Université Paul Sabatier Année 2001
Toulouse III **UE8 - Probabilité, feuille n˚1**

Exercice 1 Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$. Donner l'écriture ensembliste des événements suivants :

1. Au moins un des A_i est réalisé ;
2. Aucun des A_i n'est réalisé ;

Explicitez ces événements lorsque $\Omega = \mathbb{R}$ et $A_i = [1/i, 1+1/i]$.

Exercice 2 Soit $(A_n, n \in \mathbb{N})$ une suite d'événement. Interpréter les événements suivants donnés par leur écriture ensembliste :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geqslant n} A_m \ , \ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant n} A_m.$$

De même que dans l'exercice précédent, explicitez ces événements lorsque $A_i = [1/i, 1+1/i]$.

Exercice 3 Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une algèbre sur Ω. Montrez que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre.

Exercice 4 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B des événements. Montrez que

1. Si $\mathbb{P}(A) = 1$ alors $\mathbb{P}(B \backslash A) = 0$;
2. Si $\mathbb{P}(A) = 0$ alors $\mathbb{P}(B \cap A) = 0$ et $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B)$.
3. Soit $(A_n, n \in \mathbb{N})$ une suite croissante d'événements, i.e. $A_0 \subset A_1 \subset \cdots A_n \subset \cdots$. Montrez que
$$\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mathbb{P}(A_n)$$
De même, montrez que si $(B_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite décroissante d'événements, i.e. $B_0 \supset B_1 \supset \cdots B_n \supset \cdots$, alors
$$\mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim_{n\to\infty} \downarrow \mathbb{P}(B_n)$$

Exercice 5 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A, B, C des événements (i.e. des éléments de $\mathcal{F}$). Démontrez la formule de «Poincaré» suivante :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Plus généralement, on peut démontrer la formule suivante pour des événements $A_1, \dots, A_n$:

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$

Exercice 6 Combien y a-t-il (en base 10)

1. de nombres de r chiffres au plus ?
2. de nombres de r chiffres exactement ?
3. de nombres de r chiffres exactement formés de chiffres différents ?

Exercice 7 On tire d'un seul coup 5 cartes parmi les 32 cartes d'un jeu. Déterminez

1. le nombre de mains possibles ;
2. le nombre de mains contenant exactement une paire ;
3. le nombre de mains contenant une séquence de 5 cartes d'une seule couleur ;
4. le nombre de mains contenant exactement 2 rois ou exactement 3 dames.

Exercice 8 On note $N_n = \{1, \dots, n\}$.

1. Combien y a-t-il de couples (A, B) de sous-ensembles de N_n dont la réunion est N_n ?

2. Même question avec A et B disjoints ?

Exercice 9 On jette un dé au hasard. Calculez la probabilité d'obtenir un 5 (construire un modèle probabiliste et traduire la question posée en termes du calcul de la probabilité d'un événement).

Exercice 10 Proposez un modèle probabiliste pour les expériences aléatoires suivantes :

1. Jet de deux dés discernables ;
2. Jet de deux dés indiscernables ;
3. Tirage d'une boule dans une urne contenant quatre boules blanches et deux boules rouges, les boules de même couleur étant indiscernables ;
4. Tirage simultané de deux boules sans remise dans les mêmes conditions.

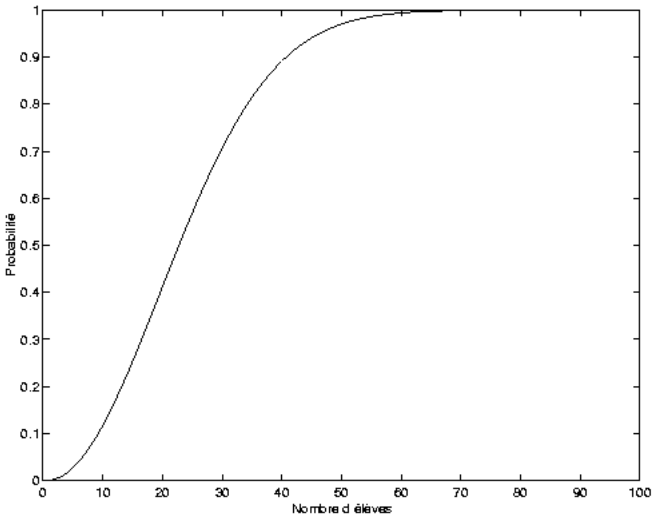
Exercice 11 (Problème de Galilée) Le prince de Toscane demande un jour à Galilée : «Pourquoi lorsqu'on jette trois dés obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces deux sommes soient obtenues de six façons différentes ?» (construire un modèle probabiliste et traduire la question posée en terme du calcul de la probabilité d'un événement).

Exercice 12 Une urne contient N boules noires et B boules blanches. On effectue T tirages et on suppose que $T \geqslant N+B$. Soit A_k l'événement «il a fallu k tirages pour tirer une boule noire». Calculer la probabilité des A_k :

- lorsque les tirages sont avec remise ;
- lorsque les tirages sont sans remise.

Vous devez bien sûr préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ choisi et à quelle partie de Ω correspond A_k. Que se passe-t-il si l'on suppose que le nombre T de tirages effectués est infini ?

Exercice 13 On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles. Calculez la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. À partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? À 0.8 ? Comment interpréter ce résultat ?



Pour estimer par le calcul la probabilité recherchée, on peut utiliser l'encadrement suivant, pour $0 < x < 1$:

$$-x - \frac{x^2}{2(1-x)} \leqslant \log(1-x) \leqslant -x - \frac{x^2}{2}$$

et la formule de sommation des premiers carrés

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(2n-1)(n-1)}{6} \sim \frac{n^3}{3}.$$