Cours : Calcul Stochastique

H. DOSS

Master 2. MIDO.

Ref. Ikeda-Watanabe.

Chap. 0. Préliminaires et rappels.

I) Indépendance, Conditionnement :

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité.

1) On dit qu'une famille $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ est indépendante si, pour tout J fini $\subseteq I$ et tout $A_i \in \mathcal{A}_i$, on a :

$$P\Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big) = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

2) On dit qu'une famille $(X_i)_{i \in I}$ de v.a. est indépendante

$[\ X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (E_i, \mathcal{B}_i)\ ]$

si la famille de sous-tribus $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ est indépendante où $\sigma(X_i) = \{ X_i^{-1}(B_i)\ ;\ B_i \in \mathcal{B}_i \}$ est la tribu engendrée par X_i.

$(X_i)_{i \in I}$ est indépendante si et seulement si, pour tout J fini $\subseteq I$ on a :

$$P_{(X_i,\, i \in J)} = \bigotimes_{i \in J} P_{X_i} \quad \text{sur} \quad \Big(\prod_{i \in J} E_i,\ \bigotimes_{i \in J} \mathcal{B}_i\Big)$$

[si Z est une v.a., on note P_Z la loi de Z].

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des v.a. réelles intégrables et indépendantes, on a : $X_1 \cdot X_2 \cdots X_n \in L^1$ et $E(X_1 \cdot X_2 \cdots X_n) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$.

Conditionnement :

1) Commençons par un rappel sur les espaces de Hilbert

Soient H un espace de Hilbert et $F \subseteq H$ un sous-espace fermé. Pour tout $x \in H$, il existe $y \in F$, unique projection orthogonale de x sur F, vérifiant l'une des propriétés équivalentes suivantes :

i) $\forall z \in F \quad x - y \perp z$ i.e. $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$

ii) $\forall z \in F \quad \| x - y \| \leqslant \| x - z \|$

2) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

Considérons l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

et F le sous-espace fermé de H constitué des éléments ayant un représentant $\mathcal{F}$ mesurable.

Si X est une v.a.r. de carré intégrable, il est naturel de considérer la meilleure approximation en moyenne quadratique de X par une v.a.r. Y ayant un représentant $\mathcal{F}$ mesurable.

D'après 1) ii), cette v.a. est la projection orthogonale de X sur F. Elle est caractérisée par :

① Y est $\mathcal{F}$ mesurable, de carré intégrable

② $\forall Z \in L^2$, $\mathcal{F}$ mesurable : $E\{|X-Y|^2\} \leqslant E\{|X-Z|^2\}$

Compte tenu de ①, on a :

② $\Leftrightarrow$ ②' : $\forall Z \in L^2$, $\mathcal{F}$ mesurable $E\{X.Z\} = E\{Y.Z\}$

②' $\Leftrightarrow$ ②'' : $\forall B \in \mathcal{F}$ $E\{Y.1_B\} = E\{X.1_B\}$

Y est ainsi déterminée, de manière unique, par les conditions : $\{①, ②\}$ ou $\{①, ②'\}$ ou $\{①, ②''\}$.

On la note $Y = E\{X/\mathcal{F}\}$ ou $Y = E^{\mathcal{F}}(X)$.

espérance conditionnelle de X quand $\mathcal{F}$

3) Supposons maintenant que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On peut, par prolongement, définir l'espérance conditionnelle $Y = E\{X/\mathcal{F}\}$.

C'est une v.a.r. déterminée de manière unique par les conditions :

i) Y est $\mathcal{F}$ mesurable, intégrable

ii) $\forall Z$ $\mathcal{F}$ mesurable, bornée, on a :

$$E\{X.Z\} = E\{Y.Z\}$$

ii) $\Leftrightarrow$ ii)' : $\forall B \in \mathcal{F}$ $E\{X.1_B\} = E\{Y.1_B\}$

Dém :

Soit μ la mesure bornée sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définie par $\mu(B) = E\{X\, 1_B\}$ $(B \in \mathcal{F})$ et soit $\nu = P/_{\mathcal{F}}$

Pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a : $\nu(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$.

D'après le Th. de Radon-Nicodym, il existe $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ unique, vérifiant : $\int_B Y \, d\nu = \mu(B)$, pour tout $B \in \mathcal{F}$

i.e. $E\{Y . 1_B\} = E\{X . 1_B\}$, pour tout $B \in \mathcal{F}$ □

Propriétés de l'espérance conditionnelle :

Soit $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Alors :

a) $E\{E\{X/\mathcal{F}\}\} = E\{X\}$ si $X \in L^1$

b) $E\{\alpha X/\mathcal{F}\} = \alpha E\{X/\mathcal{F}\}$ p.s. si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $X \in L^1$

c) $E\{X+Y/\mathcal{F}\} = E\{X/\mathcal{F}\} + E\{Y/\mathcal{F}\}$ p.s. si X et $Y \in L^1$

d) Si X est $\mathcal{F}$-mesurable, $Y \in L^1$ et $XY \in L^1$, alors

$$E\{X.Y/\mathcal{F}\} = X . E\{Y/\mathcal{F}\} \text{ p.s.}$$

En particulier $E\{X/\mathcal{F}\} = X$ p.s. si X est $\mathcal{F}$ mesurable intégrable

e) Si X est une v.a. indépendante de $\mathcal{F}$ et intégrable, alors

$$E\{X/\mathcal{F}\} = E\{X\} \text{ p.s.}$$

f) Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, alors :

$$E\{E\{X/\mathcal{F}\}/\mathcal{G}\} = E\{E\{X/\mathcal{G}\}/\mathcal{F}\} = E\{X/\mathcal{G}\} \text{ p.s.}$$

pour tout $X \in L^1$.

g) Si $X, Y \in L^1$ et $X \leqslant Y$ p.s., alors :

$$E\{X/\mathcal{F}\} \leqslant E\{Y/\mathcal{F}\} \text{ p.s.}$$

h) Si $X_n \geqslant 0$, $X_n \uparrow X$ avec $X \in L^1$ alors :

$$E\{X_n/\mathcal{F}\} \uparrow E\{X/\mathcal{F}\} \text{ p.s.}$$

La propriété h) permet de définir $E\{X/\mathcal{F}\}$ lorsque X est une v.a.r positive quelconque.

i) Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe positive, alors

$$\varphi(E\{X/\mathcal{F}\}) \leqslant E\{\varphi(X)/\mathcal{F}\} \text{ ; pour tout } X \in L^1.$$

On en déduit que

$$|E\{X/\mathcal{F}\}|^p \leqslant E\{|X|^p/\mathcal{F}\} \text{ , si } p \in [1, +\infty[$$

On a, de plus, $|E\{XY/\mathcal{F}\}| \leqslant \left(E\{|X|^p/\mathcal{F}\}\right)^{1/p} \cdot \left(E\{|Y|^q/\mathcal{F}\}\right)^{1/q}$
si $X \in L^p$, $Y \in L^q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q \in]1, \infty[$.

<u>Proposition</u> :

Soient $T : \Omega \longrightarrow (F, \mathcal{F})$ et $Y : \Omega \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

Alors Y est $\sigma(T)$ mesurable si et seulement si, il existe $g : (F, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mesurable telle que

$$Y = g \circ T .$$

<u>Dém</u> :

Soit $Y = 1_A$ où $A \in \sigma(T)$

$A = T^{-1}(B)$ où $B \in \mathcal{F}$, donc $Y = 1_B \circ T$

Si $Y = \sum_{\text{finie}} a_i \cdot 1_{A_i}$ où $A_i = T^{-1}(B_i)$, $B_i \in \mathcal{F}$; on a $Y = \left(\sum_{\text{finie}} a_i \cdot 1_{B_i}\right) \circ T$. La propriété est donc vérifiée si Y est étagée.

Si Y est positive et $\sigma(T)$ mesurable, il existe une suite croissante (Y_n) de fonctions étagées, $\sigma(T)$ mesurables t.q

$$Y_n \uparrow Y, \quad Y_n = g_n \circ T .$$

En posant $g = \lim g_n$, on voit que $Y = g \circ T$

Cas général : il suffit d'écrire $Y = Y^+ - Y^-$ □

Soient $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $T : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (F, \mathcal{F})$ une v.a. quelconque. L'espérance conditionnelle de X sachant T, $E\{X/T\}$ est définie par : $E\{X/T\} = E\{X/\sigma(T)\}$

Elle est caractérisée par :

i) Il existe g mesurable de $(F, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ t.q

$$E\{X/T\} = g(T) \text{ p.s et } g(T) \in L^1$$

ii) Pour toute fonction h mesurable et bornée de $(F, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$: $E\{X \cdot h(T)\} = E\{g(T) \cdot h(T)\}$ □

Si $X \in L^2$, alors $E\{X/T\}$ est la meilleure approximation en moyenne quadratique de X par une fonction mesurable de T.

Exemples :

1) Si T est à valeurs dans un ensemble dénombrable F, calculer $E\{X/T\}$ $(X \in L^1)$.

2) Si (X,T) est à valeurs $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, de densité $f = (f(x,t))$, calculer $E\{h(X)/T\}$ pour toute fonction h mesurable bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

3) Soit (X,T) à valeurs $(F_1 \times F_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$.
Si X et T sont indépendantes, calculer
$E\{\varphi(X,T)/T\}$, pour toute fonction φ de $F_1 \times F_2$ dans $\mathbb{R}$ mesurable et bornée.

Loi conditionnelle :

Soient $(G, \mathcal{G})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables.
On appelle probabilité de transition (ou noyau de transition) de G vers F, une famille de probabilités, indicée par $t \in G$, $(N(t,\cdot))_{t\in G}$ sur $(F,\mathcal{F})$, telle que, pour tout $A \in \mathcal{F}$, l'application $t \in G \longrightarrow N(t,A) \in \mathbb{R}$ soit mesurable sur $(G,\mathcal{G})$.

Soient T et X deux v.a. à valeurs $(G,\mathcal{G})$ et $(F,\mathcal{F})$ respectivement. On appelle loi conditionnelle de X sachant T, une probabilité de transition de G vers F, $(N(t,dx))_{t\in G}$ telle que, pour toute fonction h mesurable bornée de $(F,\mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$, on ait :

$$E\{h(X)/T\} = \int_F h(x)\, N(T,dx) \quad \text{p.s.}$$

En particulier $P\{X \in A/T\} = N(T,A)$ p.s. pour tout $A \in \mathcal{F}$.
On dit alors que $N(t,dx)$ est la loi conditionnelle de X sachant que $T=t$.

Remarque : Si X et T sont indépendantes, $N(t,dx)$ ne dépend pas de t : $\forall t \in G$, $N(t,dx) = P_X(dx)$ où $P_X(dx)$ est la loi de X

Exercice : Calculer la loi conditionnelle de X sachant que $T = t$ dans chacun des exemples précédents.

II Généralités sur les processus

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$.

On dit que $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est continue à droite si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ où $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.

Dans la suite, on supposera, le plus souvent, que $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite et complète (i.e. que $\mathcal{F}_0$ contient les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$). $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est appelée "filtration" ou famille de référence.

Soient $(G, \mathcal{B})$ un espace mesurable où G est un espace métrique complet séparable et $\mathcal{B}$ sa tribu boréléenne.

Un processus stochastique (ou aléatoire) à valeurs dans G est une famille de v.a. $X = (X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs $(G, \mathcal{B})$.

X est $\mathcal{F}_t$-adapté si, pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

X est mesurable si l'application :

$(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow X_t(\omega) \in G$ est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{F} / \mathcal{B}$ mesurable.

X est continu à droite (resp. à gauche, continu) si, pour presque tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire

$t \longmapsto X_t(\omega)$ est continue à droite (resp. à gauche, continue).

Soient $X = (X_t)_{t \geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ deux processus à valeurs dans G. On dit que X et Y sont indistingables si, pour presque tout $\omega \in \Omega$, les trajectoires $t \longmapsto X_t(\omega)$ et $t \longmapsto Y_t(\omega)$ coïncident.

On dit que Y est une modification de X si, pour tout $t \geq 0$, il existe un ensemble négligeable $\mathcal{N}_t$ tel que :

$$\omega \notin \mathcal{N}_t \Rightarrow X_t(\omega) = Y_t(\omega).$$

Soit $\mathcal{P}$ la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par les processus $X = (X_t)$ $\mathcal{F}_t$-adaptés et continus à gauche et soit $\mathcal{O}$ la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par les processus $X = (X_t)$ $\mathcal{F}_t$-adaptés et continus à droite.

Un processus $X = (X_t)$ est dit $\mathcal{F}_t$-prévisible si l'application $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow X_t(\omega) \in G$ est $\mathcal{P}/\mathcal{B}$ mesurable, il est dit $\mathcal{F}_t$-optionnel si l'application précédente est $\mathcal{O}/\mathcal{B}$ mesurable.

<u>Proposition 1</u> :

1) Tout processus prévisible est optionnel

2) Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus optionnel.

Alors, pour tout $T > 0$, l'application :

$$(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega \longrightarrow X_t(\omega) \in G$$

est $\mathcal{B}_{[0,T]} \otimes \mathcal{F}_T / \mathcal{B}$ mesurable. $(*)$

On dit alors que $X = (X_t)$ est progressivement mesurable.

3) Les processus optionnels sont mesurables et adaptés.

<u>Dém.</u> :

Soit $X = (X_t)$ un processus adapté et continu à gauche.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$X_t^n = X_{k/2^n} \quad \text{si} \quad t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\qquad (k \in \mathbb{N})$$

Alors X^n est continu à droite et adapté ; de plus $\lim\limits_{n \to \infty} X^n = X$, donc X est optionnel.

Soit $X = (X_t)$ un processus adapté et continu à droite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, $T > 0$ étant fixé :

$$X_t^n = X_{\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \wedge T} \quad \text{si} \quad t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\cap [0,T]$$

Alors X^n vérifie la propriété $(*)$ et $\lim\limits_{n \to \infty} X^n = X$, donc X vérifie aussi la propriété $(*)$.

3) est évident. □

Temps d'arrêt :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration.
Une application τ de Ω dans $[0, +\infty]$ est un $\mathcal{F}_t$ - temps d'arrêt si :

$$\forall t \geq 0 \quad (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t .$$

Pour un temps d'arrêt τ, on définit la tribu des évènements antérieurs à τ :

$$\mathcal{F}_\tau = \{ A \in \mathcal{F} \text{ t.q. } \forall t \geq 0 \quad A \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t \}$$

Exemple :

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté, continu à valeurs réelles. Pour tout $S \subseteq \mathbb{R}$, soit

$$\tau_S = \inf \{ t \geq 0 \text{ t.q. } X_t \in S \} \text{ , avec la convention } \inf\{\emptyset\} = +\infty$$

(temps d'atteinte de S)

Alors si S est fermé, τ_S est un temps d'arrêt.
En effet, $\forall t \geq 0$, $(\tau_S > t) = \bigcup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{Q}}} \left\{ \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} (X_r \notin V_\varepsilon(S)) \right\}$

où $V_\varepsilon(S) = \{ y \in \mathbb{R} : d(y, S) < \varepsilon \}$.

Plus généralement, si la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite et complète, on montre que, pour tout processus optionnel $X = (X_t)$ et tout borélien S de $\mathbb{R}$, le temps d'atteinte τ_S est un temps d'arrêt.

(cf. Dellacherie et Meyer : « Probabilités et Potentiel » [11]).

Proposition 2 :

Soient σ, τ et σ_n $(n \in \mathbb{N})$ des temps d'arrêt, alors :

i) $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$ sont des t.a. et $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma \vee \tau}$

ii) Si $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite, alors :

$\overline{\lim}\, \sigma_n$ et $\underline{\lim}\, \sigma_n$ sont des t.a. et $\bigcap_n \mathcal{F}_{\sigma_n} = \mathcal{F}_{\inf_n \sigma_n}$.

Dém. :

i) Pour tout $t \geq 0$ on a :

$$(\sigma \wedge \tau > t) = (\sigma > t) \cap (\tau > t) \in \mathcal{F}_t$$
$$(\sigma \vee \tau \leq t) = (\sigma \leq t) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$$

Supposons $\sigma \leq \tau$ et soit $A \in \mathcal{F}_\sigma$:

pour tout $t \geq 0$, on a : $A \cap (\tau \leq t) = A \cap (\sigma \leq t) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$.

donc $A \in \mathcal{F}_\tau$.

ii) Il suffit de montrer que $\sup_n \sigma_n$ et $\inf_n \sigma_n$ sont des t.a.

Or : $$(\sup_n \sigma_n \leq t) = \bigcap_n (\sigma_n \leq t) \in \mathcal{F}_t$$
$$(\inf_n \sigma_n < t) = \bigcup_n (\sigma_n < t) \in \mathcal{F}_t$$

donc $$(\inf_n \sigma_n \leq t) = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\inf_n \sigma_n < t + \varepsilon) \in \mathcal{F}_{t_+} = \mathcal{F}_t .$$

Soit $A \in \bigcap_n \mathcal{F}_{\sigma_n}$. Alors :

$$A \cap (\inf_n \sigma_n < t) = \bigcup_n A \cap (\sigma_n < t) \in \mathcal{F}_t ,$$ donc

$$A \cap (\inf_n \sigma_n \leq t) \in \mathcal{F}_{t_+} = \mathcal{F}_t . \quad \square$$

Proposition 3 :

Soit σ un temps d'arrêt. Alors :

i) σ est $\mathcal{F}_\sigma$ mesurable

ii) Si $X = (X_t)$ est un processus optionnel, la v.a. $Z = X_\sigma . 1_{(\sigma < \infty)}$ est $\mathcal{F}_\sigma$ mesurable.

Dém. :

i) est évident. ii) : Soient $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et $t \geq 0$, on a :

$$\{Z \in B\} \cap \{\sigma \leq t\} = \{X_{\sigma \wedge t} \in B\} \cap \{\sigma \leq t\} .$$

Considérer la composition d'applications mesurables :

$$\omega \in (\Omega, \mathcal{F}_t) \longrightarrow (\sigma(\omega) \wedge t, \omega) \in ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t) \longrightarrow X_{\sigma(\omega)\wedge t}(\omega) \in (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

et utiliser le fait que X est progressivement mesurable. $\square$

Martingales.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré.
Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réelles est une $\mathcal{F}_t$ - martingale (resp. surmartingale, sous-martingale) si

i) X_t est intégrable, pour tout $t \geq 0$

ii) X_t est $\mathcal{F}_t$ - adapté

iii) Pour tous $0 \leq s \leq t$: $E\{X_t / \mathcal{F}_s\} = X_s$ p.s.
(resp. $E\{X_t / \mathcal{F}_s\} \leq X_s$, $E\{X_t / \mathcal{F}_s\} \geq X_s$ p.s.)

