

Examen partiel d'avril 2001

Bonjour à toutes et à tous. Je vous rappelle que vous avez deux heures, et qu'aucun document n'est autorisé. Les exercices sont (mutuellement) indépendants et le barème, indicatif, est de huit points pour le premier et de douze points pour le second. Voilà, vous savez tout. Bon courage !

Exercice 1 (Principe de Précaution) Les laboratoires MadCow[©] ont mis au point un test pour dépister l'encéphalite spongiforme bovine (ESB). Les experts pensent que 20% des vaches sont atteintes par la maladie. De plus, des expériences ont montré que sur cinquante vaches folles qui passent le test, deux ne sont pas détectées, et que sur trente vaches saines qui passent le test, une est prise pour folle à tort.

1. Calculez la probabilité qu'une vache soit déclarée folle suite au test ;
2. Calculez la probabilité qu'une vache soit saine, sachant qu'elle a été déclarée folle suite au test.

Exercice 2 (En théorie, ça ne marche pas) Depuis qu'il est entré à la fac, Jean Némard a adopté une technique révolutionnaire pour préparer ses examens : il travaille peu pendant l'année et relit une petite partie de ses notes juste avant l'examen terminal. Dans son université, cet examen constitue la seule évaluation de l'année, et avec le système qu'il a adopté, Jean a une probabilité $0 < p < 1$ de réussite. On suppose que les performances de Jean aux examens au fil des ans sont (mutuellement) indépendantes.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'années d'études nécessaires à Jean pour l'obtention de la première année du DEUG. Déterminez la loi de X en fonction de p . Calculez explicitement $\mathbb{P}(\{X = n\})$ pour $p = 1/3$ et $n = 1, 2, 3$;
2. Calculez le nombre moyen d'années d'études, en fonction de p , nécessaires à Jean pour obtenir sa première année de DEUG. Calculez la variance de X en fonction de p . Donnez les valeurs explicites pour $p = 1/3$. Que pensez vous de la stratégie de Jean ?
3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'années d'études nécessaires à Jean pour obtenir le DEUG. Montrez que pour tout $n \geq 2$, on a

$$\mathbb{P}(\{Y = n\}) = (n - 1)p^2(1 - p)^{n-2};$$

4. Calculez la moyenne et la variance de Y (pour p quelconque).