

Corrigé du devoir n°2

Exercice 6 Feuille 4

Pour alléger la correction, les changements de variables ($u = \lambda t$) et les intégrations par parties (IPP) sont indiqués au-dessus des égalités où on les utilise

1. La variable aléatoire T_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ dont la densité est égale à

$$f_1(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc

$$\mathbb{E}(T_1) = \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} dt \stackrel{IPP}{=} \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda},$$

et

$$\mathbb{E}(T_1^2) \stackrel{IPP}{=} 2 \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda} \mathbb{E}(T_1) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Donc l'espérance de T_1 vaut $1/\lambda$ et sa variance $1/\lambda^2$.

La variable aléatoire T_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ . Donc l'espérance de T_n vaut n/λ et sa variance n/λ^2 .

2. La variable aléatoire T_{n+1} s'écrit comme la somme de T_n et d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ indépendante de T_n . D'après le rappel, la densité de la loi de T_n s'écrit donc

$$f_{n+1}(t) = \lambda \int_0^t f_n(u) e^{-\lambda(t-u)} du.$$

Faisons l'hypothèse de récurrence suivante :

$$f_n(t) = \lambda^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

L'hypothèse est vraie au rang 1. Supposons que qu'elle soit vraie au rang n . On a alors

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) &= \lambda^{n+1} \int_0^t \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t-u)} du = \lambda^{n+1} e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} du \\ &= \lambda^{n+1} \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

l'hypothèse est donc vraie au rang $n+1$.

3. En utilisant la définition de la fonction de répartition et l'expression de f_{n+1} , on a

$$\begin{aligned} F_{n+1}(t) &= \int_0^t f_{n+1}(u) du = \int_0^t \lambda^{n+1} \frac{u^n}{n!} e^{-\lambda u} du \\ &\stackrel{IPP}{=} \lambda^n \left[-\frac{u^n}{n!} e^{-\lambda u} \right]_0^t + \lambda^n \int_0^t \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u} du \\ &= -\lambda^n \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t} + F_n(t). \end{aligned}$$

La fonction de répartition de T_1 est égale à

$$F_1(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} du = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Avec la relation de récurrence entre F_n et F_{n+1} , on en déduit que

$$\begin{aligned} F_n(t) &= -\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} + \dots + \lambda t e^{-\lambda t} + F_1(t) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \right]. \end{aligned}$$

4. Le plus simple est de remarquer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\{X \neq n\} = \{X \leq n-1\} \cup \{X \geq n+1\} = \{\tau \leq T_n\} \cup \{\tau \geq T_{n+1}\}$$

et que la réunion est disjointe. Passons aux probabilités

$$\mathbb{P}(X \neq n) = \mathbb{P}(\tau \leq T_n) + \mathbb{P}(\tau \geq T_{n+1}) = 1 - \mathbb{P}(T_n < \tau) + \mathbb{P}(T_{n+1} \leq \tau).$$

Donc, la probabilité cherchée est

$$\mathbb{P}(X = n) = 1 - \mathbb{P}(X \neq n) = \mathbb{P}(T_n < \tau) - \mathbb{P}(T_{n+1} \leq \tau) = F_n(\tau) + F_{n+1}(\tau).$$

Enfin, $\{X = 0\} = \{\tau < T_1\}$ donc $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - F_1(t)$.

5. Les questions précédentes donnent

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

La variable aléatoire X suit donc une loi de POISSON de paramètre λt .

Exercice 15 Feuille 2

D'après l'énoncé, la loi de X sachant que le nombre total (noté T) de blessés est égal à n suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

1. La variable aléatoire X est à valeurs dans \mathbb{N} . Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k \text{ et } T = k+l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k | T = k+l) \mathbb{P}(T = k+l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} C_{k+l}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^l e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!} \\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{2^n n!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^l}{l!} = e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!}.\end{aligned}$$

La loi de X est une loi de POISSON de paramètre $\lambda/2$. Il en est de même pour la loi de Y .

2. Pour tous $k, l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = l) &= \mathbb{P}(X = k \text{ et } T = k+l) \\ &= C_{k+l}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^l e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda/2)^{k+l}}{k! l!} = \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = l).\end{aligned}$$

Les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes.

- 3.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)^2 \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{k!^2}.\end{aligned}$$

Exercice 6 Feuille 3

- Si $k < n$, $P(T_n = k) = 0$;
- Si $k = n$, $P(T_n = k) = p^n$;
- Si $k > n$,

$$P(T_n = k) = P(X_k = 1, \dots, X_{k-n+1} = 1, X_{k-n} = 0, T_n > k - n - 1).$$

Ces v.a. sont indép., d'où

$$P(T_n = k) = p^n(1-p) \left(1 - \sum_{l=0}^{k-n-1} P(T_n = l) \right).$$

Fonction génératrice :

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(T_n = k) = s^n p^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} s^k (1-p) p^n \left(1 - \sum_{l=0}^{k-n-1} P(T_n = l) \right) \\ &= s^n p^n + (1-p) p^n \left(\frac{s^{n+1}}{1-s} - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l+n+1}^{\infty} s^k P(T_n = l) \right) \\ &= s^n p^n + (1-p) p^n \frac{s^{n+1}}{1-s} - (1-p) p^n \frac{s^{n+1}}{1-s} G_n(s), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \frac{s^n p^n + s^{n+1} p^n s^{n+1} / (1-s)}{1 + (1-p) p^n s^{n+1} / (1-s)} \\ &= \frac{(1-p) s^{n+1} p^n + (1-s) s^n p^n}{1-s + (1-p) p^n s^{n+1}} \\ &= \frac{(1-ps) p^n s^n}{(1-ps)(1 - (1-p) p^{n-1} s^n) - (1-p)(1 - p^{n-1} s^{n-1}) s}. \end{aligned}$$

Si $n = 1$, on a

$$G_1(s) = \frac{ps}{1 - (1-p)s}.$$

C'est une loi géométrique de paramètre $1-p$.

— Fin —