Exemples :

1) Soit $Y \in L^1$. Si on pose $X_t = E\{Y / \mathcal{F}_t\}$, on vérifie immédiatement que (X_t) est une $\mathcal{F}_t$-martingale.
Réciproquement, on montre que si (X_t) est une $\mathcal{F}_t$ - martingale continue à droite telle que $\sup_{t \geq 0} E\{|X_t|^p\} < \infty$ pour un $p \in]1, \infty[$, alors il existe $Y \in L^p$ tel que :
$\lim_{t \to \infty} X_t = Y$ p.s. et dans L^p et $X_t = E\{Y / \mathcal{F}_t\}$ $(t \geq 0)$

2) Soit (X_t) une martingale ; alors, pour toute fonction convexe f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(X_t)$ soit intégrable $(t \geq 0)$, le processus $(Y_t) = (f(X_t))$ est une sous-martingale.
En particulier, $(|X_t|)$ est une sous-martingale.

3) Soit (X_t) une $\mathcal{F}_t$ - martingale. Pour tout $t \geq 0$, posons
$\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s ; s \leq t\} \subseteq \mathcal{F}_t$.
$(\mathcal{G}_t)$ est appelée " filtration naturelle " associée à $X = (X_t)$.
On vérifie facilement que (X_t) est aussi une $\mathcal{G}_t$ - martingale □.

Les martingales que nous rencontrerons, dans la suite de ce cours, seront toujours continues.
Nous admettrons les théorèmes suivants dont on peut trouver les démonstrations dans la plupart des traités existant en théorie des processus.

Théorème 1 : (Inégalités maximales).

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$- martingale continue, alors :

i) Pour tous $T > 0$, $\lambda > 0$ et $p \in [1, \infty[$, on a :

$$P\{\sup_{t \in [0,T]} |X_t| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^p} E\{|X_T|^p\}.$$

ii) Pour tous $T > 0$ et $p \in]1, \infty[$, on a :

$$\left[E\{\sup_{t \in [0,T]} |X_t|^p\}\right]^{1/p} \leq q\left(E\{|X_T|^p\}\right)^{1/p}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 2 : (Théorème d'arrêt de Doob).

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$- martingale continue et soient σ, τ deux temps d'arrêt tels que

$0 \leq \sigma \leq \tau \leq C$ où C est une constante finie

alors $$E\{X_\tau / \mathcal{F}_\sigma\} = X_\sigma \quad p.s.$$

En particulier si τ est un temps d'arrêt borné :

$$E\{X_\tau\} = E\{X_0\}$$

Théorème 3 : (Décomposition de Doob-Meyer).

i) Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$- martingale continue, de carré intégrable (i.e. $E(M_t^2) < \infty$, pour tout $t \geq 0$). Il existe alors un unique processus croissant continu, nul en zéro $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ tel que $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ soit une $\mathcal{F}_t$- martingale.

ii) Soient $M = (M_t)_{t \geq 0}$ et $N = (N_t)_{t \geq 0}$ deux $\mathcal{F}_t$- martingales continues de carré intégrable. Il existe alors un unique processus à variation finie, continu (i.e. différence de deux processus croissants continus) nul en zéro, noté $\langle M, N \rangle = (\langle M, N \rangle_t)$ tel que :

$$(M_t \cdot N_t - \langle M, N \rangle_t)_{t \geq 0} \text{ soit une } \mathcal{F}_t \text{- martingale.}$$

Chap. 1. Mouvement brownien.

Soit $p_t(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, la densité de la loi de Gauss d-dimensionnelle $N_d(0, tI)$ donnée par :

$$p_t(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2t}|x|^2\right) \quad \text{où} \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2 .$$

On sait que, pour tous t et $s > 0$:

$$p_{t+s}(x) = p_t * p_s(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p_t(x-z)\, p_s(z)\, dz .$$

Définition 1 :

On appelle mouvement brownien d-dimensionnel tout processus continu $X = (X_t)_{t \geq 0}$, à valeurs $\mathbb{R}^d$, vérifiant les propriétés suivantes :

i) Pour tous $0 \leq s < t$, $X_t - X_s \sim N_d(0, (t-s)I)$

ii) $(X_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants i.e. que : pour tous $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ $(n \in \mathbb{N})$ les v.a. : $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Remarques :

1) Soient $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien issu de zéro (i.e. $X_0 = 0$ p.s.) et H une v.a. indépendante du processus $(X_t)_{t \geq 0}$; la définition précédente montre alors que le processus $\tilde{X} = (H + X_t)_{t \geq 0}$ est aussi un mouvement brownien.

2) Soit $X = (X_t)_{t \geq 0} = (X_t^1, X_t^2, \ldots, X_t^d)_{t \geq 0}$ un processus à d composantes, issu de zéro ; alors X est un mouvement brownien si et seulement si :

a) Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, $(X_t^i)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien issu de zéro

b) les processus $X^i = (X_t^i)_{t \geq 0}$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$ sont indépendants

3) Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu à valeurs $\mathbb{R}^d$, issu de $x \in \mathbb{R}^d$; alors X est un mouvement brownien si et seulement si :

pour tous $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ et tous $A_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

on a : $P\{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \dots, X_{t_n} \in A_n\}$

$$= \int_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} P_{t_1}(x_1 - x) P_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \cdots P_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}\, dx_n .$$

Les remarques 2) et 3) sont des conséquences faciles de la Définition 1 et on voit que l'étude du mvt brownien d-dimensionnel se ramène à l'étude du mvt brownien réel issu de zéro.

Proposition 2 :

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu, issu de zéro, à valeurs réelles. Alors X est un mouvement brownien si et seulement si $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien centré dont la covariance est donnée par : $E\{X_t \cdot X_s\} = \mathrm{Min}\{s, t\}$ $(s, t \in \mathbb{R}_+)$.

Dém :

1) Supposons que (X_t) est un mvt brownien ; alors pour tous $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ les v.a. $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont gaussiennes, centrées, indépendantes ($X_0 = 0$ p.s.) ; les vecteurs $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ et $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ sont donc gaussiens centrés i.e. que, pour tous $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ la v.a. $\sum_{i=1}^{n} c_i X_{t_i}$ est une v.a. gaussienne centrée. De plus, pour tous $0 \leq s < t$: $E\{X_t \cdot X_s\} = E\{X_s \cdot (X_t - X_s)\} + E\{X_s^2\} = s$.

2) Réciproquement supposons que (X_t) est un processus gaussien centré tel que $E\{X_t \cdot X_s\} = \mathrm{Min}\{s, t\}$ $(s, t \in \mathbb{R}_+)$; il est facile d'en déduire que, pour tous $0 < t_1 < \dots < t_n$, le vecteur

$(X_{t_1}, X_{t_2}-X_{t_1}, \dots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}})$ est gaussien centré de covariance diagonale :

$$K = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (t_2-t_1) & & 0 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & & (t_n-t_{n-1}) \end{pmatrix}$$

ce qui entraine que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mvt brownien . □ .

<u>Proposition 3</u> :

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un mvt brownien réel issu de zéro ;
alors pour tout $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $X_t^{(c)} = \frac{1}{c} . X_{c^2 t}$ $(t \geq 0)$
est un mouvement brownien .

<u>Dém</u> : Appliquer la Proposition 2 .

<u>Proposition 4</u> :

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un mvt brownien réel issu de zéro ;
on définit
$$\begin{cases} Y_t = t . X_{1/t} & \text{si } t > 0 . \\ Y_0 = 0 \end{cases}$$

Alors $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un mvt brownien .

<u>Dém</u> : On vérifie que $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien centré tel que $E\{Y_t . Y_s\} = \mathrm{Min}\{s, t\}$ $(s,t \in \mathbb{R}_+)$.
(Y_t) est continu sur $]0, +\infty[$ par définition .
Il faut montrer la continuité en zéro . Or les processus continus $(X_t)_{t>0}$ et $(Y_t)_{t>0}$ ont même loi et $\overline{\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}}} |X_t| = 0$ p.s.
donc $\overline{\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}}} |Y_t| = 0$ p.s. □ .

<u>Remarque</u> :

La continuité de (Y_t) en zéro montre que :
$$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t}{t} = 0 \quad \text{p.s.} \quad (\text{loi des grands nombres}) .$$

Proposition 5 :

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu, issu de zéro, à valeurs $\mathbb{R}^d$; posons $\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s \,;\, s \leq t\}$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) X est un mouvement brownien

ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $M_t^\lambda = \exp\left(i\lambda . X_t + \frac{1}{2}|\lambda|^2 t\right) \quad (t \geq 0)$ est une $\mathcal{G}_t$ - martingale

iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $N_t^\lambda = \exp\left(\lambda X_t - \frac{1}{2}|\lambda|^2 t\right) \quad (t \geq 0)$ est une $\mathcal{G}_t$ - martingale.

Dém. :

On a : X est un mvt brownien si et seulement si, pour tous $0 \leq s < t$: $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{G}_s$ et $X_t - X_s \sim N_d(0, (t-s)$

si et seulement si :

pour tous $0 \leq s < t$ et $\lambda \in \mathbb{R}^d$: $E\left\{\exp\left(i\lambda . (X_t - X_s)\right) / \mathcal{G}_s\right\} = \exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2 (t-s)\right)$

On a donc montré l'équivalence de i) et ii).

L'équivalence de ii) et iii) s'obtient facilement par un argument de prolongement analytique. $\square$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Définition 1' :

On dit qu'un processus continu $X = (X_t)_{t \geq 0}$, à valeurs $\mathbb{R}^d$, est un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien s'il est $\mathcal{F}_t$ - adapté et si pour tous $0 \leq s < t$, $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$ et suit une loi $N_d(0, (t-s) I)$; ce qui signifie aussi que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, le processus $\left(\exp\left(i\lambda . X_t + \frac{1}{2}|\lambda|^2 t\right)\right)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ - martingale.

Remarque :

On voit, tout de suite, que si $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien alors X est un mouvement brownien au sens de la définition 1.

Réciproquement, tout mvt brownien (X_t), au sens de la définition 1, est un $\mathcal{G}_t$ - mouvement brownien où $\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s ; s \leq t\}$ $(t \geq 0)$ est la filtration naturelle associée à (X_t). (Cf. la Prop. 5).

Proposition 6 :

Soit $X = (X_t) = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ un $\mathcal{F}_t$ - mvt brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$.

Alors, pour tous $0 \leq s < t$, on a :

$E\{X_t^\ell - X_s^\ell / \mathcal{F}_s\} = 0$ p.s. $\ell = 1, 2, \dots, d$.

$E\{(X_t^\ell - X_s^\ell)(X_t^k - X_s^k) / \mathcal{F}_s\} = (t-s).\, \delta_{(\ell,k)}$ p.s. $\ell, k \in \{1, 2, \dots, d\}$

où $\delta_{(\ell,k)} = 0$ si $\ell \neq k$, $\delta_{(\ell,\ell)} = 1$.

Donc si $E\{X_0^2\} < \infty$, chaque $(X_t^\ell)_{t \geq 0}$ $\ell = 1, 2, \dots, d$ est une $\mathcal{F}_t$ - martingale continue et, pour tous ℓ et $k \in \{1, 2, \dots, d\}$, $(X_t^\ell . X_t^k - \delta_{(\ell,k)} . t)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ - martingale continue.

Nous verrons, plus tard, que ces propriétés caractérisent le mouvement brownien.

Dém : Exercice.

□.

Propriété de Markov du mouvement brownien.

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mvt brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$; on vérifie facilement que, pour tout temps fixe $T > 0$, le processus $\widetilde{X} = (X_{T+t} - X_T)_{t \geq 0}$ est un mvt brownien issu de zéro, <u>indépendant</u> de la tribu $\mathcal{F}_T$ du passé avant l'instant T. C'est la propriété de Markov simple du mvt brownien. Nous allons voir qu'elle s'étend à tout $\mathcal{F}_t$ - temps d'arrêt T.

Proposition 7 : (propriété de Markov forte).

Soit τ un $\mathcal{F}_t$ - temps d'arrêt p.s. fini et soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$, alors :

i) Le processus $X^* = (X_{t+\tau} - X_\tau)_{t \geq 0}$ est un mvt brownien issu de zéro, indépendant de la tribu $\mathcal{F}_\tau$ des évènements antérieurs à τ.

ii) Pour toute application f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, mesurable bornée, on a :

$$E\{ f(X_{t+\tau}) / \mathcal{F}_\tau \} = P_t f(X_\tau) \quad \text{p.s.} \quad (t > 0)$$

où $$P_t f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2t} |x-y|^2\right) f(y)\, dy$$

Dém. :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\tau_n = \sum_{k \geq 0} \frac{k+1}{2^n} \cdot 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}(\tau)$

On vérifie facilement que τ_n est un temps d'arrêt et que $\tau_n \downarrow \tau$, quand $n \longrightarrow +\infty$.

Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$ et soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < \infty$.

On a, pour toute application φ de $(\mathbb{R}^d)^m$ dans $\mathbb{R}$ continue et bornée,

$E\{ 1_A\, \varphi(X^*_{t_1}, \dots, X^*_{t_m}) \} = E\{ 1_A\, \varphi(X_{t_1+\tau} - X_\tau, \dots, X_{t_m+\tau} - X_\tau) \}$

$= \lim_{n \to \infty} E\{ 1_A \cdot \varphi(X_{t_1+\tau_n} - X_{\tau_n}, \dots, X_{t_m+\tau_n} - X_{\tau_n}) \}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $A \in \mathcal{F}_{\tau_n}$, puisque $\tau \leq \tau_n$

et $E\{ 1_A \cdot \varphi(X_{t_1+\tau_n} - X_{\tau_n}, \dots, X_{t_m+\tau_n} - X_{\tau_n}) \} = \sum_{d \in D_n} E\{ 1_{A \cap (\tau_n = d)}\, \varphi(X_{t_1+d} - X_d, \dots, X_{t_m+d} - X_d) \}$

$= \sum_{d \in D_n} P(A \cap (\tau_n = d))\, E\{ \varphi(X_{t_1+d} - X_d, \dots, X_{t_m+d} - X_d) \}$ (Propriété de Markov simple)

$= P(A)\, E\{ \varphi(X_{t_1} - X_0, \dots, X_{t_m} - X_0) \}$ $\quad \left(D_n = \{ \frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{N} \} \right)$.

On en déduit la propriété i) car le processus $(X_t - X_0)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien issu de zéro.

La propriété ii) est une conséquence de i), laissée en exercice. □

Proposition 8 :

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel, issu de zéro.

Soient $0 \leq u < v$ et Δ une partition de $[u,v]$, $\Delta : t_0 = u < t_1 < \dots < t_n = v$.

On considère $r_1(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|$ et $r_2(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2$. Alors :

i) $r_2(\Delta) \xrightarrow[|\Delta| \to 0]{} v-u$ dans L^2

ii) $\sup_{\Delta \in \mathcal{P}} r_1(\Delta) = +\infty$ p.s.

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des partitions de $[u,v]$.

Dém. :

Si $Z \sim N_1(0,1)$, $E\{Z^4\} = 3$. Donc :

$$E\{(r_2(\Delta))^2\} = E\Big\{\Big(\sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2\Big)^2\Big\}$$

$$= \sum_i E\{|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^4\} + 2\sum_{i<j} E\{|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2 \cdot |X_{t_{j+1}} - X_{t_j}|^2\}$$

$$= 3 . \sum_i (t_{i+1} - t_i)^2 + 2 \sum_{i<j} (t_{i+1} - t_i).(t_{j+1} - t_j)$$

$$= 2 . \sum_i (t_{i+1} - t_i)^2 + \Big\{\sum_i (t_{i+1} - t_i)\Big\}^2$$

$$= 2 \sum_i (t_{i+1} - t_i)^2 + (v-u)^2.$$

De plus $E\{r_2(\Delta)\} = \sum_i (t_{i+1} - t_i) = v-u$;

d'où $E\{(r_2(\Delta) - (v-u))^2\} = 2 . \sum_i (t_{i+1} - t_i)^2 \leq 2 \sup_i (t_{i+1} - t_i)\,(v-u) \longrightarrow 0$

quand $|\Delta| = \sup_i (t_{i+1} - t_i) \longrightarrow 0$

Il existe donc une suite Δ^k de subdivisions de $[u,v]$ telle que :

$r_2(\Delta^k) \longrightarrow v-u$ p.s., quand $k \to +\infty$. On voit que :

$$\sup_{\Delta} r_1(\Delta) \geq r_1(\Delta^k) = \sum_i |X_{t^k_{i+1}} - X_{t^k_i}| \geq \frac{\sum_i |X_{t^k_{i+1}} - X_{t^k_i}|^2}{\sup_i |X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i}|} \xrightarrow[\text{p.s.}]{} +\infty$$

quand $k \to +\infty$ $\square$.

On voit ainsi que les trajectoires du mouvement brownien sont p.s. <u>à variation infinie</u> sur tout intervalle $[u,v]$.

Théorème 9 : (loi du logarithme itéré).

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel, issu de zéro ; alors :

$$P\left\{ \overline{\lim_{t \searrow 0}} \frac{X_t}{\sqrt{2t \operatorname{Log}(\operatorname{Log}(1/t))}} = 1 \right\} = 1 \qquad (*)$$

donc $P\left\{ \underline{\lim_{t \searrow 0}} \frac{X_t}{\sqrt{2t \operatorname{Log}(\operatorname{Log}(1/t))}} = -1 \right\} = 1$

et $P\left\{ \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{X_t}{\sqrt{2t \operatorname{Log}(\operatorname{Log}(t))}} = 1 , \underline{\lim_{t \to \infty}} \frac{X_t}{\sqrt{2t \operatorname{Log}(\operatorname{Log}(t))}} = -1 \right\} = 1$.

Dém. :

Nous admettrons la démonstration de l'égalité (*) (basée essentiellement sur le Lemme de Borel Cantelli, Cf. Mc. Kean [12] p.e.)

La deuxième égalité s'obtient en remplaçant X_t par $-X_t$ dans (*)

La troisième égalité s'obtient en remplaçant X_t par $Y_t = t \cdot X_{1/t}$, $Y_0 = 0$, qui est un mouvement brownien. □.

