

Exercice 1 Montrer que lorsque l'on tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes, la couleur et la valeur sont indépendantes.

Exercice 2 La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent chacune l'héritier de leur duché.

1. Calculer la probabilité de pouvoir faire une alliance en mariant les deux enfants attendus.
2. Montrer que les événements suivants sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants :
 - « l'héritier d'Aquitaine est un garçon »
 - « l'héritier de Bourgogne est un garçon »
 - « les deux héritiers sont de même sexe ».

Exercice 3 Grand-papa a trois bérets et une casquette. Quand il va acheter le pain, il saisit un couvre-chef au hasard. Sachant qu'il achète une fois sur trois une baguette moulée et que deux fois sur cinq, il oublie de chausser ses souliers, calculer la probabilité qu'il remonte en charentaises, un béret sur la tête et une baguette non moulée sous le bras.

Exercice 4 Vincent, François et Paul sont trois chasseurs à adresse variable. Vincent fait mouche sept fois sur dix, François une fois sur deux et Paul une fois sur dix. Les trois chasseurs tirent simultanément sur le même lapin.

1. Construire un modèle probabiliste pour cette expérience aléatoire, en précisant la dépendance des événements.
2. Calculer les probabilités que le lapin soit touché, que seul Paul ait touché le lapin, que le lapin soit touché sachant que Paul l'a raté.

Exercice 5 En Belgique, on mange deux types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites new-look à section hexagonale. Parmi les frites que consomment les Flamands, il y a 65% de frites traditionnelles alors que les Wallons en mangent 75%. L'équipe de Belgique de football (les fameux « Diables rouges ») est composée de sept Flamands et quatre Wallons. Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites hexagonales. Calculer la probabilité pour qu'il soit flamand.

Exercice 6 Monsieur le curé fait sa visite au château, comme chaque mercredi, après les Vêpres. Sa 2CV est équipée d'essuie-glace dont le moteur tombe en panne un voyage sur dix. La commande manuelle fonctionne une fois sur trois. A cette époque de l'année, il pleut trois fois sur quatre.

1. Calculer la probabilité pour que la baronne le voit arriver dans la cour du manoir en actionnant ses essuie-glace d'une main et tenant son volant de l'autre.
2. Sachant qu'il pleut, calculer la probabilité pour qu'il soit obligé de terminer son chemin à pied, sous son parapluie.

Exercice 7 Aux États-Unis, les travailleurs pouvaient se délasser le soir en regardant le jeu suivant. Le candidat, qui est face à trois portes derrière lesquelles sont cachés deux sucettes et un chèque énorme, désigne sans qu'elle soit ouverte une des trois portes. Puis l'animateur dévoile une sucette en ouvrant une des deux autres portes. Le candidat a alors la possibilité d'ouvrir la porte qu'il avait sélectionnée ou de choisir l'autre. Quelle stratégie est la plus payante ?

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire discrète ne pouvant prendre que les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de X sachant que :

$$\mathbb{P}(X < 5) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X > 5) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{P}(X = 4).$$

Calculer son espérance $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 9 L'arracheur de dents arrache les dents de ses patients au hasard. Les clients ont une dent malade parmi les trente deux qu'ils possèdent avant l'intervention des tenailles du praticien. On considère les dix premiers clients, en notant X le nombre de dents malades extraites à bon escient.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X . Calculer la probabilité pour qu'aucun de ces patients n'y laisse la dent malade.
2. Combien doit-on traiter de personnes pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0,6 ?

Exercice 10 Panurge est sur un bateau qui transporte $n + 1$ moutons appartenant à un marchand de Taillebourg, nommé Dindenault. Deux des moutons sont noirs. Panurge choisit un beau gros mouton blanc, l'achète et le jette en pleine mer. Tous les autres moutons le suivent à la file, jusqu'au dernier.

On note X le rang (derrière le mouton de Panurge), du premier mouton noir à sauter à la mer. Établir la loi de probabilité de X , calculer son espérance $\mathbb{E}(X)$.

On note Y le rang du deuxième mouton noir à se précipiter par dessus bord. Donner la loi de Y , calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 11 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On considère les deux événements $E = \ll X \text{ est paire} \gg$ et $F = \ll X \text{ est impaire} \gg$. Montrer que

$$\mathbb{P}(E) > \mathbb{P}(F).$$

Exercice 12 Soit a un nombre réel et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

Déterminer a , puis calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 13 Pierre est distrait : quand il s'arrête pour prendre de l'essence, il repart sans sa passagère, descendue pour aller payer, avec une probabilité p . Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étapes que Pierre parcourt avec sa passagère.

1. Établir la loi de probabilité de X . Calculer l'espérance et la variance de X .
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Si $p = 1/5$, quel est le nombre maximum d'étapes que peut comporter le voyage pour que la passagère arrive à destination dans la voiture de Pierre avec une probabilité supérieure à 0,6 ?

Si Pierre est accompagné de deux amies, et que Y désigne le nombre d'étapes que Pierre parcourt accompagné, établir la loi de Y , son espérance et sa variance.

Exercice 14 Les chasseurs tuent en moyenne cinq vaches par an. Le nombre de ces vaches prises pour des lapins suit une loi de Poisson. Calculer la probabilité pour qu'il ne dépasse pas sept. Quelle est la probabilité d'avoir une année sans victime (bovine) ?

Exercice 15 Le nombre de blessés à l'œil par un bouchon de champagne arrivant aux urgences ophtalmologiques de Ranguel la nuit de la Saint Sylvestre suit une loi de Poisson de moyenne six. Sachant que les victimes potentielles sont réparties équitablement entre les deux sexes, on note X le nombre de femmes qui figurent parmi ces éborgnés du Jour de l'An et Y le nombre d'hommes.

1. Établir les lois de probabilité de X et Y , préciser leurs espérances et leurs variances.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes.
3. Calculer la probabilité pour qu'il y ait autant d'hommes que de femmes admis aux urgences.

(On suppose que l'interne de garde, ne fait pas partie des victimes.)