Université Paris-Est Marne-la-Vallée – Master 2 Mathématiques et Applications – 2011-2012

Modèles stochastiques

Examen du mercredi 21 mars 2012

Trois heures et documents papier autorisés

On souhaite étudier une extension sexuée du modèle de Galton-Watson. Pour cela, on se muni d'une famille dénombrable $((X_{n,i}, Y_{n,i}))_{n\geq 0, i\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi P sur $\mathbb{N}^2$. On s'intéresse à l'évolution du nombre de couples, et on note Z_n le nombre de couples à la génération n. On convient que $Z_0 \geq 1$. Le couple numéro i de cette génération fait $X_{n,i}$ enfants femelles et $Y_{n,i}$ enfants mâles, de sorte que le nombre total F_n et M_n d'enfants femelles et mâles de la génération n est

$$F_n = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} \quad \text{et} \quad M_n = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n,i}$$

avec la convention $\sum_\varnothing = 0$. On pose alors

$$Z_{n+1} = L(F_n, M_n)$$

où $L : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est une fonction fixée qui vérifie $L(x,y) \leq xy$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. Avec cette définition, les générations sont séparés, comme dans le modèle de Galton-Watson classique. La quantité $L(x,y)$ modélise le nombre de couples formés par x femelles et y mâles, d'où la majoration par xy. Nous supposons également que la fonction L est sur-additive, c'est-à-dire que pour tous (x,y) et (x',y') dans $\mathbb{N}^2$,

$$L(x+x', y+y') \geq L(x,y) + L(x',y').$$

On appelle fonction génératrice d'une loi de probabilité Q sur $\mathbb{N}^r$, ou de toute variable aléatoire $W = (W_1, \ldots, W_r) \sim Q$, la fonction G_Q, notée aussi G_W, définie par

$$s \in D^r \mapsto \mathbb{E}(s_1^{W_1} \cdots s_r^{W_r}) = \sum_{n \in \mathbb{N}^r} Q_n s_1^{n_1} \cdots s_r^{n_r}$$

où $D = \{s \in \mathbb{C} : |s| \leq 1\}$ et où $Q_n = \mathbb{P}(W = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^r$.

1 Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov dont on précisera l'espace d'états et le noyau de transition. Qu'elle est la nature de l'état 0 ?

2 À quel modèle classique correspond le cas où $L(x,y) = x$ pour tout $x \in \mathbb{N}$?

3 Proposer une fonction L modélisant la fidélité des couples ;

4 A-t-on une propriété de branchement (réduction du cas $Z_0 = k$ au cas $Z_0 = 1$ par superposition) comme pour le modèle de Galton-Watson classique ?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Exprimer la fonction génératrice de $\mathcal{L}((F_n, M_n)) \,|\, Z_n)$ en fonction de G_P ;

$\boxed{\mathbf{6}}$ On suppose dans cette question que le nombre d'enfants femelles et le nombre d'enfants mâles formés par un couple sont indépendants. Comment se traduit cette hypothèse sur G_P ?

$\boxed{\mathbf{7}}$ On suppose dans cette question qu'un couple produit un nombre d'enfants de loi R sur $\mathbb{N}$ et que chaque enfant est femelle ou mâle de manière indépendante avec probabilités respectives $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. Montrer que

$$G_P(s_1, s_2) = G_R(ps_1 + qs_2) \quad \text{pour tous } s_1, s_2 \in D.$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Montrez que les cas considérés dans les deux questions précédentes coïncident lorsque R est une loi de Poisson ;

Modèle de Daley

Le modèle de Daley s'obtient en prenant $L(x, y) = x \min(1, y)$ de sorte que

$$Z_{n+1} = F_n \mathbf{1}_{\{M_n \geq 1\}}.$$

On suppose que P est comme dans la question $\boxed{\mathbf{7}}$ avec $0 < p < 1$ et $R = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \delta_k$ avec $p_0 + p_1 < 1$ et $p_0 + p_1 + p_2 < 1$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Montrer que tout état $z \neq 0$ est transitoire pour la chaîne $(Z_n)_{n \geq 0}$;