Théorème 10 :

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de zéro ; alors :

$$P\left\{ \overline{\lim_{t \searrow 0}} \frac{1}{\sqrt{2t \operatorname{Log}(1/t)}} \cdot \underset{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ |t_2 - t_1| \leq t}}{\operatorname{Max}} |X_{t_2} - X_{t_1}| = 1 \right\} = 1 .$$

Dém :

Cf. Mc. Kean [12].

Cette propriété entraine que, p.s., les trajectoires du mouvement brownien $(X_t)_{t \geq 0}$ sont höldériennes d'ordre α, pour tout $0 < \alpha < 1/2$ et qu'elles ne sont dérivables en aucun point de $\mathbb{R}_+$.

□

Une construction du mouvement brownien :

L'existence mathématique du mvt brownien n'est pas évidente ; N. Wiener en a donné, le premier, une construction rigoureuse (1923) et, pour cette raison, le mvt brownien est parfois appelé processus de Wiener.

Lemme 11 :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. gaussiennes : $X_n \sim N_1(m_n, \sigma_n)$

On suppose que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ en probabilité.

Alors X est une v.a.r. gaussienne ; de plus $X_n \longrightarrow X$ dans L^2.

Dém : Exercice : utiliser les fonctions caractéristiques. □

Théorème 12 : (Mesures browniennes).

Soit G l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dx)$; si f et g appartiennent à G, on note $\langle f, g \rangle = \int f(x)\, g(x)\, dx$.

On peut construire un processus gaussien centré $\widetilde{B} = \left(\widetilde{B}(g) \; ; \; g \in G\right)$, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que :

Pour tous f et g appartenant à G et α, β dans $\mathbb{R}$:

i) $\langle f, g \rangle = E\{\widetilde{B}(f) . \widetilde{B}(g)\}$

ii) $\widetilde{B}(\alpha f + \beta g) = \alpha \widetilde{B}(f) + \beta \widetilde{B}(g)$ p.s.

L'isométrie : $g \in G \longrightarrow \widetilde{B}(g) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelée " mesure brownienne " : ce n'est pas une vraie mesure aléatoire, car l'ensemble négligeable apparaissant en ii) dépend de f et g.

Dém :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi $N_1(0,1)$, définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de l'espace de Hilbert
$G = L^2(\mathbb{R}, dx)$.

Pour tout $g \in G$, la série $\sum_{n\geq 0} X_n(\omega) . \langle g, e_n \rangle$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. En effet :

$$E\left\{ \left(\sum_{n=p}^{p+q} X_n . \langle g, e_n \rangle \right)^2 \right\} = \sum_{n=p}^{p+q} \left(\langle g, e_n \rangle \right)^2 \longrightarrow 0 \text{, quand } p \text{ et } q \to \infty$$

Posons $\widetilde{B}(g) = \sum_{n\geq 0} X_n . \langle g, e_n \rangle$

On voit, d'après le Lemme 11, que $\widetilde{B}(g)$ est une v.a.r. gaussienne centrée et que $E\{(\widetilde{B}(g))^2\} = \langle g, g \rangle$.

La propriété a) est immédiate à vérifier, par construction et on en déduit, par polarisation, que : $E\{\widetilde{B}(f) . \widetilde{B}(g)\} = \langle f, g \rangle$ si f et $g \in G$.

Soit $G' \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ le sous-espace fermé engendré par les v.a.r. $\widetilde{B}(g)$, $(g \in G)$; on vérifie facilement que G' est isomorphe, grâce à la correspondance $g \longmapsto \widetilde{B}(g)$, à l'espace de Hilbert $G = L^2(\mathbb{R}, dx)$. □.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, notons :

$B_t = \widetilde{B}(1_{[0,t]})$.

On voit que le processus $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien centré, de covariance $E\{B_s . B_t\} = \langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle = \mathrm{Min}(s,t)$. $(s, t \in \mathbb{R}_+)$.

Le processus $(B_t)_{t\geq 0}$, ainsi obtenu, n'est pas continu, en général. Remarquons cependant que, pour tous $0 \leq s < t$, $\frac{B_t - B_s}{\sqrt{t-s}} \sim N_1(0, 1)$ et donc

$$E\{(B_t - B_s)^4\} = C(t-s)^2 \quad \text{où} \quad C = E\{\xi^4\} \text{ si } \xi \sim N_1(0,1)$$

Le Théorème suivant (Critère de Kolmogorov) permet alors de montrer que $B = (B_t)_{t\geq 0}$ admet une modification <u>continue</u> $B^* = (B^*_t)_{t\geq 0}$ <u>qui est donc un mvt brownien réel, issu de zéro.</u>

Théorème 13. (Kolmogorov) :

Soit $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans un espace de banach, tel que, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, on ait

$$E\{\|Z_t - Z_s\|^p\} \leq A.\,|t-s|^{1+\varepsilon}$$

où $p \geq 1$, $\varepsilon > 0$ et A sont fixés.

Il existe alors un processus $Z^* = (Z^*_t)_{t \geq 0}$ <u>à trajectoires continues</u> tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Z_t = Z^*_t$ p.s.

Dém. :

Soient $\mathcal{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n} \;;\; k \in \mathbb{N} \right\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

et $B_n = \left\{ (s,t) \;;\; s,t \leq n \;;\; s,t \in \mathcal{D}_n \;;\; |s-t| \leq 2^{-n} \right\}$;

$$U_n = \sup_{(s,t) \in B_n} \|Z_t - Z_s\|.$$

1ère étape : $\sum_n U_n < \infty$ p.s. En effet :

$$E\{U_n^p\} = E\Big\{\sup_{(s,t) \in B_n} \|Z_t - Z_s\|^p\Big\} \leq \sum_{(s,t) \in B_n} E\{\|Z_t - Z_s\|^p\}$$

$$\leq 2An2^n.\,2^{-n-n\varepsilon} = 2An.2^{-n\varepsilon}$$

donc $E\left\{\sum_n U_n\right\} = \sum_n E\{U_n\} \leq \sum_n \left(E\{U_n^p\}\right)^{1/p} < \infty$

et $\sum_n U_n < \infty$ p.s.

2ème étape : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, soit $\left(Z^n_t(\omega)\right)_{t \geq 0}$ la fonction linéaire par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ qui est telle que :

$Z^n_t(\omega) = Z_t(\omega)$, pour tout $t \in \mathcal{D}_n$:

si $t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$, $Z^n_t(\omega) = Z_{\frac{k}{2^n}}(\omega) + 2^n\left(t - \frac{k}{2^n}\right).\left(Z_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - Z_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\right)$.

On vérifie alors que : $\sup_{t \leq n} \|Z^{n+1}_t - Z^n_t\| \leq 4U_{n+1}$.

La série $\sum_n \|Z^{n+1}_t - Z^n_t\|$ converge donc p.s. uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$. Il existe un processus continu $(Z^*_t)_{t \geq 0}$ tel que $Z^n_t \longrightarrow Z^*_t$ p.s. uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

Soit $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{D}_n$. $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$ et si $d \in \mathcal{D}$:

$Z_d = Z^*_d$ p.s., par construction.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, il existe $s_n \in \mathcal{D}$ t.q. $s_n \longrightarrow t$, donc

$Z_{\rho_n} \longrightarrow Z_t$ dans L^p. Il existe une sous-suite $(\rho'_n) \subset (\rho_n)$ t.q. $Z_{\rho'_n} \longrightarrow Z_t$ p.s..

Donc $Z_{\rho'_n} = Z^*_{\rho'_n} \longrightarrow Z^*_t = Z_t$ p.s. $\square$.

Intégrale de Wiener.

Théorème 14 :

Etant donné un mouvement brownien $B = (B_t) = (B^1_t, \ldots, B^d_t)$ à valeurs $\mathbb{R}^d$, issu de zéro, défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, notons S, le sous-espace gaussien de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, engendré par les v.a.r. $\{B^i_t \,;\, t \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, d\}$

Il existe une bijection linéaire continue I et une seule, entre l'espace $L^2_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{R}_+, dx)$ et S, telle que :

i) Si $g = 1_{]s,t]}\, a$ où $0 \leqslant s < t$ et $a \in \mathbb{R}^d$:

$$I(g) = a.(B_t - B_s).$$

ii) Si f et g appartiennent à $L^2_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{R}_+, dx)$:

$$\int f(x).g(x)\,dx = E\{I(f).I(g)\}.$$

On note : $I(g)(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} g(s)\,dB_s(\omega)$ p.s.

(Intégrale de Wiener de la fonction g).

Dém :

Soit $\mathcal{T} = \{ f \in L^2_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{R}_+, dx)$ t.q. $f = \sum_{i=0}^{n} a_i . 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ où $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$; $n \in \mathbb{N}$; $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d \}$

$\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel dense dans $L^2_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{R}_+, dx)$.

Si $f \in \mathcal{T}$, $f = \sum_{finie} a_i . 1_{]t_i, t_{i+1}]}$, posons :

$$(*) \quad I(f) = \sum_{finie} a_i . (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

On vérifie facilement que la définition $(*)$ de $I(f)$ ne dépend pas de la décomposition choisie pour f et que l'application $f \longmapsto I(f)$ est linéaire.

Remarquons, de plus, que en vertu des propriétés du mvt brownien :

$$E\left\{\left(I(f)\right)^2\right\} = \sum_{i,j} E\left\{\left(a_i\cdot(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})\right)\cdot\left(a_j\cdot(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})\right)\right\}$$

$$= \sum_i E\left\{\left(a_i\cdot(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})\right)^2\right\} = \sum_i |a_i|^2\,(t_{i+1}-t_i) = \int |f(x)|^2\,dx$$

L'application I se prolonge donc par continuité à $L^2_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{R}_+, dx)$

soit $f \in L^2_{\mathbb{R}^d}$, il existe une suite f_n d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $\|f_n - f\|_2 \longrightarrow 0$.

Donc $\|f_n - f_m\|_2 = \|I(f_n) - I(f_m)\|_{L^2(\Omega,\mathcal{A},P)} \longrightarrow 0$, quand n et $m \to \infty$

On pose $I(f) = \lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$.

Cette limite ne dépend pas de la suite (f_n) choisie.

On a, de plus, $\|f\|_2^2 = E\left\{\left(I(f)\right)^2\right\}$ et, par polarisation

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = E\left\{ I(f)\cdot I(g)\right\}$$

pour tous f et g dans $L^2_{\mathbb{R}^d}$

L'unicité de l'application I ainsi définie est évidente.

L'application I est une isométrie de $L^2_{\mathbb{R}^d}$ sur $\mathcal{S}$ car, d'une part, $I(L^2_{\mathbb{R}^d})$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{S}$ et d'autre part, on a : pour tous $t \geq 0$ et $i = 1, \ldots, d$ $B_t^i \in I(L^2_{\mathbb{R}^d})$, donc $I(L^2_{\mathbb{R}^d})$ est dense dans $\mathcal{S}$

□.

<u>Remarque</u> :

On voit que, pour tous f et g dans $L^2_{\mathbb{R}^d}$,

$I(f) \sim N_1(0, \|f\|_2^2)$ et que les v.a.r. $I(f)$ et $I(g)$ sont indépendantes si et seulement si $\int f(x)g(x)\,dx = 0$

Corollaire 15 :

1) Pour tous $t \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, d$ et $f \in L^2_{\mathbb{R}^d}$, on a :

$$E\left\{ B^i_t \cdot \int_{\mathbb{R}_+} f(s)\, dB_s \right\} = \int_0^t f^i(s)\, ds$$

où $f^i(s)$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de $f(s) = (f^1(s), \dots, f^d(s))$

2) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2_{\mathbb{R}^d}$, alors $(I(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. gaussiennes centrées réduites indépendantes et on a, pour tout $t \geq 0$, le développement suivant dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

$$B_t(\omega) = \sum_{n \geq 0} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f_n(s)\, dB_s \right) \cdot \int_0^t f_n(s)\, ds \;.$$

Dém :

1) est une conséquence immédiate de la propriété ii) du Th. 13.

2) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une b.o. de $L^2_{\mathbb{R}^d}$, $(I(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une b.o. de S (espace gaussien) ; de plus :

$$\langle B^i_t , I(f_n) \rangle_S = \int_0^t f^i_n(s)\, ds \,.$$

□.

Mesure de Wiener et mouvement brownien canonique :

Nous avons vu que, partant d'un mvt brownien issu de zéro, on peut en construire une infinité de versions (cf. Prop. 3 et 4). Toutes ces versions ont cependant même loi sur l'espace canonique : c'est la mesure de Wiener.

On appelle « espace canonique », l'espace $W = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ et de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_W$.

Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mvt brownien quelconque, issu de zéro, à valeurs $\mathbb{R}^d$, défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On peut considérer B comme une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et à valeurs dans $(W, \mathcal{B}_W)$: pour presque tout $\omega \in \Omega$, $B(\omega) \in W$ est la trajectoire continue $t \longmapsto B_t(\omega)$.

<u>Proposition 16</u> :

Il existe une <u>unique</u> mesure de probabilité μ sur l'espace $(W, \mathcal{B}_W)$ telle que, pour tous $0 < t_1 < \dots < t_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et tous $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$:

$$\mu\{w \in W \text{ t.q. } w_{t_1} \in A_1, w_{t_2} \in A_2, \dots, w_{t_n} \in A_n\}$$
$$= \int_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} p_{t_1}(x_1)\, p_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \cdots p_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n \qquad (*)$$

où $p_t(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{2t}\right)$.

De plus, $B = (B_t)_{t \geq 0}$ étant un mvt brownien, issu de zéro, à valeurs $\mathbb{R}^d$, on a, pour toute application Φ mesurable et bornée (ou positive) de $(W, \mathcal{B}_W)$ dans $\mathbb{R}$:

$$E\{\Phi(B)\} = \int_W \Phi(w)\, \mu(dw).$$

μ est appelée <u>mesure de Wiener</u> d-dimensionnelle.

<u>Dém</u> :

On sait construire un mvt brownien $B = (B_t)_{t \geq 0}$, issu de zéro, à valeurs $\mathbb{R}^d$; si μ est la loi de B considéré comme une v. a. à valeurs dans l'espace canonique $(W, \mathcal{B}_W)$, il est immédiat de constater que μ vérifie la propriété $(*)$ puisque :

$$P\{B_{t_1} \in A_1, B_{t_2} \in A_2, \dots, B_{t_n} \in A_n\} = \mu\{w : w_{t_1} \in A_1, \dots, w_{t_n} \in A_n\}.$$

L'unicité de μ est une conséquence du fait qu'elle est entièrement déterminée sur la famille $\mathcal{C}$ des ensembles cylindriques de W qui est stable par intersection finie et engendre $\mathcal{B}_W$ (cf. Appendice).

Sur l'espace de probabilité $(W = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{B}_W, \mu)$ où μ est la mesure de Wiener, considérons le processus des coordonnées $\Pi = (\Pi_t(w))_{t \geqslant 0}$:

$$\Pi_t(w) = w_t \quad \text{si} \quad w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d).$$

On voit que, sous la probabilité μ, le processus $(\Pi_t)_{t \geqslant 0}$ est un mouvement brownien d-dimensionnel, issu de zéro, appelé <u>mouvement brownien canonique</u>.

Soit $H = \left\{ h \in W \text{ t.q. pour tout } t \geqslant 0 : h(t) = \int_0^t \dot{h}(s)\,ds \text{ où } \dot{h} \in L^2_{\mathbb{R}^d} \right\}$.

H est un espace vectoriel ; on le munit du produit scalaire :

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}_+} \dot{h}_1(s) . \dot{h}_2(s)\,ds .$$

Il est évident que H, muni de ce produit scalaire, est un espace de Hilbert isomorphe à $L^2_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{R}_+, dx)$ et que l'injection canonique de H dans W est continue.

On appelle souvent H : <u>espace de Caméron - Martin</u>.

Soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de H :

$$h_n(t) = \int_0^t \dot{h}_n(s)\,ds \quad (t \geqslant 0) \quad \text{où } \dot{h}_n \text{ est une b.o. de } L^2_{\mathbb{R}^d}.$$

L'assertion 2) du Corollaire 15, appliquée au mvt brownien canonique $\Pi = (\Pi_t)_{t \geqslant 0}$, montre que, si on pose, pour μ presque tout $w \in W$:

$$(w, h_n) = \int_{\mathbb{R}_+} \dot{h}_n(s)\,d\Pi_s(w) = \int_{\mathbb{R}_+} \dot{h}_n(s)\,dw_s ,$$

les v.a.r. (w, h_n), $(n \in \mathbb{N})$, sont indépendantes, gaussiennes centrées réduites et qu'on a, pour tout $t \geqslant 0$, le développement suivant dans $L^2(W, \mathcal{B}_W, \mu)$:

$$(**) \quad \Pi_t(w) = w_t = \sum_{n \geqslant 0} (w, h_n) . h_n(t) .$$

<u>Remarque</u> : On peut démontrer, en utilisant un théorème de convergence des martingales vectorielles, que pour tout $T \geqslant 0$ et pour μ presque tout w : $\lim_{N \to \infty} . \sup_{t \in [0,T]} \left| w_t - \sum_{n=0}^{N} (w, h_n) . h_n(t) \right| = 0$.

Théorème 17 (Formule de Caméron - Martin).

Soit Φ une application mesurable et bornée de l'espace $(W = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{B}_W)$ dans $\mathbb{R}$; on a, pour tout élément h de l'espace de Caméron - Martin H, la formule suivante :

$$(1) \quad E_\mu\{\Phi(w+h)\} = E_\mu\{\Phi(w).\exp((w,h) - \tfrac{1}{2}|h|_H^2)\}$$

où μ est la mesure de Wiener et $|h|_H^2 = \int_{\mathbb{R}_+} |\dot{h}_s|^2 ds$

Dém.

Pour démontrer la formule (1), on peut supposer, par exemple, que l'application Φ est de la forme :

$\Phi(w) = f(w_{t_1}, w_{t_2}, \dots, w_{t_n})$ où $0 \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_n$ $(n \in \mathbb{N})$

et $f \in \mathcal{C}_k^\infty(\mathbb{R}^n)$ (de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact).

