Université Paul Sabatier Année 2001
Albi et Toulouse III **DEUG MIAS – Seconde année – Probabilité**

Correction indicative de l'examen de juin 2001

Comme d'habitude, il y a parfois plusieurs façons de faire, mais ce sont la justesse, la rigueur, la concision et la clarté des réponses qui priment. Le nombre de points est indiqué en gras entre crochets pour chaque réponse.

Problème 1 [13 points] Ce problème concerne la loi exponentielle, étudiée en cours et en TD pendant le semestre.

1. Il s'agit de redémontrer (et non pas seulement de rappeler...) que la moyenne et la variance de la loi exponentielle de paramètre λ valent $1/\lambda$ et que la fonction de répartition vaut $F(t) := (1-\exp(-\lambda t))\,1_{\{t\geqslant 0\}}$. Cf. cours & TD pour les détails ! **[2]**
2. (a) Pour tout t dans $\mathbb{R}$, on a :

$$F_Z(t) := \mathbb{P}(Z \leqslant t) = \mathbb{P}(T_1 \leqslant t, T_2 \leqslant t) \overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(T_1 \leqslant t)\,\mathbb{P}(T_2 \leqslant t) = F(t)^2.\textbf{[1]}$$

   F_Z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}(Z)$ admet pour densité

$$f_Z(t) := F_Z'(t) = 2F(t)F'(t) = 2F(t)\,f(t),$$

   qui donne la formule demandée **[1]**.

   (b) Par intégration par parties, on trouve que $\mathbb{E}(Z) = 3\lambda/2$ **[1]**.
3. (a) Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T_2) = 2/\lambda$ et par indépendance de T_1 et T_2, on a $\mathbb{V}(U) = \mathbb{V}(T_1) + \mathbb{V}(T_2) = 2/\lambda$. **[1,+1 si cette méthode pour la variance]**

   (b) On a : $V := T_1 + 1_{\mathrm{H}}\,T_2$ **[1,5]**, et

$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(1_{\mathrm{H}}\,T_2) \overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(1_{\mathrm{H}})\,\mathbb{E}(T_2) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{P}(H)\,\mathbb{E}(T_2) = (1+p)/\lambda.\textbf{[1,5]}$$

   D'autre part :

$$\begin{aligned}
F_V(t) :&= \mathbb{P}(V \leqslant t)\\
&= \mathbb{P}(\{V \leqslant t\} \cap H) + \mathbb{P}(\{V \leqslant t\} \cap H^c)\\
&= \mathbb{P}(\{V \leqslant t\}\,|\,H)\,\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(\{V \leqslant t\}\,|\,H^c)\,(1-\mathbb{P}(H))\\
&= p\,\mathbb{P}(U \leqslant t) + (1-p)\,\mathbb{P}(T_1 \leqslant t)\\
&= p\,F_U(t) + (1-p)\,F(t).\textbf{[1,5]}
\end{aligned}$$

   On a enfin :

$$f_V(t) := F_V'(t) = p\,f_U(t) + (1-p)\,f(t).\,\textbf{[0,5]}$$

   (c) La fonction $p \in [0,1] \mapsto \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(U) := 3\lambda/2 - (1+p)/\lambda$ est strictement décroissante et ne s'annule que pour $p = 1/2$. L'allumage simultané est donc meilleur (en moyenne) que l'allumage successif pour $p \leqslant 1/2$, ce qui correspond bien, qualitativement du moins, à l'intuition. **[1]**

Exercice 1 [8,5+2 points] On note $q := 1-p$ et $\mathcal{L}(Z)$ la loi d'une v.a. Z. On peut remarquer qu'étant donnée la définition sexuellement symétrique de X, on peut s'attendre à trouver des formules tout aussi symétriques en p et q pour $\mathcal{L}(X)$ et $\mathbb{E}(X)$. Il y avait une petite coquille dans l'énoncé (omission d'un *). Aussi, le barème tient compte de cette difficulté supplémentaire de l'exercice en récompensant la manifestation d'un esprit critique et en tolérant des sommations mal «initialisées»...

1. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(X = i) = p^i q + q^i p$. Et oui, pour que X vale i, il faut soit i hommes puis une femme, soit l'inverse :

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(\underbrace{H\cdots H}_{i\text{ fois}}F \text{ ou } \underbrace{F\cdots F}_{i\text{ fois}}H) \underset{\text{disj.}}{=} \mathbb{P}(\underbrace{H\cdots H}_{i\text{ fois}}F) + \mathbb{P}(\underbrace{F\cdots F}_{i\text{ fois}}H) \underset{\text{indép.}}{=} p^i q + q^i p.\textbf{[1]}$$

2. En utilisant la formule de sommation géométrique, il vient

$$\mathbb{E}(X) = q\sum_{k=1}^{+\infty} kp^k + p\sum_{k=1}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{p} + \frac{p}{q} = \frac{q^2+p^2}{pq}.\,\textbf{[2]}$$

3. Pour tout $i, j \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\{X = i\,, Y = j\}$ correspond à l'un des deux cas disjoints suivants :

$$\underbrace{H\cdots H}_{i\text{ fois}}\underbrace{F\cdots F}_{j\text{ fois}}H \quad \text{ou} \quad \underbrace{F\cdots F}_{i\text{ fois}}\underbrace{H\cdots H}_{j\text{ fois}}F.$$

   Ces deux cas étant disjoints, on a donc bien la formule demandée par addition de leur probabilité puis utilisation de l'indépendance du sexe des confessions successives, comme dans le calcul de $\mathcal{L}(X)$. **[1]**

4. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i\,, Y = j) = p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}$. **[1,5]**
5. Les v.a. X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $i, j \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(X = i\,, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = j).$$

Les expressions des lois $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(Y)$ et $\mathcal{L}(X,Y)$ obtenues dans les questions précédentes permettent alors d'affirmer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $p = 1/2$. En effet, on a :

$$\mathbb{P}(X = i\,, Y = j) = p^{i+1} q^j + q^{i+1} p^j,$$

et

$$\mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = j) = p^{i+2} q^j + q^{i+2} p^j + p^3 q^{i+j-1} + q^3 p^{i+j-1}.$$

Donc en utilisant le fait que $p + q = 1$, il vient :

$$\mathbb{P}(X = i\,, Y = j) - \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = j) = -p^3 q^{i+j-1} - q^3 p^{i+j-1} + q^{i+1} p^{j+1} + q^{j+1} p^{i+1}.$$

On remarque alors que cette expression est nulle pour $p = 1/2$. **[1]**
D'autre part, pour $i = j = 1$, elle vaut :

$$-p^3 q - q^3 p + 2q^2 p^2 = pq(2pq - q^2 - p^2) = pq(2pq - q^2 - p^2) = -pq(p - q)^2 = p(p-1)(1-2p)^2,$$

qui ne s'annulle que pour $p = 1/2$ lorsque $p \in]0,1[$. **[2]**

—— Fin (et bonnes vacances...) ——