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2}$$

b.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x(\ln(1+x) - x)}$$

c.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + x + 1} \right)$$

Exercice 9. Étudier la position du graphe de la fonction $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à ses tangentes au point $x = 0$ et au point $x = -1$.