Soit $h \in H$, $h \neq 0$. Il existe une b.o. de H, $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $h_0 = \frac{h}{|h|}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, soit $w^{(m)}$ la trajectoire définie (μ p.s.) par :

$$w^{(m)}(t) = \sum_{\ell=0}^{m} (w, h_\ell) . h_\ell(t) \qquad (t \geqslant 0)$$

On vérifie facilement que :

$$\lim_{m\to\infty} E_\mu\{\Phi(w^{(m)} + h)\} = E_\mu\{\Phi(w+h)\} \quad \text{et que :}$$

$$\lim_{m\to\infty} E_\mu\{\Phi(w^{(m)})\exp((w,h) - \tfrac{1}{2}|h|_H^2)\} = E_\mu\{\Phi(w)\exp((w,h) - \tfrac{1}{2}|h|_H^2)\}.$$

Pour démontrer la formule (1), il suffit donc de vérifier que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$E_\mu\{\Phi(w^{(m)} + h)\} = E_\mu\{\Phi(w^{(m)})\exp((w,h) - \tfrac{1}{2}|h|_H^2)\}.$$

On se ramène à un calcul simple en dimension finie car :

$$w^{(m)} + h = [(w, h_0) + |h|] . \frac{h}{|h|} + \sum_{\ell=1}^{m} (w, h_\ell) . h_\ell \ ;$$

les v.a. $((w, h_\ell))_{\ell\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes, de même loi $N_1(0,1)$ donc :

$$E_\mu\left\{\Phi(w^{(m)}+h)\right\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{m+1}} \cdot \int_{\mathbb{R}^{m+1}} \Phi\left((x_0+|h|).h_0 + \sum_{l=1}^{m} x_l . h_l\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{m} x_l^2\right) dx_0 \ldots dx_l \ldots dx_m$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{m+1}} \cdot \int_{\mathbb{R}^{m+1}} \Phi\left(x'_0 . h_0 + \sum_{l=1}^{m} x'_l . h_l\right) \exp\left(x'_0 . |h| - \frac{1}{2}|h|^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{m} {x'_l}^2\right) dx'_0 \ldots dx'_m$$

$$= E_\mu\left\{\Phi(w^{(m)}) \exp\left(\left(w, \frac{h}{|h|}\right).|h| - \frac{1}{2}|h|^2\right)\right\} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire 18 :

Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mvt brownien, issu de zero, à valeurs $\mathbb{R}^d$, défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $h \in H$.

Si $Z = \exp\left(\int_{\mathbb{R}_+} \dot{h}_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} |\dot{h}_s|^2 ds\right)$, on a :

$E(Z) = 1$. On définit une nouvelle probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{A})$ par la formule $\frac{dQ}{dP} = Z$.

Alors, pour la probabilité Q, le processus translaté : $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0} = (B_t - h_t)_{t\geq 0}$ est un mvt brownien, issu de zero.

Dém :

On sait que $\int_{\mathbb{R}_+} \dot{h}_s \, dB_s \sim N_1(0, |h|_H^2)$, donc

$E\left\{\exp\left(\int_{\mathbb{R}_+} \dot{h}_s \, dB_s\right)\right\} = \exp\left(\frac{1}{2}|h|_H^2\right)$ et $E(Z) = 1$.

La mesure de Wiener μ étant la loi de B sous P, la formule (1) de Caméron Martin signifie que :

$$E_P\left\{\Phi(B+h)\right\} = E_P\left\{\Phi(B)\exp\left(\int_{\mathbb{R}_+} \dot{h}_s \, dB_s - \frac{1}{2}|h|_H^2\right)\right\}$$

et entraine que :

$$E_P\left\{\Phi(B)\right\} = E_P\left\{\Phi(B-h).Z\right\} = E_Q\left\{\Phi(B-h)\right\}$$

pour toute application Φ mesurable et bornée de $(W, \mathcal{B}_W)$ dans $\mathbb{R}$.

La loi de B sous P est donc égale à la loi de $\tilde{B} = B - h$ sous Q. $\square$.

Chap. 2. Intégrales stochastiques.

I) Intégrales stochastiques relativement au mouvement brownien.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré et $B = (B_t)_{t\geq 0} = (B_t^1, \dots, B_t^d)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mvt brownien, issu de zéro, à valeurs $\mathbb{R}^d$.

On supposera, dans la suite, que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite et complète.

1) Intégrale stochastique des fonctions étagées :

Un processus $\phi = (\phi_t)_{t\geq 0}$, à valeurs $\mathbb{R}^d$, est étagé s'il existe une subdivision : $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ telle que $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ et une suite de v.a. bornées à valeurs $\mathbb{R}^d$, $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$, telles que U_i soit $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable, pour tout $i\in\mathbb{N}$, vérifiant :

$$\phi_t(\omega) = U_0(\omega).1_{\{0\}}(t) + \sum_{i\in\mathbb{N}} U_i(\omega).1_{]t_i, t_{i+1}]}(t), \text{ pour tout } (t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega$$

On voit que le processus $(\phi_t)_{t\geq 0}$ est mesurable et adapté (il est même continu à gauche).

On notera $\mathcal{E}$ l'ensemble des processus étagés : c'est un espace vectoriel.

Si $\phi\in\mathcal{E}$, on définit l'intégrale stochastique de ϕ, $J(\phi)$, par la formule :

$$J(\phi)(t) = \begin{cases} X_t = \int_0^t \phi_s \, dB_s = U_0.(B_{t_1}-B_{t_0}) + U_1(B_{t_2}-B_{t_1}) + \dots + U_k.(B_t - B_{t_k}) \quad (*) \\ \qquad\qquad \text{si } t\in[t_k, t_{k+1}] \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

(si x et $y\in\mathbb{R}^d$, on note $x.y = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ le produit scalaire habituel et $|x|^2 = x.x$). Noter que $(*)$ ne dépend pas de la décomposition choisie pour ϕ.

Les trajectoires du mvt brownien étant continues, on voit, tout de suite, que le processus $(J(\phi)(t))_{t\geq 0}$ est continu, nul en 0, $\mathcal{F}_t$ - adapté.

L'application J de $\mathcal{C}$ dans l'espace des processus est évidemment linéaire.

Propriétés de l'application J :

1) Pour tout $\phi \in \mathcal{C}$, le processus $(X_t) = J(\phi)$ est une martingale réelle, continue, centrée, de carré intégrable. (nulle en zéro)

2) Si ϕ et $\psi \in \mathcal{C}$, le processus

$$M_t = X_t \cdot Y_t - \int_0^t \phi_s \cdot \psi_s \, ds \qquad (t \geq 0)$$

(où $X_t = J(\phi)(t)$, $Y_t = J(\psi)(t)$)

est une martingale.

3) Pour tout $\phi \in \mathcal{C}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$E\left\{ \left(J(\phi)(t) \right)^2 \right\} = E\left\{ \int_0^t |\phi_s|^2 \, ds \right\}.$$

Dém :

Compte tenu des propriétés du mvt brownien, la preuve de 1) est facile et laissée au lecteur.

3) est une conséquence immédiate de 2).

Pour démontrer 2), il suffit de supposer que $\phi = \psi$ et de raisonner ensuite par polarisation : $J(\phi) \cdot J(\psi) = \frac{1}{4}\left\{ (J(\phi+\psi))^2 - (J(\phi-\psi))^2 \right\}$

Soient $0 \leq s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$, il faut montrer que :

$$E\left\{ 1_A \left[X_t^2 - X_s^2 - \int_s^t |\phi_u|^2 du \right] \right\} = 0.$$

On a, puisque (X_t) est une martingale de carré intégrable :

$$(1) : \quad E\left\{ 1_A (X_t - X_s)^2 \right\} = E\left\{ 1_A \left(X_t^2 - 2 X_t X_s + X_s^2 \right) \right\}$$

$$= E\left\{ 1_A \left(X_t^2 - X_s^2 \right) \right\}$$

On écrit $\phi_t = U_0 \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_i U_i \, 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$

et $X_t = U_0 \cdot B_{t_1} + U_1 \cdot (B_{t_2} - B_{t_1}) + \dots + U_k (B_t - B_{t_k})$ si $t \in]t_k, t_{k+1}]$.

Il existe $\ell \leq k$ tel que $s \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$, donc :

$$(2) \quad 1_A \cdot (X_t - X_s) = \tilde{U}_\ell \cdot (B_{t_{\ell+1}} - B_s) + \tilde{U}_{\ell+1} \cdot (B_{t_{\ell+2}} - B_{t_{\ell+1}}) + \dots + \tilde{U}_k \cdot (B_t - B_{t_k})$$

où $\tilde{U}_p = 1_A \cdot U_p$, $p \in \{\ell, \ell+1, \dots, k\}$.

Soient p et $p' \in \{l, l+1, \dots, k\}$:

si $p < p'$:

$$E\{ \tilde{U}_p . (B_{t_{p+1}} - B_{t_p}) . \tilde{U}_{p'} . (B_{t_{p'+1}} - B_{t_{p'}}) \}$$

$$= E\{ \tilde{U}_p . (B_{t_{p+1}} - B_{t_p}) . \tilde{U}_{p'} . E\{ (B_{t_{p'+1}} - B_{t_{p'}}) / \mathcal{F}_{t_{p'}} \} = 0$$

si $p = p'$

$$E\{ (\tilde{U}_p . (B_{t_{p+1}} - B_{t_p}))^2 \} = E\{ |\tilde{U}_p|^2 \} (t_{p+1} - t_p)$$

[On utilise le fait que : $E\{ (B^i_{t_{p+1}} - B^i_{t_p}) . (B^j_{t_{p+1}} - B^j_{t_p}) / \mathcal{F}_{t_p} \} = \delta_{(i,j)} . (t_{p+1} - t_p)$]

En revenant à l'expression (2), on voit que :

$$E\{ 1_A (X_t - X_s)^2 \} = \sum_{p,p'=l}^{k} E\{ \tilde{U}_p . (B_{t_{p+1}} - B_{t_p}) . \tilde{U}_{p'} (B_{t_{p'+1}} - B_{t_{p'}}) \}$$

$$= \sum_{p=l}^{k} E\{ |\tilde{U}_p|^2 \} . (t_{p+1} - t_p) = E\{ 1_A . \sum_{p=l}^{k} |U_l|^2 (t_{p+1} - t_p) \}$$

$$= E\{ 1_A \int_s^t |\phi_u|^2 du \} \quad . \square$$

2) Processus de Λ^2 :

On considère l'ensemble Λ^2 des processus $\phi = (\phi_s)_{s \geq 0}$ à valeurs $\mathbb{R}^d$, adaptés, mesurables, tels que :

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $E\{ \int_0^t |\phi_s|^2 ds \} < \infty$.

Lemme 1 :

Soit $\phi \in \Lambda^2$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t > 0$, il existe $\psi \in \mathcal{C}$ tel que $E\{ \int_0^t |\phi_s - \psi_s|^2 ds \} \leq \varepsilon$.

Dém. :

Soit $\phi_n(s) = \phi_s . 1_{[-n,n]}(\phi_s) \qquad (n \in \mathbb{N})$.

On voit que $E\{ \int_0^t |\phi_s - \phi_n(s)|^2 ds \} \longrightarrow 0$, quand $n \to \infty$

grâce au Th. de Lebesgue.

Pour démontrer le Lemme on peut donc supposer que ϕ est borné.

Soient $s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_k(s) = \frac{l}{2^k}$ si $\frac{l}{2^k} < s \leq \frac{l+1}{2^k}$

Posons $\Phi_s = \phi_s . 1_{(0 \leq s \leq t)}$. On a, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} |\Phi_{\alpha_k(s)+u} - \Phi_{s+u}|^2 du \longrightarrow 0 \quad , \text{ quand } k \to \infty$$

(on utilise ici le fait que si $f \in L^2(\mathbb{R}, du)$, alors $\int_{\mathbb{R}} | f(u) - f(u+h) |^2 du \longrightarrow 0$, quand $h \to 0$; ce qui se démontre en approchant f dans L^2 par des fonctions continues à support compact).

Le Th. de Lebesgue entraine alors que :

$$E\left\{ \int_{-t}^{t} ds . \int_{\mathbb{R}.} | \Phi_{\alpha_k(s)+u} - \Phi_{s+u} |^2 du \right\} \longrightarrow 0 \text{, quand } k \to \infty$$

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}.} E\left\{ \int_{-t}^{t} | \Phi_{\alpha_k(s)+u} - \Phi_{s+u} |^2 ds \right\} du \longrightarrow 0$, quand $k \to \infty$

Il existe une sous-suite $k_p \to +\infty$ telle que, pour du presque tout u : $\displaystyle E\left\{ \int_{-t}^{t} | \Phi_{\alpha_{k_p}(s)+u} - \Phi_{s+u} |^2 ds \right\} \longrightarrow 0$, quand $p \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe donc $u \in]0, t[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$E\left\{ \int_{-t}^{t} | \Phi_{\alpha_n(s)+u} - \Phi_{s+u} |^2 ds \right\} < \varepsilon$$

i.e. $\displaystyle E\left\{ \int_{-t+u}^{t+u} | \Phi_{\alpha_n(s-u)+u} - \Phi_s |^2 ds \right\} < \varepsilon$

en particulier : $\displaystyle E\left\{ \int_{0}^{t} | \Phi_{\alpha_n(s-u)+u} - \Phi_s |^2 ds \right\} < \varepsilon$

Le processus $\left(\Phi_{\alpha_n(s-u)+u} \right)_{s \in \mathbb{R}_+}$ étant adapté et étagé, on voit que le Lemme est démontré. $\square$.

Notons $\mathcal{M}_c^2$ l'espace des martingales réelles, continues, de carré intégrable.

<u>Théorème 1</u> :

Il existe une unique application linéaire I de Λ^2 dans $\mathcal{M}_c^2$ ayant les propriétés suivantes :

i) Si $\phi \in \mathcal{E}$, $I(\phi) = J(\phi)$.

ii) Pour tout $\phi \in \Lambda^2$ et tout $t \geqslant 0$:

$$E\left\{ \left(I(\phi)(t)\right)^2 \right\} = E\left\{ \int_0^t |\phi_s|^2 \, ds \right\}.$$

On note $I(\phi)(t) = \int_0^t \phi_s . dB_s \quad (t \geqslant 0)$.

<u>Dém.</u> :

Soit $\phi \in \Lambda^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\Psi_n \in \mathcal{E}$ tel que :

$$E\left\{ \int_0^n |\phi_s - \Psi_n(s)|^2 \, ds \right\} \leqslant \frac{1}{2^n}, \text{ d'après le lemme 1.}$$

Si I et $\tilde{I}$ sont deux applications linéaires de Λ^2 dans $\mathcal{M}_c^2$ ayant les propriétés i) et ii), on voit que, pour tout $t \geqslant 0$:

$$I(\phi)(t) = \lim_{n\to\infty} J(\Psi_n)(t) = \tilde{I}(\phi).(t) \quad \text{dans } L^2.$$

les processus $I(\phi)(\cdot)$ et $\tilde{I}(\phi)(\cdot)$ étant continus, ils sont indistinguables, donc $I = \tilde{I}$.

<u>Existence</u> : Soit $X_n(t) = J(\Psi_n)(t) \quad (t \geqslant 0)$.

D'après les propriétés de J, on voit que, si $n \geqslant t$:

$$E\left\{ |X_n(t) - X_{n+1}(t)|^2 \right\} = E\left\{ \int_0^t |\Psi_n(s) - \Psi_{n+1}(s)|^2 ds \right\} \leqslant \frac{4}{2^n}$$

L'inégalité de Doob entraine alors que :

$$E\left\{ \sup_{s\in[0,t]} |X_n(s) - X_{n+1}(s)|^2 \right\} \leqslant 4\, E\left\{ |X_n(t) - X_{n+1}(t)|^2 \right\} \leqslant \frac{16}{2^n}.$$

Donc :

$$\sum_{n\geqslant 0} E\left\{ \sup_{s\in[0,t]} |X_n(s) - X_{n+1}(s)| \right\} \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \left\| \sup_{s\in[0,t]} |X_n(s) - X_{n+1}(s)| \right\|_2 < \infty$$

et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sup_{s\in[0,t]} |X_n(s) - X_{n+1}(s)| < \infty$ p.s.

On en déduit que la suite de martingales <u>continues</u> $X_n(\cdot)$ converge p.s. uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ vers un processus <u>continu</u> $(X_t)_{t \geq 0}$ qui est, de plus, une $\mathcal{F}_t$-martingale ; en effet, soient $0 \leq s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$, alors

$$E\{ 1_A \cdot (X_t - X_s) \} = \lim_{n \to \infty} E\{ 1_A \cdot (X_n(t) - X_n(s)) \} = 0 .$$

Le processus (X_t) ne dépend que de ϕ et pas de la suite ψ_n choisie pour le construire. On posera : $X_t = I(\phi)(t)$.

Les estimations précédentes montrent, de plus, que, pour tout $t \geq 0$:

$$E\{ (X_t)^2 \} = \lim_{n \to \infty} E\{ (X_n(t))^2 \} = \lim_{n \to \infty} E\left\{ \int_0^t |\psi_n(s)|^2 ds \right\} = E\left\{ \int_0^t |\phi_s|^2 ds \right\}$$

La construction de I montre que, pour tous ϕ et $\tilde{\phi} \in \Lambda^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$: $I(\alpha\phi + \tilde{\phi}) = \alpha I(\phi) + I(\tilde{\phi})$ p.s.

La démonstration du Théorème est donc achevée. $\square$.

<u>Propriétés de l'intégrale stochastique I</u> :

1) Soient ϕ et $\tilde{\phi} \in \Lambda^2$. On pose :

$$X_t = I(\phi)(t) = \int_0^t \phi_s \, dB_s , \quad Y_t = \int_0^t \tilde{\phi}_s \, dB_s \quad (t \geq 0) ; \text{ alors}$$

a) le processus

$$M_t = X_t Y_t - \int_0^t \phi_s \cdot \tilde{\phi}_s \, ds \quad (t \geq 0)$$

est une martingale continue centrée.

En particulier, $(X_t)^2 - \int_0^t |\phi_s|^2 ds \quad (t \geq 0)$ est une martingale continue centrée.

b) Soit τ un temps d'arrêt borné. On a :

$$E\{ X_\tau \cdot Y_\tau \} = E\left\{ \int_0^\tau \phi_s \cdot \tilde{\phi}_s \, ds \right\}$$

$$E\{ X_\tau^2 \} = E\left\{ \int_0^\tau |\phi_s|^2 ds \right\} .$$

2) Soit τ un temps d'arrêt quelconque. Pour tout $\phi \in \Lambda^2$, soit $\psi(s) = \phi(s) \cdot 1_{]0, \tau]}(s) \quad (s \geq 0)$. Alors $\psi \in \Lambda^2$ et, si on pose $Z_t = \int_0^t \psi_s \, dB_s$, $X_t = \int_0^t \phi_s \, dB_s$, on a : pour tout $t \geq 0$: $Z_t = X_{t \wedge \tau}$ p.s.