$\boxed{\mathbf{10}}$ Montrer que $\mathbb{P}(Z_n \to 0) + \mathbb{P}(Z_n \to \infty) = 1$;

$\boxed{\mathbf{11}}$ Montrer que si $(a_k)_{k \geq 1}$ est une suite de nombres réels sous-additive, c'est-à-dire que $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ pour tous $n, m \geq 1$, alors, dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \inf \left\{ \frac{a_n}{n} : n \geq 1 \right\} ;$$

Pour tout $k \geq 1$, on introduit le taux de croissance moyen $r_k = \frac{1}{k} \mathbb{E}(Z_{n+1} \,|\, Z_n = k)$. On souhaite montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $q_k := \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0 \,|\, Z_0 = k) = 1$ pour tout $k \geq 1$;
2. $r := \sup_{k \geq 1} r_k \leq 1$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ En considérant la suite $a_k = -kr_k$, montrer que $r = \lim_{k \to \infty} r_k$;

$\boxed{\mathbf{13}}$ Montrer que si $r \leq 1$ alors $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une sur-martingale positive, et en déduire que $\mathbb{P}(Z_n \to 0) = 1$;

On suppose à présent que $r = pG'_R(1) > 1$ et on pose $g(s) = G_R(ps + q)$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Montrer que g possède un unique point fixe s_* dans l'intervalle $]0,1[$ et que $g(s) < s$ sur l'intervalle $]s_*, 1[$;

$\boxed{\mathbf{15}}$ Montrer, en étudiant la classification des états de $(Z_n)_{n \geq 0}$, que les probabilités $(q_k)_{k \geq 1}$ sont soit toutes $= 1$ soit toutes < 1 ;

16 Montrer, en utilisant l'inégalité de Markov, que pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} 1 - q_k &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \neq 0 \mid Z_0 = k) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \neq k + n \mid Z_0 = k) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(Z_\ell \geq k + \ell \mid Z_{\ell-1} = k + \ell - 1); \end{aligned}$$

17 Montrer que pour tout $k \geq 1$ et tout $\ell \geq 1$,

$$\inf_{j \geq k+\ell} \mathbb{P}(Z_{\ell+1} \geq k + \ell + 1 \mid Z_\ell = j) = \mathbb{P}(Z_{\ell+1} \geq k + \ell + 1 \mid Z_\ell = k + \ell);$$

18 Montrer que $\mathbb{P}(Z_{n+1} \leq k \mid Z_n = j)$ est le coefficient de s^k dans le développement en série entière en 0 de la fonction $s \mapsto \mathbb{E}(s^{Z_{n+1}} \mid Z_n = j)/(1-s)$;

19 En déduire que

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} \leq k \mid Z_n = k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}(0,\rho)} \frac{g^k(z) - G_R^k(pz) + G_R^k(p)}{z^{k+1}(1-z)}\, dz$$

où il s'agit d'une intégrale de contour le long du cercle $\mathcal{C}(0,\rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$, de rayon ρ choisi de sorte que $s_* < \rho < 1$ et $q > p(1-\rho)$;

20 Montrer que $g(\rho) = G_R(p\rho + q) > G_R(p)$ et $\alpha := g(\rho)/\rho < g(s_*)/s_* = 1$;

21 Montrer que le numérateur de l'intégrale de contour précédente est analytique dans le disque unité et à coefficients positifs. En déduire par le principe du maximum que

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} \leq k \mid Z_n = k) \leq \frac{g^k(\rho) + G_R^k(p)}{\rho^k(1-\rho)};$$

22 En déduire que

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} \leq k \mid Z_n = k) \leq \frac{2\alpha^k}{1-\rho};$$

23 En déduire que $1 - q_k > 0$.

Ce sujet est directement inspiré d'un texte de modélisation sur le modèle de Daley, rendu public par le jury de l'agrégation de mathématiques sur `http://agreg.org/`
