Université Paul Sabatier Année 2001
Toulouse III **UE8 - Probabilité, feuille n°5**

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité f et soit $a > 0$. Montrer que $Y = aX$ est une variable aléatoire réelle admettant pour densité $g(x) = \frac{1}{a} f(\frac{x}{a})$.

Exercice 2
1. Pour quelle valeur de C la fonction $f(x) = \frac{C}{1+x^2}$ est-elle une densité de probabilité ?
   On considère alors X une variable aléatoire réelle admettant cette densité. On dit alors que X suit la loi de Cauchy.
2. Pour quelles valeurs de α $\mathbb{E}(|X|^\alpha)$ est-elle finie ?
3. Calculer la fonction de répartition F de X et son inverse G. Montrer que si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, alors $G(U)$ suit la loi de Cauchy.
   Remarque : Ce procédé est général et permet de simuler des lois dont on sait inverser la fonction de répartition grâce à la simulation d'une loi uniforme.

Exercice 3 Chacun sait que le temps de survie (en jours) d'une savonette est une variable aléatoire $T > 0$ dont la loi admet une densité de la forme $f(t) = \lambda^2 te^{-\lambda t}$. Une longue expérience indique que la moyenne $E(T)$ est de 20 jours. Calculer le paramètre λ ainsi que la fonction de répartition de la variable aléatoire T. Calculer la probabilité pour que la savonette dure plus de 30 jours sachant qu'elle est toujours là au bout de 10 jours.

Exercice 4 On appelle loi *gamma* de paramètres $a > 0$ et $p > 0$ la loi notée $G(a,p)$ dont la densité est de la forme suivante

$$f(t) = \begin{cases} C(a,p)e^{-at}t^{p-1} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Déterminer la constante $C(a,p)$ (rappel : $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$). Vérifier que la loi exponentielle est un cas particulier de la loi *gamma*.
2) Calculer les moments d'ordre k d'une loi *gamma*. Moyenne et variance ? (On pourra utiliser la formule $\Gamma(a+n)/\Gamma(a) = (a+n-1)\ldots(a+1)a$ valable pour tout réel $a \geqslant 0$ et tout entier n).
3) Calculer la transformée de Laplace de la loi $G(a,p)$. En déduire que la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi $G(a,p)$ est encore une loi *gamma* dont on précisera le paramètre. En particulier la somme de variables exponentielles indépendantes est une loi *gamma* (mais pas exponentielle).

Exercice 5 Soit $Z = (X,Y)$ une variable aléatoire vectorielle de $\mathbf{R}^2$ suivant la loi uniforme sur le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. Expliquer ce que celà signifie. Donner la densité de la loi de Z. Déterminer les lois marginales de Z (i.e. celle de X et Y) puis la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ et de Y sachant $\{X = x\}$. Les v.a. marginales X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 Un tireur à l'arc vise une cible dont on prendra le centre comme origine O du plan. La flèche touche le point M de coordonnées (X,Y), et on modélise l'habilité du tireur en supposant que X et Y sont indépendantes de même loi gaussienne centrée réduite.

1. Soit $T = (OM)^2 = X^2 + Y^2$ la variable aléatoire mesurant la distance au carré entre la flèche et le centre de la cible. Quelle est sa loi ?
2. Même question pour l'angle formé entre l'axe des abscisses et OM.