Dém. :

La preuve de a) s'obtient par passage à la limite en considérant d'abord le cas où ϕ et $\tilde{\phi}$ sont étagés (cf. la dem. du Th. 1).
b) est une application du Théorème d'arrêt.
Pour démontrer 2) considérons $Z_t - X_{t\wedge\tau}$ $(t \geq 0)$. On a :

$$E\{(Z_t - X_{t\wedge\tau})^2\} = E\{Z_t^2\} - 2E\{Z_t \cdot X_{t\wedge\tau}\} + E\{X_{t\wedge\tau}^2\}$$
$$= E\{Z_t^2\} - 2E\{Z_{t\wedge\tau} \cdot X_{t\wedge\tau}\} + E\{X_{t\wedge\tau}^2\}$$
$$= E\left\{\int_0^t |\phi_s|^2 \cdot 1_{(s\leq\tau)}\, ds\right\} - 2E\left\{\int_0^{t\wedge\tau} |\phi_s|^2 ds\right\} + E\left\{\int_0^{t\wedge\tau} |\phi_s|^2 ds\right\}$$
$$= 0 \quad . \qquad \text{Donc } Z_t = X_{t\wedge\tau} \text{ p.s.} \qquad \square.$$

3. Processus de Λ° :

A- Martingales locales continues :

Lemme : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace de probabilité filtré, $M = (M_t)$ un processus optionnel et τ un temps d'arrêt. Il y a équivalence entre :

i) $(M_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ - martingale
ii) $(M_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_{t\wedge\tau}$ - martingale.

Dém. :

i) $\Rightarrow$ ii) Soient $0 \leq s < t$. On a :

$$E\{M_{t\wedge\tau} / \mathcal{F}_{s\wedge\tau}\} = E\{E\{M_{t\wedge\tau} / \mathcal{F}_s\} / \mathcal{F}_{s\wedge\tau}\} = E\{M_{s\wedge\tau} / \mathcal{F}_{s\wedge\tau}\} = M_{s\wedge\tau}$$

ii) $\Rightarrow$ i). Soient $0 \leq s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$. On a :

$$\int_A M_{t\wedge\tau}\, dP = \int_{A\cap(\tau\leq s)} M_{t\wedge\tau}\, dP + \int_{A\cap(\tau > s)} M_{t\wedge\tau}\, dP = \int_{A\cap(\tau\leq s)} M_\tau\, dP + \int_{A\cap(\tau>s)} E\{M_{t\wedge\tau}/\mathcal{F}_{s\wedge\tau}\}\, dP$$
$$= \int_{A\cap(\tau\leq s)} M_{\tau\wedge s}\, dP + \int_{A\cap(\tau>s)} M_{s\wedge\tau}\, dP = \int_A M_{s\wedge\tau}\, dP$$

car $A\cap(\tau > s) \in \mathcal{F}_{s\wedge\tau}$ ainsi qu'on le vérifie facilement. $\square$.

Définition :

On appelle $\mathcal{F}_t$-martingale locale continue, un processus continu réel, $\mathcal{F}_t$-adapté, $M = (M_t)_{t \geq 0}$ tel qu'il existe une suite croissante $(T_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêt vérifiant les propriétés suivantes :

i) $\lim_{p \to +\infty} \tau_p = +\infty$ p.s.

ii) pour tout $p \in \mathbb{N}$, le processus arrêté $(M_{t \wedge \tau_p})_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue de carré intégrable.

On note $\mathcal{M}_{c,loc}$ l'ensemble des martingales locales continues.

Remarques :

1) Le lemme précédent entraîne que $\mathcal{M}_{c,loc}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) Si $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ $(M_0 = 0)$, on peut toujours choisir une suite de temps d'arrêt $(\tilde{\tau}_p)$ vérifiant i) et ii) et telle que, pour tout p, $(M_{t \wedge \tilde{\tau}_p})_{t \geq 0}$ soit bornée. En effet : posons $\sigma_p = \operatorname{Inf}\{t \geq 0 \text{ t.q. } |M_t| \geq p\}$, alors $\sigma_p \uparrow +\infty$ p.s. car le processus (M_t) est continu.
Si (τ_p) est la suite de t.a. associée à la martingale locale (M_t), soit $\tilde{\tau}_p = \sigma_p \wedge \tau_p$; alors $\tilde{\tau}_p \uparrow +\infty$ p.s., $(M_{t \wedge \tilde{\tau}_p})_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue et $\sup_{t \geq 0} |M_{t \wedge \tilde{\tau}_p}| \leq p$. □

B. Extension de l'intégrale stochastique.

On considère l'ensemble Λ° des processus $\phi = (\phi_s(\omega))_{s \geq 0}$ à valeurs $\mathbb{R}^d$, adaptés, progressivement mesurables, tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $\int_0^t |\phi_s|^2 ds < \infty$ p.s.

On se propose d'étendre aux éléments de Λ° l'intégrale stochastique définie précédemment.

Théorème 2 :

Il existe une application linéaire unique $\tilde{I}$ de Λ_0 dans $\mathcal{M}_{c,loc}$ vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :
si $\phi \in \Lambda^0$ et si τ est un temps d'arrêt tel que $E\left\{\int_0^\tau |\phi_s|^2 ds\right\} < \infty$ alors, pour tout $t \geq 0$: $\tilde{I}(\phi)(t\wedge\tau) = \int_0^t \phi_s . 1_{(0\leq s\leq \tau)} dB_s$ p.s.

On note $\tilde{I}(\phi)(t) = \int_0^t \phi_s . dB_s \quad (t \geq 0)$.

Dém. :

Soit $\phi \in \Lambda^0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère :

$$\tau_p = \operatorname{Inf}\left\{ t \geq 0 \text{ t.q. } \int_0^t |\phi_s|^2 ds \geq p \right\} \qquad (\operatorname{Inf}(\emptyset) = +\infty).$$

On vérifie facilement que (τ_p) est une suite de temps d'arrêt croissant vers $+\infty$ p.s.

Soit $\phi_s^p = \phi_s . 1_{(0\leq s\leq\tau_p)}$. On voit que le processus $(\phi_s^p)_{s\geq 0}$ appartient à Λ^2 ; l'intégrale stochastique $X_t^p = \int_0^t \phi_s . 1_{(s\leq\tau_p)} dB_s$ est donc bien définie. De plus, si $0 \leq p \leq q$,
on a p.s. $X^q_{t\wedge\tau_p} = X^p_t$, pour tout $t \geq 0$
et, puisque $\lim_{p\to\infty} \tau_p = +\infty$ p.s., la suite $(X_t^p(\omega))_{p\in\mathbb{N}}$ est p.s. stationnaire pour tout p assez grand.

On définit un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ de la manière suivante :
en dehors d'un ensemble négligeable, $X_t(\omega) = \lim_{p\to\infty} X_t^p(\omega)$;
donc p.s., $X_{t\wedge\tau_p} = X_t^p$, pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

Soient τ un t.a. tel que $E\left\{\int_0^\tau |\phi_s|^2 ds\right\} < \infty$ et $Y_t = \int_0^t \phi_s . 1_{(s\leq\tau)} dB_s$

On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $Y_{t\wedge\tau_p} = \int_0^t \phi_s . 1_{(s\leq\tau\wedge\tau_p)} dB_s = X^p_{t\wedge\tau}$,

donc $Y_t = \lim_{p\to\infty} Y_{t\wedge\tau_p} = \lim_{p\to\infty} X^p_{t\wedge\tau} = X_{t\wedge\tau}$.

En posant $\tilde{I}(\phi)(t) = X_t \quad (t\geq 0)$, on définit donc une application $\tilde{I}$ de Λ^0 dans $\mathcal{M}_{c,loc}$ vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$. L'unicité et la linéarité de $\tilde{I}$ sont évidentes. □

II. Intégrales stochastiques relativement aux martingales continues.

Soient $M \in \mathcal{M}_c^2$ et $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)$ le processus croissant associé à M, (cf. le Th. 3 du Chap. 0). On considère l'ensemble $\Lambda^2(M)$ des processus réels $\phi = (\phi_s(\omega))_{s \geq 0}$, prévisibles, tels que, pour tout $t \geq 0$: $E\left\{\int_0^t \phi_s^2 \, d\langle M \rangle_s\right\} < \infty$. Remarquer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des processus étagés défini en I) est inclus dans $\Lambda^2(M)$.

<u>Lemme 1</u> : Soit $\phi \in \Lambda^2(M)$. Pour tous $t > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\psi \in \mathcal{E}$ tel que $E\left\{\int_0^t |\phi_s - \psi_s|^2 \, d\langle M \rangle_s\right\} < \varepsilon$.

<u>Dém.</u> : cf. l'Appendice. $\square$.

Si ϕ est un processus étagé donné par : $\phi_t = U_0 \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_i U_i \cdot 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots \to \infty$ et U_i est une v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable et bornée, on définit l'intégrale stochastique de ϕ par la formule :

$$J\phi(t) =: \int_0^t \phi_s \, dM_s = U_0 (M_{t_1} - M_{t_0}) + U_1 (M_{t_2} - M_{t_1}) + \dots + U_k \cdot (M_t - M_{t_k})$$

si $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

La martingale (M_t) étant continue et $\mathcal{F}_t$-adaptée, il est clair que $J\phi(\cdot)$ est un processus continu, $\mathcal{F}_t$-adapté.

<u>Propriétés de l'application J</u> :

1) Pour tout $\phi \in \mathcal{E}$, le processus $(X_t) = J\phi(\cdot)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue, de carré intégrable, nulle en zéro.

2) Si ϕ et $\psi \in \mathcal{E}$, le processus

$$K_t =: \left(\int_0^t \phi_s \, dM_s\right) \cdot \left(\int_0^t \psi_s \, dM_s\right) - \int_0^t \phi_s \cdot \psi_s \, d\langle M \rangle_s \qquad (t \geq 0)$$

est une $\mathcal{F}_t$-martingale centrée, continue.

3) Pour tout $\phi \in \mathcal{E}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$E\left\{\left(\int_0^t \phi_s \, dM_s\right)^2\right\} = E\left\{\int_0^t |\phi_s|^2 \, d\langle M \rangle_s\right\}.$$

<u>Dém</u> : Analogue à la démonstration correspondante dans le cas où (M_t) est le mvt brownien. (Exercice). $\square$.

Théorème 2 :

Il existe une unique application linéaire I de $\Lambda^2(M)$ dans $\mathcal{M}_c^2$, ayant les propriétés suivantes :

i) Si $\phi \in \mathcal{C}$, $I(\phi) = J(\phi)$.

ii) Pour tout $\phi \in \Lambda^2(M)$ et tout $t \geq 0$:

$$E\{ (I(\phi)(t))^2 \} = E\{ \int_0^t \phi_s^2 \, d\langle M \rangle_s \}.$$

On note $I(\phi)(t) = \int_0^t \phi_s \, dM_s$.

Dém. : Analogue à la démonstration correspondante dans le cas où (M_t) est le mvt brownien. (Exercice). □.

Propriétés de l'intégrale stochastique I :

1) Soient ϕ et $\tilde{\phi}$ deux éléments de $\Lambda^2(M)$. On pose :

$X_t = \int_0^t \phi_s \, dM_s$, $Y_t = \int_0^t \tilde{\phi}_s \, dM_s$ $(t \geq 0)$; alors :

a) le processus $K_t = X_t \cdot Y_t - \int_0^t \phi_s \tilde{\phi}_s \, d\langle M \rangle_s$ $(t \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_t$ - martingale continue centrée (nulle en zéro).

En particulier $(X_t)^2 - \int_0^t \phi_s^2 \, d\langle M \rangle_s$ $(t \geq 0)$ est une martingale, ce qui signifie que $\langle \int_0^\cdot \phi_s \, dM_s \rangle = \int_0^\cdot \phi_s^2 \, d\langle M \rangle_s$.

b) Soit T un temps d'arrêt borné. On a :

$$E\{ X_T \cdot Y_T \} = E\{ \int_0^T \phi_s \tilde{\phi}_s \, d\langle M \rangle_s \}$$

$$E\{ X_T^2 \} = E\{ \int_0^T \phi_s^2 \, d\langle M \rangle_s \}.$$

2) Soit T un temps d'arrêt quelconque. Pour tout $\phi \in \Lambda^2(M)$, soit $\psi_s = \phi_s \cdot 1_{]0,T]}(s)$ $(s \geq 0)$. Alors $\psi \in \Lambda^2(M)$ et si on pose $Z_t = \int_0^t \psi_s \, dM_s$ et $X_t = \int_0^t \phi_s \, dM_s$, on a : pour tout $t \geq 0$: $Z_t = X_{t \wedge T}$ p.s.

Dém. : Analogue au cas brownien. □

Lemme 3 :

Soient M et N deux martingales continues de carré intégrable et $\phi \in \Lambda^2(M)$, $\psi \in \Lambda^2(N)$; alors, pour tout $t \geq 0$:

$$(*) \quad \int_0^t |\phi_s \psi_s| \, d|\langle M,N\rangle|_s \leq \left(\int_0^t \phi_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right)^{1/2} \left(\int_0^t \psi_s^2 \, d\langle N\rangle_s\right)^{1/2}$$

Dém : Soient $0 \leq u < v$. On pose :

$$\Delta\langle M,N\rangle = \langle M,N\rangle_v - \langle M,N\rangle_u \; ; \quad \Delta\langle M\rangle = \Delta\langle M,M\rangle .$$

Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\Delta\langle M+\alpha N, M+\alpha N\rangle = \Delta\langle M\rangle + 2\alpha\,\Delta\langle M,N\rangle + \alpha^2\,\Delta\langle N\rangle \geq 0$$

donc $|\Delta\langle M,N\rangle|^2 \leq (\Delta\langle M\rangle)(\Delta\langle N\rangle)$

On en déduit, grâce à l'inégalité de Schwarz et en prenant des subdivisions de $[0,t]$, l'inégalité $(*)$ lorsque ϕ et ψ sont étagés ; le cas général s'obtient par passage à la limite (cf. le Lemme 1). □.

Proposition 4 :

Soient M et $N \in \mathcal{M}_c^2$, $\phi \in \Lambda^2(M)$, $\psi \in \Lambda^2(N)$. On pose :
$X_t = \int_0^t \phi_s \, dM_s$, $Y_t = \int_0^t \psi_s \, dN_s$; alors le processus :

$$K_t = X_t \cdot Y_t - \int_0^t \phi_s \psi_s \, d\langle M,N\rangle_s \qquad (t \geq 0)$$

est une martingale centrée continue (nulle en zéro).

Dém :

Lorsque ϕ et ψ sont étagés, la propriété est facile à vérifier. le cas général s'obtient par passage à la limite, à partir du cas où ϕ et ψ sont étagés, en utilisant les Lemme 1 et 3. □

La proposition précédente signifie que :

$$\left\langle \int_0^\cdot \phi_s \, dM_s , \int_0^\cdot \psi_s \, dN_s \right\rangle = \int_0^\cdot \phi_s \psi_s \, d\langle M,N\rangle_s$$

ou que :

$$d\left\langle \int_0^\cdot \phi_s \, dM_s , \int_0^\cdot \psi_s \, dN_s \right\rangle_t = \phi_t \psi_t \, d\langle M,N\rangle_t$$

Extension de l'intégrale stochastique (localisation).

Soient M et $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$ (martingales locales continues).

On peut trouver une suite de temps d'arrêt (T_p) croissant vers $+\infty$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$M^{T_p} = (M_{t\wedge T_p})_{t\geq 0} \quad \text{et} \quad N^{T_p} = (N_{t\wedge T_p})_{t\geq 0} \quad \text{soient dans } \mathcal{M}_c^2 .$$

Soit $B_p(t) = \langle M^{T_p}, N^{T_p}\rangle_t$

Une conséquence de l'unicité de la décomposition de Doob-Meyer (cf. le Th. 3 du Chap. 0) est que, si $0 \leq p \leq q$:

$$B_q(t\wedge T_p) = B_p(t) \quad , \text{ pour tout } t \geq 0 .$$

Il existe donc un unique processus continu à variation finie, nul en zéro, noté $\langle M, N\rangle$, tel que :

$$\langle M,N\rangle_{t\wedge T_p} = \langle M^{T_p}, N^{T_p}\rangle_t \quad , \text{ pour tous } t\geq 0 \text{ et } p \in \mathbb{N} .$$

On posera $\langle M\rangle = \langle M, M\rangle$.

Soit $\Lambda^2_{loc}(M)$ l'ensemble des processus réels prévisibles $\phi = (\phi_s(\omega))_{s\geq 0}$ tels que $\int_0^t \phi_s^2 \, d\langle M\rangle_s < \infty$ p.s., pour tout $t \geq 0$.

Si $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ et $\phi \in \Lambda^2_{loc}(M)$, on peut trouver une suite de temps d'arrêts (T_p) croissant vers $+\infty$ telle que :

$$M^{T_p} = (M_{t\wedge T_p})_{t\geq 0} \in \mathcal{M}_c^2 \quad \text{et} \quad E\left\{\int_0^{t\wedge T_p} \phi_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right\} < \infty \quad \text{pour tous } p \in \mathbb{N} \text{ et } t \geq 0 .$$

L'intégrale stochastique $\int_0^t \phi_s \cdot 1_{(s\leq T_p)} \, dM_s^{T_p} = I_p(\phi)(t) \quad (t \geq 0)$

est donc bien définie et on vérifie facilement que :

si $0 \leq p \leq q$: $\quad I_q(\phi)(t\wedge T_p) = I_p(\phi)(t)$, pour tout $t \geq 0$.

Il existe donc une unique martingale locale $\left(I(\phi)(t)\right)_{t\geq 0}$ telle que : $\quad I(\phi)(t\wedge T_p) = I_p(\phi)(t)$, pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$.

On la note $\quad I(\phi)(t) = \int_0^t \phi_s \cdot dM_s \quad (t \geq 0)$.

(intégrale stochastique de $\phi \in \Lambda^2_{loc}(M)$ par rapport à $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$).

