MIA3 second semestre 98/99 – Série numéro 4 – Séries entières et de Fourier

Cette série d'exercices est prévue pour 2 semaines de TD.

1 Séries entières

Exercice 1
Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{ch}(na) x^n \text{ pour } a > 0.$$

Exercice 2
Déterminer le développement en série entière en 0 de $f(x)$ en précisant le rayon de convergence dans les cas suivant :
a) $f(x) = \mathrm{Argsh}(x)$.
b) $f(x) = \dfrac{5}{x^4 - 13x^2 + 36}$.
c) $f(x) = \log(1 + x - 2x^2)$.

Exercice 3
1) Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $x \to \frac{1}{1+x^2}$.
2) En déduire le développement en série entière de la fonction $x \to \mathrm{Arctg}(x)$ en précisant le rayon de convergence.
3) En utilisant le théorème des séries alternées, montrez que cette série converge uniformément sur $[-1, 1]$ et en déduire, en le justifiant, la valeur de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 4
Déterminer les solutions analytiques de l'équation différentielle

$$xy'' + 2y' = -\frac{2x^3}{(1+x^2)^2}.$$

Exercice 5
Soit r un entier naturel fixé. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} C_{n+r}^n x^n$. (Écrire C_{n+r}^n sous la forme $\dfrac{(n+r)\cdots(n+1)}{r!}$ et penser à la dérivation des séries entières).

2 Séries de Fourier

Exercice 6
Montrer que si f est une fonction 2π-périodique continue par morceaux, alors pour tout réels a et b

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_b^{b+2\pi} f(t)dt.$$

En particulier, les coefficents de Fourier peuvent être calculés sur tout intervalle de longueur 2π :

$$c_n(f) = \int_x^{x+2\pi} f(t)e^{-int}dt = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

Exercice 7
Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f 2π-périodique donnée sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$.

Exercice 8
Développer en série de Fourier la fonction de période 2π définie sur $[-\pi, \pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \\ \pi + x & \text{si} \quad -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

et en déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 9
Calculer et étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f 2π-périodique donnée sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$. En déduire la somme de la série alternée $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Exercice 10
Soit α un réel tel que $0 < \alpha < \pi$ et f_α la fonction 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \pi - \alpha \leq x \leq \pi + \alpha \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Faire la représentation graphique de $f_{\pi/2}$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2) Calculer la série de Fourier associée à f_α et énoncer un résultat de convergence.
3) En déduire la valeur de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$.
4) Retrouver en particulier la valeur de la série de l'exercice 3.