

### Corrigé du devoir n°1

**Exercice 1** Définissons le modèle probabiliste de la première expérience :

$$\Omega = \{(i, j, k, l) \in \{1, \dots, 6\}^4\}$$

et, pour tous  $i, j, k, l$ ,

$$\mathbb{P}(\{(i, j, k, l)\}) = \frac{1}{6^4}.$$

Il y a  $5^4$  résultats qui ne donnent aucun 6. La probabilité d'avoir au moins un 6 est donc égale à  $1 - (5/6)^4$ , dont une valeur approchée (à 0,05 près) est 0,52.

Pour la deuxième expérience, on peut choisir le modèle suivant :

$$\Omega = \{(i_1, j_1, \dots, i_{24}, j_{24}) \in (\{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\})^{24}\}$$

et, pour tous  $i_1, j_1, \dots, i_{24}, j_{24}$ ,

$$\mathbb{P}(\{(i_1, j_1, \dots, i_{24}, j_{24})\}) = \frac{1}{36^{24}}.$$

Il y a  $35^{24}$  résultats qui ne font pas apparaître de double six. La probabilité d'avoir au moins un double six est donc égale à  $1 - (35/36)^{24}$  dont une valeur approchée (à 0,05 près) est 0,49.

Le succès est plus fréquent dans la première expérience que dans la deuxième.

**Exercice 2** 1. Il n'y a qu'une application d'un ensemble dans un ensemble à un point donc  $S_n^1$  est égal à 1.

Il y a  $2^n$  applications d'un ensemble à  $n$  éléments dans un ensemble à deux points. Parmi celles-ci, deux seulement ne sont pas surjectives : celles qui envoient tous les éléments de l'ensemble de départ sur un des deux éléments de l'ensemble d'arrivée. Donc  $S_n^2$  est égal à  $2^n - 2$ .

2. Chaque élément de l'ensemble de départ à  $p$  images possibles donc le nombre d'applications est  $p^n$ .
3. Regroupons les applications en fonction du cardinal  $k$  de leur image : nous obtenons alors toutes les surjections d'un ensemble à  $n$  éléments dans un ensemble à  $p$  éléments. Il y a  $C_n^k$  choix possibles pour l'ensemble-image. Enfin toutes les applications ont été prises en compte une et une seule fois. Nous avons donc :

$$\sum_{k=1}^p C_p^k S_n^k = p^n.$$

4. L'expérience se modélise en considérant pour  $\Omega$  l'ensemble des applications d'un ensemble à  $n$  éléments dans un ensemble à trois éléments que l'on munit de la probabilité uniforme. Toutes les catégories sont représentées lorsque l'échantillon réalise une surjection d'un ensemble à  $n$  éléments sur un ensemble à 3 éléments. D'après ce qui précède,

$$S_n^3 = 3^n - 3S_n^2 - 3S_n^1 = 3^n - 3 \times 2^n + 3.$$

La probabilité cherchée est donc égale à  $(3^n - 3 \times 2^n + 3)/3^n$ . Il faut alors résoudre

$$\frac{3^n - 3 \times 2^n + 3}{3^n} > 0,95.$$

La machine donne  $n = 11$  pour valeur minimale.

**Exercice 3** Définissons les événements suivants :

$$A = \{\text{il fait beau}\}$$

$$B = \{\text{la météo annonce la pluie et la grenouille le beau temps}\}$$

$$C = \{\text{la météo a raison}\}$$

$$D = \{\text{la grenouille a raison}\}$$

On sait que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{7}{10}, \quad \mathbb{P}(A^c) = \frac{3}{10}, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{49}{50}, \quad \mathbb{P}(D) = \frac{19}{20}.$$

On cherche à calculer  $\mathbb{P}(A|B)$ . La formule de BAYES permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Par définition des événements,

$$B \cap A = C^c \cap D \cap A,$$

donc

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(C^c \cap D \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Or, le fait que la grenouille et la météo soient dans le vrai ou non et le temps qu'il fait sont trois événements mutuellement indépendants. Donc

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(C^c)\mathbb{P}(D).$$

De même,

$$\mathbb{P}(B|A^c) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D^c).$$

Appliquons à nouveau la formule de BAYES :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)}.$$

L'application numérique donne environ 0,48 (à 0,005 près). Le temps le plus probable est donc la pluie avec une probabilité voisine de 0,52.