Proposition 5 :

1) Soient $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$, ϕ et $\psi \in \Lambda^2_{loc}(M)$; alors :

$$\int_0^t (\phi+\psi)(s)\, dM_s = \int_0^t \phi_s\, dM_s + \int_0^t \psi_s\, dM_s \qquad (t \geqslant 0).$$

2) Soient M et $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$, $\phi \in \Lambda^2_{loc}(M) \cap \Lambda^2_{loc}(N)$; alors :

$$\int_0^t \phi_s\, d(M+N)(s) = \int_0^t \phi_s\, dM_s + \int_0^t \phi_s\, dN_s \qquad (t \geqslant 0).$$

3) Soient $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$, $\phi \in \Lambda^2_{loc}(M)$, $N = \int_0^{\cdot} \phi_s\, dN_s$ et $\psi \in \Lambda^2_{loc}(N)$, alors $\phi \cdot \psi \in \Lambda^2_{loc}(M)$ et

$$\int_0^t \phi_s \cdot \psi_s\, dM_s = \int_0^t \psi_s\, dN_s \qquad (t \geqslant 0).$$

Dém. : Exercice. $\square$.

Appendice. (Théorèmes de "classe monotone")

Définition : d-systèmes et π-systèmes.

Soient Ω un ensemble, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ deux sous-ensembles de $\mathcal{P}(\Omega)$.

$\mathcal{C}$ est un π-système si : A et $B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{S}$ est un d-système si :

1) pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n$, on a : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$

2) pour tous A et $B \in \mathcal{S}$, on a : $A \supseteq B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{S}$.

Théoreme 1 :

Si $\mathcal{S}$ est un d-système contenant un π-système $\mathcal{C}$ et si $\Omega \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}$ contient $\sigma(\mathcal{C})$ (la tribu engendrée par $\mathcal{C}$)

Dém. :

Soit $\mathcal{S}'$ le d-système engendré par $\mathcal{C}$ et Ω. Il suffit de montrer que $\mathcal{S}'$ est stable par intersection finie.

Soit $\mathcal{S}_1 = \{ A \in \mathcal{S}' \text{ t.q. } A \cap B \in \mathcal{S}', \forall B \in \mathcal{C} \}$.

alors $\mathcal{S}_1$ est un d-système contenant $\mathcal{C}$ et $\Omega \in \mathcal{S}_1$,

donc $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}' \Rightarrow \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}'$.

Soit $\mathcal{S}_2 = \{ A \in \mathcal{S}' \text{ t.q. } A \cap B \in \mathcal{S}', \forall B \in \mathcal{S}' \}$.

$\mathcal{S}_2$ est un d-système contenant $\mathcal{C}$ et $\Omega \in \mathcal{S}_2$, donc $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}'$. $\square$

Corollaire 1 :

1) Soient P_1 et P_2 deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telles que : $P_1(A) = P_2(A)$, pour tout $A \in \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est un π-système tel que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$; alors $P_1 = P_2$.

2) Soit H un espace vectoriel de fonctions numériques sur $(\Omega, \mathcal{A})$ finies (bornées) tel que :
 1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in H$ et $f_n \uparrow f$ finie (bornée) $\Rightarrow f \in H$.
 2) $1 \in H$ et $1_A \in H$, $\forall A \in \mathcal{C}$ (π-système tel que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$)

alors H contient les fonctions $\mathcal{A}$-mesurables finies (bornées).

Dém : 1) : Considérer $\mathcal{S} = \{ A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } P_1(A) = P_2(A) \}$.

2) Considérer $\mathcal{S} = \{ A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } 1_A \in H \}$. $\square$.

Corollaire 2 :

Soit $\mathcal{L}$ un espace vectoriel de processus à valeurs réelles tel que :

1) $\mathcal{L}$ contient les processus réels $\mathcal{F}_t$-adaptés continus à gauche (à droite).

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \in \mathcal{L}$ et $\phi_n \uparrow \phi$ (borné) $\Rightarrow \phi \in \mathcal{L}$,

alors $\mathcal{L}$ contient les processus $\mathcal{F}_t$-prévisibles (optionnels) bornés.

Dém : Exercice $\square$.

Démonstration du lemme 1, paragraphe II (Chap. 2) :

Soit $t > 0$. On considère l'espace vectoriel suivant :

$\mathcal{L} = \{ \phi \in \Lambda^2(M)$ pour lesquels il existe une suite $\Psi_n \in \mathcal{E}$ telle que :

$E\{ \int_0^t |\phi_s - \Psi_n(s)|^2 \, d\langle M \rangle_s \} \longrightarrow 0$, quand $n \to \infty$. $\}$.

Soit $\phi_n \in \mathcal{L}$ vérifiant $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$ et $\lim \uparrow \phi_n = \phi$ où ϕ est borné ; le théorème de Lebesgue entraine que $\phi \in \mathcal{L}$.

D'autre part, si ϕ est un processus borné, $\mathcal{F}_t$-adapté, continu à gauche, on a : $E\{ \int_0^t |\phi_s - \Psi_n(s)|^2 \, d\langle M \rangle_s \} \longrightarrow 0$, quand $n \to \infty$

où $\Psi_n(s) = \sum_{k \geq 0} \phi_{\frac{k}{2^n}} \cdot 1_{]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}(s) + \phi_0 \cdot 1_{\{0\}}(s)$. Donc $\phi \in \mathcal{L}$.

Le Théorème de classe monotone (Cor. 2), montre que $\mathcal{L}$ contient l'ensemble des processus prévisibles bornés. Or si $\phi \in \Lambda^2(M)$, on a :

$E\{ \int_0^t |\phi_s - \phi_n(s)|^2 \, d\langle M \rangle_s \} \longrightarrow 0$, quand $n \to \infty$ où $(\phi_n(s)) = (\phi_s \cdot 1_{(|\phi_s| \leq n)})$ est un processus prévisible borné.

On en déduit que $\mathcal{L} = \Lambda^2(M)$. $\square$.

Chap. 3. Formule d'Itô et applications.

On se donne, dans la suite, un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$, la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ étant supposée complète et continue à droite.

Théorème 1 :

Soient $M = (M_t)_{t \geq 0}$ et $N = (N_t)_{t \geq 0}$ deux martingales locales, nulles en 0, continues. Fixons $s \in \mathbb{R}_+$. Etant donnée une subdivision $\delta : t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = s$ de $[0, s]$, posons :

$$S(\delta) = \sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}).(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \quad \text{et} \quad |\delta| = \operatorname{Max}_i (t_{i+1} - t_i).$$

Alors $S(\delta)$ converge vers $\langle M, N \rangle_s$ en probabilité, quand $|\delta| \to 0$.

Dém : Il suffit de démontrer ce résultat lorsque $M = N$.

Supposons d'abord que, pour tout $t \geq 0$: $|M_t| + \langle M \rangle_t \leq C$ p.s. où C est une constante fixée. On a :

$$E\{S(\delta)\} = \sum_i E\{(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\} = \sum_i E\{M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2\}$$

$$= \sum_i E\{\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i}\} = E\{\langle M \rangle_s\} \leq C. \quad \text{De plus :}$$

$$E\{(S(\delta) - \langle M \rangle_s)^2\} = E\left\{\left[\sum_i \left((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 - (\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i})\right)\right]^2\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i,j} \left((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 - (\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i})\right).\left((M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2 - (\langle M \rangle_{t_{j+1}} - \langle M \rangle_{t_j})\right)\right\}$$

$$= \sum_i E\left\{\left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 - (\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i})\right]^2\right\}$$

$$\leq 2 \sum_i \left[E\{(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4\} + E\{(\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i})^2\}\right]$$

$$\leq 2\, E\{\operatorname{Max}_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 . S(\delta)\} + 2\, E\{\operatorname{Max}_i (\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i}) . \langle M \rangle_s\} \quad (*)$$

$$\leq 2.4.C^2.C + 2C^2.$$

Donc $\sup_\delta \left(E\{(S(\delta))^2\}\right)^{1/2} \leq (8C^3 + 2C^2)^{1/2} + C < \infty$

En revenant à l'inégalité $(*)$, on voit que :

$$E\{(S(\delta) - \langle M \rangle_s)^2\} \leq 2 . \sup_\delta \|S(\delta)\|_2 . \left(E\{\operatorname{Max}_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^4\}\right)^{1/2}$$

$$+ 2\, C\, E\{\operatorname{Max}_i (\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i})\} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } |\delta| \to 0$$

Passons au cas général.

Soit $T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| + \langle M \rangle_t \geq n\}$, alors $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de temps d'arrêt telle que $T_n \leq T_{n+1}$ et $T_n \nearrow +\infty$ p.s.

Posons $(M_t^n) = (M_{t\wedge T^n})$. On sait que $\langle M^n \rangle_t = \langle M \rangle_{t\wedge T_n}$ $(t \geq 0)$; donc $\sup_t \{ |M_t^n| + \langle M^n \rangle_t \} \leq n$.

D'après la première partie $S^n(\delta) = \sum_i (M^n_{t_{i+1}} - M^n_{t_i})^2 \xrightarrow[|\delta|\to 0]{} \langle M^n \rangle_s$, dans L^2.

Soit $\varepsilon > 0$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P\{|S(\delta) - \langle M \rangle_s| > \varepsilon\} \leq P\{T_n \leq s\} + P\{|S(\delta) - \langle M \rangle_s| > \varepsilon, s < T_n\}$$
$$\leq P\{T_n \leq s\} + P\{|S^n(\delta) - \langle M^n \rangle_s| > \varepsilon\}.$$

Il est facile d'en conclure que $\lim_{|\delta|\to 0} P\{|S(\delta) - \langle M \rangle_s| > \varepsilon\} = 0$

□.

<u>Définition</u> :

Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus à valeurs réelles, $\mathcal{F}_t$-adapté.

On dit que X est une <u>semi-martingale continue</u> s'il admet une décomposition de la forme :

$$(*) \qquad X_t = X_0 + M_t + V_t \qquad (t \geq 0)$$

où $M = (M_t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale locale continue, nulle en zéro
$V = (V_t)$ est un processus à variation finie sur tout compact de $\mathbb{R}_+$, continu, adapté, nul en zéro.

Noter que la décomposition $(*)$ de la semi-martingale (X_t) est <u>unique</u>. En effet, si pour tout $t \geq 0$:

$$X_t = X_0 + M_t + V_t = X_0 + \tilde{M}_t + \tilde{V}_t$$

où M et $\tilde{M} \in \mathcal{M}_{c,loc}$, V et $\tilde{V}$ sont deux processus à variation finie sur tout compact, continus, tels que $M_0 = \tilde{M}_0 = V_0 = \tilde{V}_0 = 0$;

posons $W_t = \tilde{V}_t - V_t$. D'après le Théorème 1, on a, pour tout $t \geq 0$:

$$\langle M - \tilde{M} \rangle_t = \lim_{|\delta|\to 0} \sum_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \quad \text{où } \delta = t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t$$

donc $\langle M - \tilde{M} \rangle_t \leq \lim_{|\delta|\to 0} \operatorname{Max}_k |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \left(|V|_t + |\tilde{V}|_t \right) = 0$.

On voit ainsi que :

$\langle M - \tilde{M} \rangle = 0 \Rightarrow M - \tilde{M} = 0 \Rightarrow V = \tilde{V}$.

□

On notera $\mathcal{A}_c$ l'ensemble des processus à variation finie sur tout compact de $\mathbb{R}_+$, continus, adaptés.

<u>Théorème 2</u> (<u>formule d'Itô</u>)

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0} = (X_t^1, \dots, X_t^d)_{t \geq 0}$ un processus continu à valeurs $\mathbb{R}^d$, dont les composantes (X_t^ℓ) $\ell = 1, \dots, d$ sont des semi-martingales admettant la décomposition :

$$X_t^\ell = X_0^\ell + M_t^\ell + V_t^\ell \qquad (t \geq 0)$$

où $(M_t^\ell) \in \mathcal{M}_{c,loc}$, $M_0^\ell = 0$; $(V_t^\ell) \in \mathcal{A}_c$, $V_0^\ell = 0$

et soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{\ell=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(X_s)\, dM_s^\ell + \sum_{\ell=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(X_s)\, dV_s^\ell$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\ell,k=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_s)\, d\langle M^\ell, M^k\rangle_s \qquad (t \geq 0) \quad \text{p.s.}$$

<u>Dém.</u> :

On suppose d'abord qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\sup_{\substack{t \geq 0 \\ \ell, k = 1, \dots, d}} \left\{ |X_0| + |M_t^\ell| + |V_t^\ell| + |\langle M^\ell, M^k\rangle|_t \right\} \leq C \qquad (*)$$

et que f est une application de classe C^2 à support compact

Ecrivons la formule de Taylor :

$$f(b) - f(a) = f'(a).(b-a) + \frac{1}{2} f''(a).(b-a)^2 + r(a,b).|b-a|^2$$

où $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d)$

$$f'(a).(b-a) = \sum_\ell \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(a).(b_\ell - a_\ell)$$
$$f''(a).(b-a)^2 = \sum_{\ell,k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(a).(b_\ell - a_\ell).(b_k - a_k)$$

f'' étant uniformément continue, on peut trouver une fonction $g(y)$ borélienne bornée, croissante en $|y|$ telle que $g(y) \xrightarrow[|y| \to 0]{} 0$ et $|r(a,b)| \leq g(|b-a|)$, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

On a donc, pour une subdivision $\delta : t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = t$ de $[0, t]$:

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_i \left(f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}) \right)$$

$$= \sum_i f'(X_{t_i}) \cdot (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \frac{1}{2} \sum_i f''(X_{t_i}) \cdot (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

$$+ \sum_i r(X_{t_i}, X_{t_{i+1}}) \cdot |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2 .$$

$$= S_1 + S_2 + S_3 .$$

On a:

$$S_1 = \sum_i f'(X_{t_i}) \cdot (V_{t_{i+1}} - V_{t_i}) + \sum_i f'(X_{t_i}) \cdot (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$

$$\xrightarrow[|\delta| \to 0]{\text{dans } L^2} \int_0^t f'(X_s) \cdot dV_s + \int_0^t f'(X_s)\, dM_s = \sum_{\ell=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(X_s) \cdot (dV_s^\ell + dM_s^\ell)$$

Considérons $S_2 = \frac{1}{2} \sum_i f''(X_{t_i}) \cdot (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\ell,k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_{t_i}) \cdot (X^\ell_{t_{i+1}} - X^\ell_{t_i}) \cdot (X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\ell,k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_{t_i}) \cdot (M^\ell_{t_{i+1}} - M^\ell_{t_i}) \cdot (M^k_{t_{i+1}} - M^k_{t_i})$$

$$+ \sum_i \sum_{\ell,k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_{t_i}) \cdot (M^\ell_{t_{i+1}} - M^\ell_{t_i}) \cdot (V^k_{t_{i+1}} - V^k_{t_i})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\ell,k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_{t_i}) \cdot (V^\ell_{t_{i+1}} - V^\ell_{t_i}) \cdot (V^k_{t_{i+1}} - V^k_{t_i})$$

$$= S_2' + S_2'' + S_2''' .$$

On a :

$$|S_2''| \leqslant \sum_{\ell,k=1}^d \Big\{ \underbrace{\max_i |M^\ell_{t_{i+1}} - M^\ell_{t_i}|}_{\longrightarrow\, 0} \cdot \underbrace{\sum_i \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_{t_i})\right| \cdot |V^k_{t_{i+1}} - V^k_{t_i}|}_{\longrightarrow\, \int_0^t \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_s)\right| d|V^k|_s} \Big\}$$

$$|S_2'''| \leqslant \sum_{\ell,k=1}^d \Big\{ \underbrace{\max_i |V^\ell_{t_{i+1}} - V^\ell_{t_i}|}_{\longrightarrow\, 0} \cdot \underbrace{\sum_i \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_{t_i})\right| |V^k_{t_{i+1}} - V^k_{t_i}|}_{\longrightarrow\, \int_0^t \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_s)\right| d|V^k|_s} \Big\}$$

Pour étudier S_2', considérons :

$$E\left\{ \left(\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_{t_i}) \left[(M^\ell_{t_{i+1}} - M^\ell_{t_i}) \cdot (M^k_{t_{i+1}} - M^k_{t_i}) - (\langle M^\ell, M^k \rangle_{t_{i+1}} - \langle M^\ell, M^k \rangle_{t_i}) \right] \right)^2 \right\}$$

$$= \sum_i E\left\{ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_{t_i}) \right)^2 \left[(M^\ell_{t_{i+1}} - M^\ell_{t_i}) \cdot (M^k_{t_{i+1}} - M^k_{t_i}) - (\langle M^\ell, M^k \rangle_{t_{i+1}} - \langle M^\ell, M^k \rangle_{t_i}) \right]^2 \right\}$$

$$\leq C.E\left\{\left(\sum_i (M^\ell_{t_{i+1}}-M^\ell_{t_i}).(M^k_{t_{i+1}}-M^k_{t_i}) - \langle M^\ell, M^k\rangle_t\right)^2\right\} \xrightarrow[|\delta|\to 0]{} 0$$

d'après le Théorème 1.

Donc :

$$\lim_{|\delta|\to 0} S_2' = \lim_{|\delta|\to 0} \frac{1}{2}.\sum_{\ell,k=1}^{d}\left\{\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(X_{t_i}).\left(\langle M^\ell, M^k\rangle_{t_{i+1}} - \langle M^\ell, M^k\rangle_{t_i}\right).\right\}$$

$$= \frac{1}{2}.\sum_{\ell,k=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell.\partial x_k}(X_s)\, d\langle M^\ell, M^k\rangle_s .$$

Quand à S_3, on a :

$$\sum_i |r(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})| . |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2$$

$$\leq 2\, \underbrace{g\left(\max_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|\right)}_{\xrightarrow[|\delta|\to 0]{} 0} . \sum_{\ell=1}^{d}\left\{\underbrace{\sum_i (M^\ell_{t_{i+1}} - M^\ell_{t_i})^2}_{\to \langle M^\ell\rangle_t} + \underbrace{\sum_i (V^\ell_{t_{i+1}} - V^\ell_{t_i})^2}_{\to 0}\right\}$$

La formule d'Itô est donc démontrée sous l'hypothèse (*). Pour étudier le cas général, on considère la suite de temps d'arrêts :

$$T_n = \operatorname{Inf}\left\{t \geq 0 : \sum_{\ell,k=1}^{d} |X_0| + |M^\ell_t| + |V^\ell_t| + |\langle M^\ell, M^k\rangle|_t \geq n\right\}$$

alors $T_n \nearrow +\infty$ p.s. et d'après la première partie :

$$f(X_{t\wedge T_n}) = f(X_0) + \sum_{\ell=1}^{d}\int_0^{t\wedge T_n} \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(X_s).(dM^\ell_s + dV^\ell_s)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\ell,k=1}^{d}\int_0^{t\wedge T_n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell.\partial x_k}(X_s)\, d\langle M^\ell, M^k\rangle_s ;$$

Il suffit de faire tendre n vers l'infini. □

Applications de la formule d'Itô :

Notons d'abord deux conséquences immédiates de cette formule ; soient M et $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$ et $V \in \mathcal{A}_c$, alors :

$$M_t \cdot N_t = M_0 \cdot N_0 + \int_0^t M_s \, dN_s + \int_0^t N_s \, dM_s + \langle M, N \rangle_t \qquad (t \geq 0).$$

$$M_t \cdot V_t = M_0 \, N_0 + \int_0^t M_s \, dV_s + \int_0^t V_s \, dM_s \qquad (t \geq 0).$$

Théorème 3 : (Paul Lévy).

