Université Paul Sabatier Année 2001
Albi et Toulouse III **– Seconde année - Probabilité**

Examen de juin 2001

Bonjour à tous. Vous disposez de deux heures, aucun document n'est autorisé. Le problème et l'exercice sont (mutuellement) indépendants. Un effort de clarté et d'argumentation sera apprécié.
Bon courage !

Problème 1 Les questions du problème qui suit ne sont pas indépendantes, mais il n'est pas nécessaire de connaître les réponses à une question pour traiter les suivantes (sauf la dernière). Dans tout le problème, si X est une v.a. absolument continue (à densité), f_X désigne la densité de la loi de X, et F_X désigne sa fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$.

On considère deux ampoules électriques d'un modèle identique dont les durées de vie sont modélisées par les variables aléatoires T_1 et T_2 supposées indépendantes et de même loi. Cette loi est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ dont on rappelle la densité :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculez la moyenne, la variance et la fonction de répartition $F(t)$ de la variable aléatoire T_1.
2. On suppose que l'on allume les deux ampoules simultanément. Soit $Z = \max(T_1, T_2)$ la v.a. donnant le temps pendant lequel une au moins des deux ampoules reste allumée.
   (a) Exprimez la probabilité $\mathbb{P}(Z \leqslant t)$ en fonction de $F(t)$. En déduire que la densité f_Z de la loi de Z est égale à :
   $$f_Z(t) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (b) Calculez alors la moyenne de Z.
3. On suppose à présent que l'on allume successivement les ampoules : dès que la première ampoule s'éteint, un commutateur allume la seconde.
   (a) On suppose que le commutateur est parfait. Le temps d'éclairage est donc modélisé par la v.a. $U = T_1 + T_2$. Donnez la moyenne et la variance de U.
   (b) En réalité le commutateur n'a qu'une probabilité p de fonctionner i.e. lorsque la première ampoule s'éteint, la seconde ne s'allume qu'avec la probabilité p. On note H l'événement «le commutateur fonctionne», qu'on suppose indépendant des variables T_1 et T_2. Soit V la v.a. égale au temps d'éclairage.
   Ecrivez la variable V en fonction de T_1, T_2 et de l'indicatrice de H.
   Donnez l'espérance de V en fonction de λ et p.
   Donnez l'expression de la fonction de répartition F_V en fonction de F, F_U et p.
   Exprimez alors la densité f_V en fonction de f, f_U et p.
   (c) En comparant le temps d'éclairage moyen, pour quelles valeurs de p, l'allumage simultané est-il meilleur que l'allumage successif ?

Exercice 1 Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.

On considère un loft contenant de jeunes hommes et de jeunes femmes. La proportion d'hommes est égale à p (et celle des femmes vaut $1-p$). Tous les jours, on «confesse» un des habitants au hasard. On obtient ainsi une suite de H et de F où H représente la confession d'un homme et F celle d'une femme. On définit alors les deux variables aléatoires X et Y de la manière suivante : pour tout i, j dans $\mathbb{N}^*$,

$$X = i \quad \text{et} \quad Y = j$$

si et seulement si les $i + j + 1$ premières confessions sont, dans l'ordre,

$$\underbrace{H\ldots H}_{i\,fois}\underbrace{F\ldots F}_{j\,fois}H \quad \text{ou} \quad \underbrace{F\ldots F}_{i\,fois}\underbrace{H\ldots H}_{j\,fois}F\,.$$

1. Déterminez la loi de X.
2. Calculez l'espérance de X.
3. Montrez que la loi du couple (X,Y) est donnée par :

$$\mathbb{P}(X=i,Y=j)=p^{i+1}(1-p)^j+(1-p)^{i+1}p^j \quad \text{pour } i,j\in\mathbb{N}^*.$$

4. En déduire la loi de Y.
5. Montrez que si $p=1/2$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Est-ce encore le cas si p est différent de $1/2$? B

On supposera que le loft ne contient pas de piscine !

— Fin —