Université Paul Sabatier Année 2001
Toulouse III **UE8 - Probabilité, feuille n°2 bis**

Exercice 1 Deux usines (I et II) fabriquent des trotinettes. Le taux de fabriquation d'objets défectueux est de 20% pour l'usine I et de 5% pour l'usine II. L'usine I fabrique deux fois plus de trotinettes que l'usine II.

1. Quelle est la probabilité d'acheter une trotinette cassée ?
2. Quelle est la probabilité qu'une trotinette provienne de l'usine I sachant qu'elle est cassée ?

Exercice 2 On a volé la Joconde. Deux ans plus tard, en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve Mona Lisa. Un doute plane sur l'authenticité de la toile retrouvée. On estime à 80% la probabilité pour que ce soit celle que Léonard a peinte. On consulte alors deux expert en peinture de la Renaissance. Le premier, qui se trompe une fois sur cinq, déclare que le tableau est authentique. Le deuxième, qui se trompe deux fois sur onze, annonce que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes. Calculer la probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique.

Exercice 3 On note $S_n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Calculer par recurrence S_n^1, S_n^2 et S_n^3.

Indication : on pourra sommer les relations

$$(k+1)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i k^i \,.$$

Exercice 4 Calculer les sommes suivantes en précisant pour valeurs de x elles sont valables :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\,, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

En déduire pour tout $p \in]0,1[$ et tout $\lambda > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp^k\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p^k\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} s^k p^k\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} s^k\frac{\lambda^k}{k!}\,.$$

Université Paul Sabatier Année 2001
Toulouse III **UE8 - Probabilité, Devoir maison**

Exercice 1 Est-il plus fréquent d'obtenir un 6 en lançant quatre fois un dé que d'obtenir une paire de 6 en lançant 24 fois deux dés ?

Proposer un modèle probabiliste pour chaque expérience.

Exercice 2 On note S_n^p le nombre d'applications surjectives d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de p éléments ($p \leqslant n$).

1. Déterminer S_n^1 et S_n^2.
2. Calculer le nombre d'applications d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.
3. En regroupant les applications dont les images ont même cardinal, montrer que $\sum_{k=1}^{p} C_p^k S_n^k = p^n$.
4. Au pays de Lilliput, il y a trois types de comportement devant les œufs. Une personne sur trois les mange durs alors que deux sur trois les mangent à la coque. Parmi les amateurs d'œufs à la coque, il y a autant de grosboutistes qui les mangent par le gros bout, que de petitboutistes qui les mangent par le petit bout. Considérons un échantillon de n personnes, prisent indépendamment et avec remise. Calculer la taille minimum de l'échantillon pour qu'il contienne au moins une personne de chaque type avec une probabilité supérieure à $0,95$.

Exercice 3 Le 14 juillet, à Saint Troupaize, il fait beau sept fois sur dix. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévisions météorologiques indépendantes :

– la météo nationale, qui se trompe un fois sur cinquante,
– une grenouille verte, qui se trompe une fois sur vingt.

La météo annonce de la pluie alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. Déterminer le temps le plus probable.

Indication : on pourra considérer la Joconde.