Soient $M^i \in \mathcal{M}_{c,loc}$ $(i = 1, 2, \dots, d)$ telles que $M_0^i = 0$ et $\langle M^i, M^j \rangle_t = \delta_{ij} \, t$ (où $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, 1 si $i = j$) alors $M = (M_t^1, M_t^2, \dots, M_t^d)_{t \geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien.

Dém. :

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^d$ et $N_t^\lambda = \exp\left(i \, \lambda . M_t + \frac{1}{2} |\lambda|^2 t\right)$.

Il faut montrer que (N_t^λ) est une $\mathcal{F}_t$ - martingale (Prop. 5 du Chap. 1).

D'après la formule d'Itô et les hypothèses :

$$N_t^\lambda = 1 + \int_0^t N_s^\lambda \left[i \, d(\lambda . M_s) + \frac{1}{2} |\lambda|^2 ds \right] + \frac{1}{2} i^2 . \sum_{l,k=1}^d \lambda_l \lambda_k \int_0^t N_s^\lambda \delta_{l,k} \, ds$$

$$= 1 + i \int_0^t N_s^\lambda \, d(\lambda . M_s) + \frac{1}{2} |\lambda|^2 . \int_0^t N_s^\lambda \, ds - \frac{1}{2} |\lambda|^2 . \int_0^t N_s^\lambda \, ds$$

$$= 1 + i \int_0^t N_s^\lambda \, d(\lambda . M_s)$$

L'intégrale stochastique $\int_0^{\cdot} N_s^\lambda \, d(\lambda . M_s)$ est une $\mathcal{F}_t$ - martingale, en effet :

$$E\left(\int_0^t |N_s^\lambda|^2 \, d\langle \lambda . M, \lambda . M \rangle_s \right) = \int_0^t \exp\left(|\lambda|^2 s\right) |\lambda|^2 \, ds < \infty, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

$\square$.

Remarque 1 :

Soit $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$. Une condition suffisante (et nécessaire !) pour que M soit une <u>martingale</u> de carré intégrable est que $E\{\langle M \rangle_t\} < \infty$, pour tout $t \geq 0$.

(Exercice).

Proposition 4 :

Soient $M = (M_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté, continu, nul en 0 et $V = (V_t)_{t \geq 0}$ un processus croissant adapté, continu, nul en 0.
Il y a équivalence entre :

i) $M = (M_t)$ est une martingale locale et $\langle M \rangle_t = V_t$ $(t \geq 0)$.

ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $X_t^\lambda = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} V_t\right)$ $(t \geq 0)$ est une martingale locale.

Sous ces conditions $(X_t^\lambda)_{t \geq 0}$ est une surmartingale. C'est une martingale si et seulement si $E\{X_t^\lambda\} = 1$, pour tout $t \geq 0$.
De plus, si $E\left\{\int_0^t \exp(2\lambda M_s)\, dV_s\right\} < \infty$ $(t \geq 0)$, alors (X_t^λ) est une martingale.
Si pour tout λ, (X_t^λ) est une martingale et $E\{\exp(\lambda M_t)\} < \infty$ alors (M_t) est une martingale.

Dém. :

i) $\Rightarrow$ ii). La formule d'Itô montre que :

$$X_t^\lambda = 1 + \lambda . \int_0^t X_s^\lambda \, dM_s \qquad (t \geq 0).$$

(X_t^λ) est donc une martingale locale positive.
Le lemme de Fatou entraine que (X_t^λ) est une surmartingale positive : en effet considérons $T_n \uparrow +\infty$, une suite de temps d'arrêt telle que $(X_{t \wedge T_n}^\lambda)_{t \geq 0}$ soit une martingale (pour tout n) et soient $0 \leq s < t$,

on a :
$$X_s^\lambda = \lim_{n \to \infty} X_{s \wedge T_n}^\lambda = \lim_{n \to \infty} E\{X_{t \wedge T_n}^\lambda / \mathcal{F}_s\} \geq E\{\lim_n X_{t \wedge T_n}^\lambda / \mathcal{F}_s\} \quad \text{p.s.}$$
$$= E\{X_t^\lambda / \mathcal{F}_s\}$$

donc $E\{X_t^\lambda\} \leq E\{X_0^\lambda\} = 1$ et on voit que :
(X_t^λ) est une martingale si et seulement si $E\{X_t^\lambda\} = 1$, pour tout t.
De plus
$$E\{\langle X^\lambda \rangle_t\} = \lambda^2 E\left\{\int_0^t \exp(2\lambda M_s - \lambda^2 V_s)\, dV_s\right\}$$
$$\leq \lambda^2 E\left\{\int_0^t \exp(2\lambda M_s)\, dV_s\right\}.$$
Si ce dernier terme est fini, la remarque 1 montre que (X_t^λ) est une martingale

ii) ⇒ i). Supposons d'abord que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, (X_t^λ) est une martingale et que $E\{\exp(\lambda M_t)\} < \infty$.

Par hypothèse, pour tous $0 \leq s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$, on a :

$$(*) \quad E\left\{ 1_A \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} V_t\right) \right\} = E\left\{ 1_A \exp\left(\lambda M_s - \frac{\lambda^2}{2} V_s\right) \right\}$$

On vérifie que les conditions d'application du théorème de dérivation sous le signe intégral sont satisfaites : si l'on dérive en λ dans l'égalité (*), on obtient :

$$E\left\{ 1_A \left[\exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} V_t\right)\right] (M_t - \lambda V_t) \right\} = E\left\{ 1_A \left[\exp\left(\lambda M_s - \frac{\lambda^2}{2} V_s\right)\right] (M_s - \lambda V_s) \right\}$$

$$E\left\{ 1_A X_t^\lambda \left[(M_t - \lambda V_t)^2 - V_t \right] \right\} = E\left\{ 1_A \cdot X_s^\lambda \cdot \left[(M_s - \lambda V_s)^2 - V_s \right] \right\}$$

En posant $\lambda = 0$ dans les égalités précédentes, on voit que (M_t) est une martingale et que $(M_t^2 - V_t)$ est une martingale.

Pour traiter le cas général, on considère la suite de temps d'arrêts $T_n = \inf\{ t \geq 0 : |M_t| \geq n \}$; $\left(X_{t\wedge T_n}^\lambda\right)_{t \geq 0}$ est une martingale locale bornée, donc une martingale et on est dans les conditions ci-dessus. □

<u>Théorème 5</u> : (<u>Girsanov</u>).

Soient $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien d-dimensionnel, issu de 0 et $\phi = (\phi_t)_{t \geq 0}$ un processus mesurable, adapté, à valeurs $\mathbb{R}^d$, borné sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

On pose $M_t = \exp\left(\int_0^t \phi_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\phi_s|^2 ds\right) \quad (t \geq 0)$;
alors $M = (M_t)$ est une martingale.

Soit $T > 0$ fixé. On définit une nouvelle probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ par la formule $\frac{dQ}{dP} = M_T$.

Alors le processus $\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t \phi_s \, ds$, $t \in [0, T]$ est, pour la probabilité Q, un $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ mouvement brownien.

<u>Dém.</u> :

D'après la proposition précédente $M = (M_t)$ est une martingale locale ≥ 0 donc une surmartingale positive.

Soient $N_t = \int_0^t \phi_s \, dB_s$ et $\langle N \rangle_t = \int_0^t |\phi_s|^2 ds$. On a, pour tout $t \in [0,T]$: $E\{\langle M \rangle_t\} = E\{\int_0^t [\exp(2N_s - \langle N \rangle_s)] \, |\phi_s|^2 ds\}$

$$\leqslant C \int_0^t E\{\exp(2N_s - 2\langle N \rangle_s) \cdot \exp(\langle N \rangle_s)\} ds$$

$$\leqslant C \exp(CT) \int_0^t E\{\exp(2N_s - 2\langle N \rangle_s)\} ds \leqslant C \exp(CT) \cdot T < \infty$$

où $C = \sup_{s \in [0,T]} |\phi_s|^2$

Donc (M_t) est bien une martingale.

Pour vérifier que $\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t \phi_s \, ds$ $(t \in [0,T])$ est, pour la probabilité Q, un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien, il suffit de montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $\left(\exp\left(\lambda \cdot \widetilde{B}_t - \frac{|\lambda|^2}{2} t\right)\right)_{t \in [0,T]}$ est une Q-martingale (Cf : Prop. 5 du Chap. 1).

On, pour tous $0 \leqslant s < t \leqslant T$ et $A \in \mathcal{F}_s$, on a :

$$E_Q\left\{1_A \exp\left(\lambda \cdot \widetilde{B}_t - \tfrac{1}{2}|\lambda|^2 t\right)\right\} = E\left\{1_A \exp\left(\lambda B_t - \lambda \int_0^t \phi_s \, ds - \frac{|\lambda|^2}{2} t\right) \cdot M_t\right\}$$

$$= E\left\{1_A \exp\left(\int_0^t (\lambda + \phi_s) \, dB_s - \tfrac{1}{2} \int_0^t |\lambda + \phi_s|^2 ds\right)\right\}$$

$$= E\left\{1_A \exp\left(\int_0^s (\lambda + \phi_u) \, dB_u - \tfrac{1}{2} \int_0^s |\lambda + \phi_u|^2 du\right)\right\}$$

$$= E_Q\left\{1_A \exp\left(\lambda \cdot \widetilde{B}_s - \frac{|\lambda|^2}{2} s\right)\right\} \qquad \square .$$

<u>Remarque</u> :

Lorsque le processus $\phi = (\phi_s)_{s \geqslant 0}$ est <u>déterministe</u> le Théorème de Girsanov se réduit à la formule de Caméron-Martin (Cf. Th. 17 et Cor. 18 du Chap. 1).

Théorème 6 (Majoration exponentielle).

Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale continue, nulle en 0.
Alors pour tous $T > 0$, $k > 0$ et $c \geq 0$, on a :

$$P\left\{ \langle M \rangle_T \leq k,\ \sup_{0 \leq s \leq T} |M_s| \geq c \right\} \leq 2 \exp\left(-\frac{c^2}{2k} \right).$$

En particulier, si pour tout $t \geq 0$, on a : $\langle M \rangle_t \leq kt$, alors

$$(*) \quad P\left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |M_s| \geq c \right\} \leq 2 \exp\left(-\frac{c^2}{2kT} \right).$$

Dém. :

Considérons $X_t^\lambda = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M \rangle_t \right) \quad (t \geq 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
C'est une surmartingale positive et $E\{ X_t^\lambda \} \leq 1$.

Donc $P\left\{ \langle M \rangle_T \leq k,\ \sup_{0 \leq s \leq T} M_s \geq c \right\}$

$$\leq P\left\{ \langle M \rangle_T \leq k,\ \sup_{0 \leq s \leq T} X_s^\lambda \geq \exp\left(\lambda c - \frac{\lambda^2}{2} k \right) \right\}$$

$$\leq P\left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} X_s^\lambda \geq \exp\left(\lambda c - \frac{\lambda^2}{2} k \right) \right\}$$

$$\leq \exp\left(-\lambda c + \frac{\lambda^2}{2} k \right) \qquad \text{(Inégalité maximale)}.$$

$$\leq \exp\left(-\frac{c^2}{2k} \right) \qquad \text{si on prend } \lambda = \frac{c}{k}$$

On a, de même, $P\left\{ \langle M \rangle_T \leq k,\ \sup_{0 \leq s \leq T} (-M_s) \geq c \right\} \leq \exp\left(-\frac{c^2}{2k} \right)$

d'où le Théorème. □

Remarque :

Posons $\|M\|_T = \sup_{0 \leq s \leq T} |M_s|$. Si pour tout $t \geq 0$, $\langle M \rangle_t \leq kt$,
la majoration exponentielle $(*)$ entraîne que :

$$E\left\{ \exp\left(\alpha . \|M\|_T^2 \right) \right\} < \infty$$

pour tout $\alpha < \frac{1}{2kT}$

(Exercice).

<u>Théorème 7</u> (<u>Inégalités de Burkholder - Davis - Gundy</u>).

Soit $p \in]0, +\infty[$; il existe des constantes universelles $c_p > 0$ et $C_p > 0$ telles que, pour toute martingale locale continue nulle en zéro, $M = (M_t)$, on ait :

(1) $$c_p \, E\{ \|M\|_T^{2p} \} \leq E\{ (\langle M \rangle_T)^p \} \leq C_p \, E\{ \|M\|_T^{2p} \}, \quad \forall T \geq 0.$$

où $\|M\|_T = \sup_{0 \leq s \leq T} |M_s|$.

<u>Dém</u> :

Il suffit de démontrer les inégalités (1) pour toute martingale bornée : en considérant les temps d'arrêt $T_n = \inf\{ t \geq 0 : |M_t| \geq n \text{ ou } \langle M \rangle_t \geq n \}$, on voit que, si ces inégalités sont satisfaites pour $M^{T_n} = (M_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$, avec des constantes universelles c_p et C_p, il suffit de faire tendre n vers l'infini pour obtenir (1) dans le cas général.

On sait que, pour tout $p \in]1, \infty[$:

(2) $$E\{ \|M\|_T^p \} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\{ |M_T|^p \}$$ (Inégalité maximale : Th.1 Chap.0).

1°) si $p = 1$, $E\{ M_t^{2p} \} = E\{ \langle M \rangle_t \}$, donc (1) est vérifiée en prenant $C_p = 1$ et $c_p = \frac{1}{4}$.

2°) si $p > 1$, on a :

$$|M_t|^{2p} = 2p \int_0^t |M_s|^{2p-1} \operatorname{sgn}(M_s) \, dM_s + p \cdot (2p-1) \cdot \int_0^t |M_s|^{2p-2} d\langle M \rangle_s$$

$$E\{ |M_t|^{2p} \} = p \cdot (2p-1) \cdot E\left\{ \int_0^t |M_s|^{2p-2} d\langle M \rangle_s \right\}$$

$$\leq p \cdot (2p-1) \, E\{ \|M\|_T^{2p-2} \cdot \langle M \rangle_T \}$$

$$\leq p \cdot (2p-1) \cdot \left(E\{ \|M\|_T^{2p} \} \right)^{1-1/p} \cdot \left(E\{ \langle M \rangle_T^p \} \right)^{1/p}$$

En combinant cette dernière inégalité avec (2) où on remplace p par $2p$, on a le côté gauche de (1) pour une constante c_p convenable.

Pour démontrer le côté droit, on considère :

$$M_t \cdot \left(\langle M\rangle_t\right)^{\frac{p-1}{2}} = \int_0^t \langle M\rangle_s^{\frac{p-1}{2}}\, dM_s + \int_0^t M_s\, d\left[\langle M\rangle_s^{\frac{p-1}{2}}\right].$$ (57)

Soit $N_t = \int_0^t \langle M\rangle_s^{\frac{p-1}{2}}\, dM_s$. On a : pour $t \in [0,T]$,

$|N_t| \leqslant 2 . \|M\|_T . \langle M\rangle_T^{\frac{p-1}{2}}$, donc :

$$E\{N_t^2\} = E\left\{\int_0^t \langle M\rangle_s^{p-1}\, d\langle M\rangle_s\right\} = \frac{1}{p} E\{\langle M\rangle_t^p\}$$

$$\leqslant 4\, E\{\|M\|_T^2 . \langle M\rangle_T^{p-1}\} \leqslant 4\left(E\{\|M\|_T^{2p}\}\right)^{1/p} . \left(E\{\langle M\rangle_T^p\}\right)^{1-1/p}$$

donc $E\{\langle M\rangle_T^p\} \leqslant (4p)^p . E\{\|M\|_T^{2p}\}$.

