Université Paul Sabatier
Toulouse III

Année 2001
UE8 - Probabilité, feuille n˚3

Exercice 1 Figaro a deux coiffeuses : Rose et Marie. Le nombre de clientes de Rose et le nombre de clientes de Marie sont indépendants et suivent une loi de Poisson de moyennes respectives λ et μ .

1. Calculer le nombre moyen de clientes au total.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre total de clientes.
3. Sachant qu'il y a n clientes, calculer la probabilité pour que Rose en ait k.

Exercice 2 Chez les rois fainéants, les mariages consanguins ont développé un risque de stérilité. A partir de Clothaire 3 (noté 0), on note X le nombre de générations précédant l'extinction de la dynastie par stérilité. La loi de probabilité de la variable aléatoire X vérifie la propriété suivante, si on note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$:

$$3p_{n+2} = 4p_{n+1} - p_n$$

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Montrer que la fonction génératrice de X satisfait une équation fonctionnelle et en déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 3 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi sur $\{0,1,2\}$, définie par :

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{4}$$

Soit enfin $U = X+Y$ et $V = |X-Y|$.

1. Quelles sont les lois de U et V ?
2. Quelle est la loi du couple (U,V) ? Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
3. Calculer l'espérance et la variance de U et V.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire de carré intégrable. Montrer que

$$Var(X) = \inf_{c\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(X-c)^2\right]$$

et que cette borne inférieure est attaiente pour $c = \mathbb{E}[X]$.

Exercice 5 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est la loi uniforme sur l'ensemble $\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$. Déterminer les lois marginales de ce couple. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 On jette répétitivement une même pièce de monnaie, la probabilité de tomber sur pile étant p. Etant donné un entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction aléatoire T_n , nombre de jets nécessaires pour obtenir n piles à la suite. Calculer la fonction génératrice de T_n. En déduire l'espérance de T_n. Montrer que T_1 suit une loi classique. En est-il de même de T_n ?

Exercice 7 Soient X et Y deux variables aléatoires entières, indépendantes, avec pour deux constantes $0 < p < 1$, $0 < a < 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=1) &= 1-\mathbb{P}(X=0) = p \\ \mathbb{P}(Y=k) &= (1-a)a^k \quad (k\in\mathbb{N}) \end{aligned}$$

Soit U la variable aléatoire égale à 0 si $X = 0$, égale à Y si $X = 1$.

1. Calculer la fonction génératrice de U. Déterminer la loi de U, calculer son espérance et sa variance.

2. Calculer $\mathbb{P}(X=0|U=0)$ et $\mathbb{P}(X=1|U=0)$.

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire entière de fonction génératrice G et soit pour tout entier n : $a_n = \mathbb{P}(X>n)$. Montrer que la série entière $T(s)=\sum_{n\geqslant 0} a_n s^n$ est convergente pour $|s|<1$ et vaut :

$$T(s)=\frac{1-G(s)}{1-s}$$

En déduire que si X est de carré intégrable, alors $\mathbb{E}[X]=T(1)$ et $Var(X)=2T'(1)+T(1)-T(1)^2$. Vérifier vos résultats dans le cas où X suit une loi géométrique de paramètre $0<p<1$.

Exercice 9 On choisit au hasard deux nombres distincts parmi les entiers compris entre 1 et n (avec $n\geqslant 3$). On note R_1 le premier nombre choisi, R_2 le second, X le plus grand des deux nombres, Y le plus petit des deux.

1. Construire un modèle probabiliste de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer les lois des couples (R_1,R_2) et (R_2,R_1).
3. En déduire que les variable aléatoire R_1 et R_2 ont même loi et la calculer.
4. Déterminer la loi de X.
5. Déterminer la loi de (X,Y).
6. Déterminer la loi de Y , sachant $X=x$.