

**Exercice 1** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de BERNOULLI sur  $\{0, 1\}$  de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On pose

$$Y_n = X_n X_{n+1}; \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

1. Calculer les espérances et variances de  $S_n$  et  $V_n$ .
2. Calculer  $\mathbf{Cov}(S_n, V_n)$ .

**Exercice 2** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_n = \mathbb{P}(\{X = n\})$ . Soit  $p \in ]0, 1[$ . On effectue une suite d'expériences de BERNOULLI, indépendantes (et indépendantes de  $X$ ) de même paramètre  $p$ , dont le nombre est donné par  $X$  (c'est-à-dire que si  $X$  prend la valeur  $n$ , on effectue  $n$  expériences). On définit les variable aléatoire  $S$ , égale au nombre de succès, et  $E$ , égale au nombre d'échecs.

1. Déterminer les lois des couples  $(X, S)$ ,  $(X, E)$  et  $(S, E)$  en fonction de  $p$  et de  $(t_n)_n$ .
2. On suppose que  $X$  suit une loi de POISSON de paramètre  $\lambda$ .
  - (a) Déterminer les lois de  $S$  et de  $E$  (on trouvera des lois classiques).
  - (b) Étudier l'indépendance de  $E$  et  $S$ .

**Exercice 3** Un élément chimique émet des électrons pendant une période  $T$ . Le nombre d'électrons émis est une variable aléatoire  $Y$  qui suit une loi de POISSON de paramètre  $\lambda$ . Chaque électron a une probabilité  $p$  d'avoir un effet biologique (on dira qu'il est efficace). Soit  $Z$  la variable aléatoire égale au nombre d'électrons efficaces émis pendant une période  $T$ .

1. Déterminer la loi du couple  $(Y, Z)$ .
2. Déterminer la loi de  $Z$ . Calculer son espérance.

**Exercice 4** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\{X = n\}) = p(1-p)^n \quad \text{où } p \in ]0, 1[.$$

On note  $V$  la variable aléatoire égale au minimum de  $X$  et de  $Y$  et  $W$  celle égale à la différence  $X - Y$ .

1. Déterminer la loi du couple  $(V, W)$ . En déduire les lois de  $V$  et  $W$ .
2. Montrer que  $V$  et  $W$  sont indépendantes.
3. Réciproquement, soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , indépendantes et de même loi satisfaisant à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\{X = n\}) \neq 0.$$

Les variables aléatoires  $V$  et  $W$  sont définies comme précédemment.

Montrer que si  $V$  et  $W$  sont indépendantes alors  $X$  et  $Y$  suivent une loi géométrique sur  $\mathbb{N}$  dont on précisera le paramètre.

*Indication* : calculer de deux façons différentes

$$\frac{\mathbb{P}(\{X = n + 1\} \cap \{Y = n\})}{\mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y = n\})}.$$

**Exercice 5** Donner la densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi uniforme sur  $[a, b]$ . Mêmes questions pour  $X^2$  en supposant  $a > 0$ .

**Exercice 6** Le temps  $T$  qui sépare le passage de deux bateaux au large des récifs vers lesquels les naufrageurs guident leurs proies suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . On note  $T_n$  la variable aléatoire égale au temps qu'il faut attendre pour  $n$  bateaux.

1. Calculer l'espérance et la variance de  $T_n$ .

On note  $f_n$  la densité de probabilité de  $T_n$ , et  $F_n$  sa fonction de répartition.

2. Montrer que

$$f_{n+1}(t) = \lambda \int_0^t f_n(u) e^{-\lambda(t-u)} du.$$

En déduire que

$$f_n(t) = \lambda^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

3. Trouver une relation de récurrence entre  $F_{n+1}$  et  $F_n$ . En déduire  $F_n$ .

L'instant  $\tau$  étant fixé, on note  $X$  la variable aléatoire discrète égale au nombre de navires qui se sont déjà présentés à l'instant  $\tau$ .

4. Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = n\}) &= F_n(\tau) - F_{n+1}(\tau) \quad (n > 0) \\ \mathbb{P}(\{X = 0\}) &= 1 - F_1(\tau). \end{aligned}$$

5. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

*Rappel* : la densité de probabilité  $h$  de la somme de deux variables aléatoires indépendantes dont les densités  $f$  et  $g$  sont nulles pour  $x \leq 0$ , est définie par

$$h(t) = \int_0^t f(t-x)g(x) dx.$$