Errata du livre «Recueil de modèles aléatoires» Mathématiques & Applications 78, Springer (2016)

Djalil Chafaï & Florent Malrieu

Janvier 2019

- Page 54, l'étude des processus de branchement au moyen de la fonction génératrice est due à Stanisław Ulam, découverte effectuée à Los Alamos dans le cadre du projet Manhattan, le processus de branchement modélisant l'évolution du nombre de neutrons lors d'une réaction nucléaire en chaîne, comme expliqué dans le billet `http://djalil.chafai.net/blog/2016/06/30/branching-processes-nuclear-bombs-and-a-polish-american/`
- Page 61, formule de Dobinski: remplacer «$k = 1$» par «$k = 0$» (signalé par Arnaud Guyader).
- Page 63 lignes 21-22, retirer le bout de phrase « pour tout $1 \leq i \leq n$.
- Page 112, la vraisemblance d'un mélange fini de gaussiennes n'est pas toujours bornée supérieurement. Une étude de la dégénérescence de la vraisemblance des mélanges finis gaussiens et ses liens avec l'algorithme EM est menée par Christophe Biernacki et Stéphane Chrétien dans leur article `http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1959073`.
- Page 132, la preuve du théorème 10.6 est fausse ; en effet, la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ n'est pas croissante (signalé par Arnaud Guyader) ; démonstration correcte ci-dessous (merci à Olivier Durieu).
- Page 204, théorème 15.6, remplacer $k \geq 1$ par $k > 1$ et $1 - x$ par $1 - u$ (signalé par Arnaud Guyader).
- Page 359, théorème 27.3, remplacer $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ par $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]^c$ (signalé par Florent Benaych-Georges).

Preuve du théorème 10.6 page 132. La suite $(\overline{Y}_n)_{n\geq 1}$ est croissante par construction. Elle converge donc vers Y à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Nous allons utiliser la formule suivante: $\overline{Y}_k = \sum_{j=1}^k (Y_j - \overline{Y}_{j-1})/j$. Soit à présent $x < x_F$ et $\varepsilon > 0$ tel que $x + \varepsilon < x_F$. Si $x_F = +\infty$, on peut prendre $\varepsilon = 1$. Sur l'évènement $\{Y \leq x\}$ on a, puisque $\overline{Y}_j \leq Y \leq x$,

$$Y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Y_j - \overline{Y}_{j-1}}{j} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(Y_j - x)^+}{j} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon \mathbb{1}_{\{Y_j > x+\varepsilon\}}}{j}.$$

Posons, pour $k \geq 1$, $M_k = \#\{j \leq k \ : \ Y_j > x + \varepsilon\}$ et $N_k = \#\{j \leq k \ : \ X_j > x + \varepsilon\}$. Alors $M_k \geq N_k$ pour tout $k \geq 1$ et $\mathbb{1}_{\{Y_j > x+\varepsilon\}} = M_j - M_{j-1}$. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{Y_j > x+\varepsilon\}}}{j} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{M_j - M_{j-1}}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{M_j}{j(j+1)} \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N_j}{j(j+1)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N_j - N_{j-1}}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{X_j > x+\varepsilon\}}}{j}.\end{aligned}$$

Il reste à remarquer que presque sûrement la série de terme général $\mathbb{1}_{\{X_j > x+\varepsilon\}}/j$ diverge puisque la série centrée associée converge mais pas la série des espérances. Elle diverge notamment sur l'ensemble $\{Y \leq x\}$ ce qui implique que cet ensemble est de probabilité nulle. □