

Corrigé indicatif de l'examen partiel d'avril 2001

Il y a parfois plusieurs façons de faire, mais ce sont la justesse, la rigueur et la clarté des réponses qui priment. Le nombre de points est indiqué en gras entre crochets pour chaque réponse.

Exercice 1 (Principe de Précaution - 8 points dont 4 pour la rédaction) On définit les événements suivants :

$A =$ «La vache est folle».

$B =$ «La vache est déclarée folle suite au test».

Les données de l'énoncé se traduisent alors comme suit : $\mathbb{P}(A) = 20/100$, $\mathbb{P}(B^c|A) = 2/50$ et $\mathbb{P}(B|A^c) = 1/30$.

1. **[2]** On cherche $\mathbb{P}(B)$. On a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c),$$

or $\mathbb{P}(B|A) = 1 - \mathbb{P}(B^c|A) = 48/50$, donc

$$\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(B^c|A))\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c) = \frac{48}{50} \frac{20}{100} + \frac{1}{30} \frac{80}{100} \approx 0,22.$$

2. **[2]** On cherche $\mathbb{P}(A^c|B)$. Or on a (formule de Bayes en fait)

$$\mathbb{P}(A^c|B) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)}{\mathbb{P}(B)} \approx 0,12.$$

Exercice 2 (En théorie, ça ne marche pas - 12 points) 1. (a) **[2]** X prend ses valeurs dans \mathbb{N}^* . Pour

$n \in \mathbb{N}$, l'événement $\{X = n\}$ correspond au cas où Jean réussit à l'examen de première année après avoir échoué $n - 1$ fois. On a donc, par indépendance des résultats aux examens au fil des années $\mathbb{P}(\{X = n\}) = (1 - p)^{n-1} p$ et X suit une loi géométrique de paramètre p ;

(b) **[1]** Pour $p = 1/3$, on trouve $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = 1/3 \approx 0,33$, $\mathbb{P}(\{X = 2\}) = 2/9 \approx 0,22$, et enfin $\mathbb{P}(\{X = n\}) = 4/27 \approx 0,15$;

2. (a) **[2]** Le nombre moyen d'années d'étude nécessaires à Jean pour obtenir sa première année de DEUG est donné par la moyenne (espérance mathématique) de X :

$$\mathbb{E}(X) = p \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = -p \frac{d}{dp} \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n = -p \frac{d}{dp} \left(-\frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p}.$$

(b) **[2]** Pour la variance, on a $\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Or

$$\mathbb{E}(X^2) = p \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1-p)^{n-1} = -p \frac{d}{dp} \sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^n = -p \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{p^2} \right) = \frac{(2-p)}{p^2}.$$

Donc $\mathbf{Var}(X) = (1-p)/p^2$.

(c) **[1]** Pour $p = 1/3$, on trouve une moyenne de 3 ans et une variance de 6 ans.

La stratégie de Jean n'est donc pas très indiquée, même si elle peut lui permettre d'avoir son année du premier coup avec une probabilité de $1/3$.

3. **[1]** Tout se passe comme si Jean jouait à pile ou face avec une probabilité de succès de p . Pour obtenir son DEUG en $n \geq 2$ années, il lui faut obtenir la première année puis la seconde. $\mathbb{P}(\{Y = n\})$ représente donc la probabilité d'apparition du deuxième succès au n -ième lancé. Pour cela, il faut un seul succès avant le n -ième lancé et un succès au n -ième lancé, donc $n - 2$ échecs. Or il y a $n - 1$ façons d'obtenir le premier succès avant le n -ième lancé, donc la probabilité cherchée est bien $(n - 1)p^2(1 - p)^{n-2}$ car les lancers sont indépendants.

4. (a) [1] On a, en dérivant plusieurs fois la somme géométrique

$$\mathbb{E}(Y) = p^2 \sum_{n \geq 2} n(n-1)(1-p)^{n-2} = \frac{2}{p}.$$

(b) [2] De même, on a

$$\mathbb{E}(Y^2) = p^2 \sum_{n \geq 2} n^2(n-1)(1-p)^{n-2} = \frac{2(3-p)}{p^2},$$

d'où enfin, $\mathbf{Var}(X) = 2(1-p)/p^2$.

Les calculs qui précèdent peuvent être évités en remarquant, comme l'ont d'ailleurs fait certains dans leur copie, que $Y - X$ et X ont la même loi et sont indépendantes, ce qui entraîne directement que $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(Y) = 2\mathbf{Var}(X)$.

— Fin —