MIA 06 Probabilités

Feuille de TD n^o 6, **correction** Année 1997/1998

Rappel sur les convergences.

1. Convergence en probabilité: $Z_n \xrightarrow{p} Z$ si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\{|Z_n - Z| > \epsilon\} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

2. Convergence en loi: $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ si pour tout x point de continuité de la fonction de répartition de Z,

$$\mathbb{P}\{Z_n \leq x\} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}\{Z \leq x\}.$$

Ne pas oublier:

$$\boxed{\text{cv. en proba}} \Longrightarrow \boxed{\text{cv. en loi}}$$

La réciproque est vraie si la v.a. limite Z est constante, mais elle est fausse en général.

Exercice 1.

La loi de X_n est équirépartie: $\mathbb{P}\{X_n = i/n\} = 1/(n+1)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Pour prouver la convergence en loi de X_n vers X, il faut et il suffit de prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\{X_n \leq x\}$ tend vers $\mathbb{P}\{X \leq x\}$ lorsque n tend vers l'infini. Si $x < 0$ ou si $x \geq 1$, alors ces deux quantités sont égales (et vallent 0 ou 1) pour tout n. Si $x \in [0, 1[$, et si $\frac{i}{n} \leq x < \frac{i+1}{n}$, alors $\mathbb{P}\{X_n \leq x\} = \frac{i+1}{n+1}$. C'est à dire,

$$\mathbb{P}\{X_n \leq x\} = \frac{[nx]+1}{n+1}.$$

Mais $nx \leq [nx] + 1 \leq nx + 1$, donc $\mathbb{P}\{X_n \leq x\} \to x = \mathbb{P}\{X \leq x\}$. La convergence en loi de X_n vers X est établie.

Exercice 3.

1. Y_n suit la loi binomiale de paramètre p^2, car elle ne prend que les valeurs 0 et 1, et $Y_n = 1$ si et seulement si $X_n = 1$ et $X_{n-1} = 1$. Ainsi $\mathbb{P}\{Y_n = 1\} = \mathbb{P}\{X_n = 1\}\mathbb{P}\{X_{n-1} = 1\} = p^2$. On a donc $\mathbb{E}(Y_n) = p^2$ et $\mathrm{var}(Y_n) = p^2(1-p^2)$.
Il suffit de calculer $\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n+k})$ lorsque $k \geq 0$, car $\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n+k}) = \mathrm{cov}(Y_{n+k}, Y_n)$. Si $k = 0$, c'est la variance de Y_n. Si $k = 1$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n+1}) &= \mathbb{E}(X_{n-1}X_n^2X_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(Y_{n+1}) \\
&= \mathbb{E}(X_{n-1})\mathbb{E}(X_n^2)\mathbb{E}(X_{n+1}) - p^2p^2 \\
&= ppp - p^4 = p^3(1-p).
\end{aligned}$$

Enfin, si $k \geq 2$, comme $n-1 < n < n+k-1 < n+k$, et par indépendance des X_i

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n+k}) &= \mathbb{E}(X_{n-1}X_nX_{n+k-1}X_{n+k}) - \mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(Y_{n+k}) \\
&= \mathbb{E}(X_{n-1})\mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_{n+k-11})\mathbb{E}(X_{n+k}) - p^2p^2 \\
&= p^4 - p^4 = 0.
\end{aligned}$$

2. Calcul de l'espérance: $\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) = p^2$. Calcul de la variance:

$$\begin{aligned}
\text{var}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \mathbb{E}Y_i)\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (Y_i - \mathbb{E}Y_i)^2 + 2\sum_{i<j\leq n}(Y_i - \mathbb{E}Y_i)(Y_j - \mathbb{E}Y_j)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left((Y_i - \mathbb{E}Y_i)^2\right) + 2\sum_{i<j\leq n}\mathbb{E}(Y_i - \mathbb{E}Y_i)(Y_j - \mathbb{E}Y_j)\right\} \\
&= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^n \text{var}(Y_i) + 2\sum_{i<j\leq n}\text{cov}(Y_i, Y_j)\right\} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(np^2(1-p^2) + 2\sum_{i<n}\text{cov}(Y_i, Y_{i+1})\right) \\
&= p^2(1-p^2)\frac{1}{n} + 2p^3(1-p)\frac{n-1}{n^2}.
\end{aligned}$$

On s'aperçoit que tous les S_n ont la même moyenne p^2, et que la variance de S_n tend vers 0. On se doute alors que S_n converge vers la v.a. constante égale à p^2. Pour montrer qu'il y a convergence en probabilité, il faut et il suffit de voir que $\forall\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\{|S_n - p^2| > \epsilon\}$ tend vers 0. Pour cela, on fait intervenir la v.a. $(S_n - p^2)^2$, et on utilise l'inégalité de Tchebichev.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|S_n - p^2| > \epsilon\} &= \mathbb{P}\{(S_n - p^2)^2 > \epsilon^2\} \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left((S_n - p^2)^2\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\text{var}(S_n) \\
&\to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

La convergence en probabilité de S_n vers p^2 est établie.

Exercice 4.

1. U_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ (faites le calcul, ou vérifiez grâce aux fonctions génératrices). Ainsi,

$$\mathbb{P}\{U_n \leq n\} = \sum_{k=0}^n \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}.$$

2. Comme U_n est la somme de n v.a. indépendantes de même loi, le thérème central limite s'applique, c'est à dire que Z_n converge vers la loi normale centrée réduite. Ainsi, si on choisit $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned}
e^{-n}\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} &= \mathbb{P}\{U_n \leq n\} \\
&= \mathbb{P}\left\{\frac{U_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right\} \\
&= \mathbb{P}\{Z_n \leq 0\} \\
&\to \mathbb{P}\{\mathcal{N}(0,1) \leq 0\} = 1/2.
\end{aligned}$$