

Exercice 1.

Une urne contient des boules de m couleurs. La proportion des boules de couleur i est p_i . On effectue n tirages, et à chaque fois on remet la boule tirée dans l'urne.

(a) Quelle est la probabilité de tirer dans l'ordre: k_1 boules de la première couleur, puis k_2 boules de la deuxième, etc., puis k_m boules de la m^e couleur? Ici on a bien sûr $k_1 + \dots + k_m = n$, le nombre de tirages.

(b) Quelle est la probabilité de tirer dans le désordre: k_1 boules de la première couleur, k_2 boules de la deuxième, etc., et k_m boules de la m^e couleur?

Cette loi obtenue sur l'ensemble $\{(k_1, \dots, k_m), k_i \in \mathbb{N}, k_1 + \dots + k_m = n\}$ s'appelle la loi **multinomiale**. Par exemple, si $n = 2$, alors k_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 2.

Reprenons le processus de Bernoulli. On dispose d'une pièce de monnaie "truquée", qui donne pile (P) avec la probabilité p , ($p \in]0, 1[$) et face (F) avec la probabilité $q = 1 - p$. On lance la pièce une infinité de fois, et on obtient ainsi une suite de piles et de faces. On note S_n le nombre de piles obtenus au cours des n premiers lancers, et T_k le temps d'attente du k^e pile. On note aussi $X_n = 1$ si le résultat du n^e lancer est pile, $X_n = 0$ sinon.

(a) Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir pile?

(b) Calculer S_n grâce aux X_i , puis calculer les espérances et variances des X_n , S_n , et T_1 .

(c) Montrer que T_1 et $(T_2 - T_1 - 1)$ sont indépendantes et de même loi. En déduire l'espérance et la variance de T_2 .

Exercice 3.

Soit X une v.a. de loi de Poisson de paramètre λ , (c'est à dire que $\mathbb{P}\{X = n\} = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

(a) Montrer que $\mathbb{P}\{X \text{ est paire}\} \geq \mathbb{P}\{X \text{ est impaire}\}$.

(b) On définit une v.a. Y par:

$$\begin{aligned} Y &= 0 \text{ si } X \text{ est paire} \\ &= X/2 \text{ si } X \text{ est impaire.} \end{aligned}$$

Donner la loi de Y , ainsi que son espérance.

(c) Donner la loi de X sachant que $Y = 5$, puis sachant que $Y = 0$.

Exercice 4.

Soit E l'ensemble des 10 points $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2; x + y \leq 3\}$, et (X, Y) les coordonnées d'un point choisi au hasard dans E . On pose $U = X + Y$ et $V = |X - Y|$.

(a) Faire un dessin, et dessiner les ensembles $\{U = 2\}$ et $\{V = 1\}$.

(b) Donner les lois de X et de Y .

- (c) Donner la loi conjointe de (U, V) , les lois marginales, et les lois conditionnelles.
 (d) Calculer $\mathbb{E}(U^2)$ et la covariance de (X, Y) .

Exercice 5.

Soit (X, Y) un couple de v.a. à valeurs dans \mathbb{N}^2 tel que pour tous j, k ,

$$\mathbb{P}\{X = j, Y = k\} = \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{e^j k!}.$$

- (a) Déterminer λ pour qu'on ait bien une loi de probabilité.
 (b) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance. De même pour Y .
 (c) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes? On pose $Z = X + Y$. Calculer sa loi, son espérance et sa variance.
 (d) Calculer la covariance de X et Y .

Exercice 6.

Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{N} . On pose $p_n = \mathbb{P}\{X = n\}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4p_{n+2} = 5p_{n+1} - p_n$. Montrer que la fonction génératrice de X

$$G(t) = \sum_{n \geq 0} p_n t^n$$

vérifie une équation fonctionnelle. En déduire les p_n , l'espérance et la variance de X .

Exercice 7.

Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre θ (donc de moyenne $1/\theta$).

- (a) Donner la fonction de répartition puis la densité de $5X$, et de X^2 .
 (b) Plus généralement, si f est une fonction croissante, déterminer la loi de $f(X)$.

Exercice 8.

Soit F la fonction de répartition d'une v.a. continue X . Montrer que $F(X)$ est la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 9 - Ordre statistique.

On prend une suite X_1, \dots, X_n de n v.a. indépendantes toutes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On les ré-ordonne dans l'ordre croissant $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$, c'est à dire que $X_{(1)} = \min_{i \leq n} X_i$, etc ...

- (a) Déterminer la fonction de répartition de $X_{(1)}$. Même question pour $X_{(n)}$.
 (b) Montrer par récurrence que la densité de $X_{(k)}$, $k \leq n$ est

$$f_k(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}.$$

- (c) Donner une interprétation.