Devoir de probabilités,
MIA 06, décembre 1997

On dispose d'une pièce de monnaie qui donne Pile (P) avec une probabilité p et Face (F) avec une probabilité q (bien sûr, $p+q=1$). On lance cette pièce une infinité de fois, et on obtient ainsi une suite de piles et de faces. Tous les lancers sont indépendants. On note X_n le résultat (P ou F) du n^e lancer.

On désire voir apparaître le mot "PF". On appelle alors T le temps d'attente de ce mot. Plus précisément, $T=n$ si on obtient P au $(n-1)^e$ jet, F au n^e jet, et si le mot "PF" n'est pas apparu avant ce n^e jet. On pose aussi $T=+\infty$ si le mot "PF" n'apparaît jamais. En fait,

$$T = \inf\{k \geq 1;\ X_{k-1} = \mathrm{P} \text{ et } X_k = \mathrm{F}\}.$$

1. Quelles valeurs peut prendre T? A votre avis, si p ou si q vaut 0, quelles valeurs prend T?

2.
  a. Soit T_1 le temps d'attente du premier pile: $T_1 = \inf\{k \geq 1;\ X_k = \mathrm{P}\}$. Déterminer la loi de T_1.

  b. Soit $T_2 = \inf\{k \geq T_1;\ X_k = \mathrm{F}\}$ le temps d'attente du premier face après T_1. Montrer que $T = T_2$.

  c. Montrer que T_1 et $T_2 - T_1$ sont deux variables aléatoires indépendantes. Quelle est la loi de $T_2 - T_1$?

  d. en déduire la loi de T. Si $p \in]0,1[$, quelle est la probabilité de ne jamais voir apparaître notre mot fétiche?

3. Calculer l'éspérance de T. Si $p \to 0$, quelle est la limite de $\mathbb{E}T$? Commenter. De la même façon, que se passe-t-il si $p \to 1$? Pour quelle valeur de p le temps d'attente T est-il minimal, en moyenne?