Feuille de TD : Intégrales multiples

MIA6. Second semestre 1998-1999, semaines 10-11.

Exercice -1 : Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$ pour $i \in [0,n]$. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) f'(x_i).$$

Exercice 0 : Soit f une fonction positive, Riemann-intégrable sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, telle que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Montrer que $\frac{1}{1+f}$ est Riemann-intégrable, et calculer son intégrale sur $[a,b]$.
(indication : $\int_a^b \frac{dx}{1+f(x)} - \int_a^b dx$).

Exercice 1 : Soit $D = [0,1]^2$. Calculer :

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}.$$

Exercice 2 : Soit C le cercle de centre (0,1) et rayon 1 du plan. Calculer :

$$\iint_C (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Exercice 3 : Soit $D = \{x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, x^2+y^2-2y \geqslant 0,\, x^2+y^2-1 \leqslant 0\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Exercice 4 : Soit $D = \{(x^2+y^2)^2 \leqslant xy\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy.$$

Exercice 5 : Soit $a > 0$ et D le domaine du plan délimité par la courbe $\rho = a(1+\cos\theta)$. Quelle est l'aire de D ? Quel est le centre de gravité de D ?

Exercice 6 : Soient $0 < a \leqslant b$, $0 < c \leqslant d$, et $D = \{ax^2 \leqslant y \leqslant bx^2,\, \frac{c}{x} \leqslant y \leqslant \frac{d}{x}\}$. Quelle est l'aire de D ?
(indication : poser $u = \frac{y}{x^2}$ et $v = xy$).

Exercice 7 : Soit $p > 0$ et $D = \{y^2 - 2px \leqslant 0,\, x^2 - 2py \leqslant 0\}$. Calculer :

$$\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy.$$

(indication : poser $x = u^2 v$ et $y = uv^2$).

Exercice 8 : Soit $R > 0$, $D_R = \{x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ x > 0,\ y > 0\}$, et $K_R = [0, R]^2$. Montrer que :

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leqslant \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leqslant \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

En déduire l'existence et la valeur de :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-t^2}\, dt.$$

Exercice 9 : Soient $a, R > 0$. Dans le plan $(y\mathrm{O}z)$, soit C le cercle de centre $(0,a,0)$ et de rayon R. En tournant autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$, C engendre un tore T. Calculer le volume délimité par T.

Exercice 10 : Quel est le volume délimité par deux cylindres de révolution d'axes $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$, et de même rayon $R > 0$?

Exercice 11 : Soit $D = \{x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 + y^2\}$. Calculer le volume de D.

Exercice 12 : Soit $D = \{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x + y + z \leqslant 1\}$. Calculer :

$$\iiint_D \frac{dx\, dy\, dz}{(1 + x + y + z)^3}.$$