3°) Si $0<p<1$, considérons $N_t = \int_0^t \langle M\rangle_s^{\frac{p-1}{2}}\, dM_s$. On a :

$M_t = \int_0^t \langle M\rangle_s^{\frac{1-p}{2}}\, dN_s$ et

$$N_t . \langle M\rangle_t^{\frac{1-p}{2}} = \int_0^t \langle M\rangle_s^{\frac{1-p}{2}}\, dN_s + \int_0^t N_s\, d\left[\langle M\rangle_s^{\frac{1-p}{2}}\right]$$

$$= M_t + \int_0^t N_s\, d\left[\langle M\rangle_s^{\frac{1-p}{2}}\right].$$ Donc : si $t\in[0,T]$:

$|M_t| \leqslant 2\|N\|_T . \langle M\rangle_T^{\frac{1-p}{2}}$ et $\|M\|_T \leqslant 2 . \|N\|_T . \langle M\rangle_T^{\frac{1-p}{2}}$, d'où :

$$E\{\|M\|_T^{2p}\} \leqslant 4^p E\{\|N\|_T^{2p} . \langle M\rangle_T^{p(1-p)}\}$$

$$\leqslant 4^p \left(E\{\|N\|_T^2\}\right)^p . \left(E\{\langle M\rangle_T^p\}\right)^{1-p}$$

$$\leqslant (4^p)^2 \left(E\{(N_T)^2\}\right)^p . \left(E\{\langle M\rangle_T^p\}\right)^{1-p}$$

$$= (16)^p \left(\frac{1}{p} E\{\langle M\rangle_T^p\}\right)^p . \left(E\{\langle M\rangle_T^p\}\right)^{1-p}$$

$$= \left(\frac{16}{p}\right)^p E\{\langle M\rangle_T^p\}$$

On doit montrer, finalement, que :

$$E\{\langle M\rangle_T^p\} \leqslant C_p\, E\{\|M\|_T^{2p}\}.$$

Soit $\alpha > 0$. On a :

$$M_t\,(\alpha + \|M\|_t)^{p-1} = \int_0^t (\alpha+\|M\|_s)^{p-1} dM_s + \int_0^t M_s\, d\left[(\alpha+\|M\|_s)^{p-1}\right]$$

$= N_t + (p-1)\int_0^t M_s\,(\alpha+\|M\|_s)^{p-2}\, d\|M\|_s$ où $N_t = \int_0^t (\alpha+\|M\|_s)^{p-1} dM_s$

donc $|N_t| \leq \|M\|_t^p + (1-p)\cdot\int_0^t \|M\|_s^{p-1}\, d\|M\|_s = \frac{1}{p}\|M\|_t^p$

et $E\{N_t^2\} = E\left\{\int_0^t (\alpha + \|M\|_s)^{2(p-1)}\, d\langle M\rangle_s\right\} \leq \frac{1}{p^2}\, E\{\|M\|_t^{2p}\}$.

d'où l'inégalité $E\{(\alpha+\|M\|_t)^{2(p-1)}\langle M\rangle_t\} \leq \frac{1}{p^2}\, E\{\|M\|_t^{2p}\}$

Or l'identité $\langle M\rangle_t^p = \left[\langle M\rangle_t^p\, (\alpha + \|M\|_t)^{-2p(1-p)}\right] (\alpha + \|M\|_t)^{2p(1-p)}$

entraine, grâce à l'inégalité de Hölder, que :

$$E\{\langle M\rangle_t^p\} \leq \left(E\{\langle M\rangle_t\cdot(\alpha+\|M\|_t)^{2(p-1)}\}\right)^p \left(E\{(\alpha+\|M\|_t)^{2p}\}\right)^{1-p}$$

$$\leq \left(\frac{1}{p^2}\right)^p \left(E\{\|M\|_t^{2p}\}\right)^p\cdot\left(E\{(\alpha+\|M\|_t)^{2p}\}\right)^{1-p}.$$

En faisant tendre α vers zéro, on obtient que :

$$E\{\langle M\rangle_t^p\} \leq \frac{1}{p^{2p}}\cdot E\{\|M\|_t^{2p}\}. \qquad \square$$

Chap. 4. Equations différentielles stochastiques.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré vérifiant les conditions habituelles et $B = (B_t^1, \dots, B_t^d)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$, issu de zéro.

On note $\mathcal{M}$ l'espace des matrices à q lignes et d colonnes.

Si $m = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}$, on pose $|m| = \left(\sum_{i,j} |m_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$.

On considère deux applications σ et b de $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^q$ dans $\mathcal{M}$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement, vérifiant les conditions suivantes :

i) Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(v, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$:

$$|\sigma(v, \omega, x) - \sigma(v, \omega, y)| \leq C . |x - y|$$

$$|b(v, \omega, x) - b(v, \omega, y)| \leq C . |x - y|$$

(où $x = (x_1, \dots, x_q)$, on pose $|x| = \left(\sum_i x_i^2 \right)^{1/2}$)

ii) Pour tous $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^q$, les applications

$$(v, \omega) \in [0, t] \times \Omega \longrightarrow \sigma(v, \omega, x)$$

et $$(v, \omega) \in [0, t] \times \Omega \longrightarrow b(v, \omega, x).$$

sont $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$ mesurables.

iii) Pour tous $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^q$, on a :

$$E \left\{ \int_0^t |\sigma|^2 (v, \cdot, x) \, dv \right\} < \infty$$

et $$E \left\{ \int_0^t |b|^2 (v, \cdot, x) \, dv \right\} < \infty.$$

__Remarque__ :

Compte tenu de i), si la condition iii) est satisfaite pour un $x_0 \in \mathbb{R}^q$, elle est satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}^q$.

Théorème 1 :

Soient $s \geq 0$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_q)$ une v.a. à valeurs $\mathbb{R}^q$, $\mathcal{F}_s$-mesurable, de carré intégrable et soient σ et b deux applications de $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^q$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement, vérifiant les conditions i), ii), iii) précédentes, il existe alors un processus $(X_t, t \geq s)$ à valeurs $\mathbb{R}^q$, adapté, continu, unique (à l'indistingabilité près) vérifiant les conditions suivantes :

j) Pour tout $t \geq s$: $E\left\{ \int_s^t |X_u|^2 du \right\} < \infty$

jj) $X_t = \eta + \int_s^t \sigma(u, X_u)\, dB_u + \int_s^t b(u, X_u)\, du \qquad (t \geq s)$ p.s.

Remarques :

1) jj) signifie que, pour tout $l \in \{1, 2, \dots, q\}$, on a :

$$X_t^l = \eta_l + \sum_{k=1}^d \int_s^t \sigma_{l,k}(u, X_u)\, dB_u^k + \int_s^t b_l(u, X_u)\, du \qquad (t \geq s) \text{ p.s.}$$

si $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^q)$.

2) Sous la condition j, jj) a un sens, car :

$$|\sigma(u, X_u)|^2 \leq 2\left\{ |\sigma(u,0)|^2 + C^2 |X_u|^2 \right\}$$

Dém.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des processus $(Y_t, t \geq s)$ adaptés, continus à valeurs $\mathbb{R}^q$, tels que, pour tout $t \geq s$:

$$\|Y\|_t^2 = E\left\{ \sup_{s \leq u \leq t} |Y_u|^2 \right\} < \infty .$$

Si $Y \in \mathcal{D}$, on définit

$$SY(t) = \eta + \int_s^t \sigma(u, Y_u)\, dB_u + \int_s^t b(u, Y_u)\, du \qquad (t \geq s)$$

Soient Y^1 et Y^2 appartenant à $\mathcal{D}$, on a :

$$SY^1(t) - SY^2(t) = \int_s^t \left(\sigma(u, Y_u^1) - \sigma(u, Y_u^2)\right) dB_u + \int_s^t \left(b(u, Y_u^1) - b(u, Y_u^2)\right) du$$

donc :

$$\sup_{s \leq u \leq t} |SY^1(u) - SY^2(u)|^2 \leq 2 \sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u \left(\sigma(v, Y_v^1) - \sigma(v, Y_v^2)\right) dB_v \right|^2 + 2(t-s) \int_s^t |b(u, Y_u^1) - b(u, Y_u^2)|^2 du$$

En appliquant l'inégalité de Doob (cf. Th. 1 ii) du Chap. 0), on a :

$$(*) : \| SY^1 - SY^2 \|_t^2 \leqslant 8 \int_s^t E\{ |\sigma(u, Y_u^1) - \sigma(u, Y_u^2)|^2 \} du + 2(t-s) \cdot \int_s^t E\{ |b(u, Y_u^1) - b(u, Y_u^2)|^2 \} du$$

$$\leqslant 2C^2(4 + (t-s)) \cdot \int_s^t E\{ |Y_u^1 - Y_u^2|^2 \} du .$$

En prenant $Y^2 \equiv 0$, l'inégalité précédente entraine d'abord que si $Y \in \mathcal{D}$ alors $SY \in \mathcal{D}$.

Posons $C_t = 2C^2(4 + (t-s))$ et $\varphi(u) = E\{ |Y_u^1 - Y_u^2|^2 \}$; l'inégalité $(*)$ montre, de plus, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(**) : \| S^n Y^1 - S^n Y^2 \|_t^2 \leqslant (C_t)^2 \int_s^t du \int_s^u E\{ | S^{n-2} Y^1(v) - S^{n-2} Y^2(v) |^2 \} dv$$

$$\leqslant (C_t)^n \int 1_{(t \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_n \geqslant s)} \varphi(u_n) du_1 du_2 \ldots du_n .$$

$$\leqslant (C_t)^n . \| Y^1 - Y^2 \|_t^2 . \frac{(t-s)^n}{n!}$$

Montrons maintenant l'existence d'un point fixe de S.

Partons d'un point quelconque $Y \in \mathcal{D}$ et posons :

$X^0 = Y$, $X^n = S^n Y$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(***) \quad E\left\{ \sup_{s \leqslant u \leqslant t} |X_u^n - X_u^{n+1}|^2 \right\} \leqslant \frac{[C_t(t-s)]^n}{n!} . \| Y - SY \|_t^2 .$$

on en déduit que :

$$E\left\{ \sum_{n \geqslant 0} \sup_{s \leqslant u \leqslant t} |X_u^n - X_u^{n+1}| \right\} \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{[C_t(t-s)]^n}{n!} \| Y - SY \|_t^2 \right)^{1/2} < \infty$$

donc $\sum_{n \geqslant 0} \sup_{s \leqslant u \leqslant t} |X_u^n - X_u^{n+1}| < \infty$ p.s. , pour tout $t \geqslant s$;

la suite de processus continus $(X_u^n)_{u \geqslant s}$ converge p.s uniformément sur tout compact de $[s, +\infty[$ vers un processus continu, adapté $X = (X_u)_{u \geqslant s}$; l'inégalité $(***)$ entraine de plus que

$$\left(E\left\{ \sup_{s \leqslant u \leqslant t} |X_u^n - X_u|^2 \right\} \right)^{1/2} \leqslant \sum_{m \geqslant n} \| X^m - X^{m+1} \|_t \longrightarrow 0 , \text{ quand } n \to \infty$$

donc $X \in \mathcal{D}$, $X^n \longrightarrow X$ dans $\mathcal{D}$ et

$$\| X - SX \|_t \leqslant \| X - X^{n+1} \|_t + \| SX^n - SX \|_t \longrightarrow 0 , \text{ quand } n \to \infty .$$

On en déduit que $X = SX$.

Soient X et $\tilde{X}$ deux points fixes de S ; on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$X - \tilde{X} = S^n X - S^n \tilde{X}$ et d'après l'inégalité $(**)$:

$$\| X - \tilde{X} \|_t^2 \leqslant \frac{[C_t (t-s)]^n}{n!} \cdot \| X - \tilde{X} \|_t^2 \longrightarrow 0 \text{, quand } n \to \infty$$

donc $X = \tilde{X}$. ▫

Lemme de Gronwall :

Soit f une application mesurable de $[s, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$.

Si, pour tout $t \geqslant s$, on a :

$$f(t) \leqslant a + b \int_s^t f(u)\, dh_u < \infty$$

où a et b sont deux constantes positives et $h = (h_u)_{u \geqslant s}$ est une fonction croissante continue, alors

$$f(t) \leqslant a \exp\{ b (h_t - h_s) \}, \text{ pour tout } t \geqslant s.$$

Dém.

Soient $\varepsilon > 0$ et $g(t) = (a+\varepsilon) \exp(b (h_t - h_s))$. On a

$$g(t) = (a+\varepsilon) + b \int_s^t g(u)\, dh_u \qquad (t \geqslant s)$$

donc $$f(t) - g(t) \leqslant -\varepsilon + b \int_s^t (f(u) - g(u))\, dh_u \qquad (t \geqslant s)$$

Soit $\tau = \operatorname{Inf}\{ t \geqslant s \text{ t.q. } f(t) - g(t) \geqslant 0 \}$ $\quad (\operatorname{Inf}(\emptyset) = +\infty)$

Si τ est fini, il existe une suite $\tau_n \downarrow \tau$ telle que :

$$0 \leqslant f(\tau_n) - g(\tau_n) \leqslant -\varepsilon + b \int_s^{\tau_n} (f(u) - g(u))\, dh_u$$

d'où $$0 \leqslant \overline{\lim_n} \, (f(\tau_n) - g(\tau_n)) \leqslant -\varepsilon + b \int_s^{\tau} (f(u) - g(u))\, dh_u \leqslant -\varepsilon$$

ce qui est contradictoire.

Donc $\tau = +\infty$ et $f(t) < g(t)$, pour tout $t \geqslant s$. ▫

Proposition 2 :

Soient $s \geqslant 0$, η et $\tilde{\eta}$ deux v.a. à valeurs $\mathbb{R}^q$, $\mathcal{F}_s$ mesurables de carré intégrable et soient σ et b deux applications vérifiant les conditions du Th. 1.

Notons X et $\tilde{X}$ les solutions respectives de :

$$X_t = \eta + \int_s^t \sigma(u, X_u)\, dB_u + \int_s^t b(u, X_u)\, du$$

$$\tilde{X}_t = \tilde{\eta} + \int_s^t \sigma(u, \tilde{X}_u)\, dB_u + \int_s^t b(u, \tilde{X}_u)\, du \qquad (t \geq s).$$

alors, pour tout $t \geq s$, il existe une constante $C_t > 0$ telle que $E\left\{ \sup_{s \leq u \leq t} |X_u - \tilde{X}_u|^2 \right\} \leq C_t \cdot E\left\{ |\eta - \tilde{\eta}|^2 \right\}$

Dém. :

On a : $X_t - \tilde{X}_t = \eta - \tilde{\eta} + \int_s^t \left(\sigma(u, X_u) - \sigma(u, \tilde{X}_u)\right) dB_u + \int_s^t \left(b(u, X_u) - b(u, \tilde{X}_u)\right) du$

Soit $f(t) = E\left\{ \sup_{s \leq u \leq t} |X_u - \tilde{X}_u|^2 \right\}$. On a :

$$f(t) \leq 3\, E\{ |\eta - \tilde{\eta}|^2 \} + 12\, E\left\{ \int_s^t |\sigma(u, X_u) - \sigma(u, \tilde{X}_u)|^2 du \right\}$$

$$+ 3(t-s) \int_s^t E\left\{ |b(u, X_u) - b(u, \tilde{X}_u)|^2 \right\} du$$

$$\leq 3\, E\{ |\eta - \tilde{\eta}|^2 \} + C^2 (12 + 3(t-s)) \int_s^t f(u)\, du. \qquad (t \geq s)$$

Il suffit d'appliquer le lemme de Gronwall pour conclure. □

Proposition 3.

Soient σ et b deux applications vérifiant les conditions du Th. 1 et $s \geq 0$. Il existe une famille $\left(X_t^s(x, \omega),\ x \in \mathbb{R}^q,\ \omega \in \Omega,\ s \leq t \right)$ telle que :

① Pour tout $t \geq s$, l'application

$(x, \omega) \in \mathbb{R}^q \times \Omega \longrightarrow X_t^s(x, \omega) \in \mathbb{R}^q$

est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^q} \otimes \mathcal{F}_t$ mesurable

② Pour toute v.a. η à valeurs $\mathbb{R}^q$, $\mathcal{F}_s$-mesurable, de carré intégrable, $Y_t(\omega) = X_t^s(\eta(\omega), \omega)$ est solution de :

$$(*) \qquad Y_t = \eta + \int_s^t \sigma(u, Y_u)\, dB_u + \int_s^t b(u, Y_u)\, du \qquad (t \geq s) \quad \text{p.s.}$$

Dém. :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une partition dénombrable de $\mathbb{R}^q$ en sous-ensembles T_k tels que $\operatorname{diam}(T_k) \leq 2^{-n}$;

pour tout $k \in \mathbb{N}$, on choisit $z_k \in T_k^n$ et on définit :

$$g_n(x) = \sum_k z_k \cdot 1_{T_k^n}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^q)$$

Soit $z \in \mathbb{R}^q$; on considère la solution $\tilde{X}_t(z,\omega)$ de :

$$\tilde{X}_t = z + \int_s^t \sigma(u, \tilde{X}_u)\, dB_u + \int_s^t b(u, \tilde{X}_u)\, du \qquad (t \geq s,\ \omega \notin \mathcal{N}_z \text{ où } \mathcal{N}_z \text{ est négligeable}).$$

Soit $\mathcal{N}_n = \bigcup_k \mathcal{N}_{z_k}$. Posons : $X_t^n(x,\omega) = \tilde{X}_t(g_n(x),\omega) \cdot 1_{(\mathcal{N}_n)^c}(\omega)$.

On voit facilement que l'application :

$$(x,\omega) \longrightarrow X_t^n(x,\omega)$$

est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^q} \otimes \mathcal{F}_t$ mesurable ; de plus :

$$E\left\{ \sup_{s \leq u \leq t} |X_u^n(x) - \tilde{X}_u(x)|^2 \right\} \leq C_t \cdot |x - g_n(x)|^2 \leq C_t \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2$$

donc $E\left\{ \sum_{n \geq 0} \sup_{s \leq u \leq t} |X_u^n(x) - \tilde{X}_u(x)| \right\} < \infty$

et $\sup_{s \leq u \leq t} |X_u^n(x) - \tilde{X}_u(x)| \longrightarrow 0$ p.s., pour tout $t \geq s$

On définit $X_t^s(x,\omega) = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, X_t^n(x,\omega)$

(la $\overline{\lim}$ a lieu composante par composante)

Soit η une v.a. à valeurs $\mathbb{R}^q$, $\mathcal{F}_s$ mesurable, de carré intégrable, on vérifie facilement que :

$Y_t^n(\omega) = X_t^n(\eta(\omega),\omega)$ est solution de :

$$(**) \qquad Y_t^n = g_n(\eta) + \int_s^t \sigma(u, Y_u^n)\, dB_u + \int_s^t b(u, Y_u^n)\, du \qquad (t \geq s)$$

puis que $\sup_{s \leq u \leq t} |Y_u^n - Y_u| \longrightarrow 0$ p.s., pour tout $t \geq s$,

où $Y = (Y_u)_{u \geq s}$ est la solution de $(*)$.

On en déduit que :

$$X_t^s(\eta(\omega),\omega) = Y_t(\omega) \quad \text{pour tout } t \geq s \text{, p.s.} \qquad \square$$

<u>Remarque</u> : Pour vérifier que $(Y_t^n)_{t \geq s}$ est solution de l'équation $(**)$ on utilise le fait que, pour tout k :

$$1_{(\eta \in T_k^n)} \int_s^t \sigma(u, X_u^n(z_k))\, dB_u = \int_s^t 1_{(\eta \in T_k^n)} \cdot \sigma(u, X_u^n(z_k))\, dB_u \quad \text{p.s.}$$

(exercice).

Corollaire 4.

Avec les notations de la Proposition 3 :

pour tous $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u$ et $x \in \mathbb{R}^q$, on a

$$X_u^s(x,\omega) = X_u^t(X_t^s(x,\omega),\omega) \quad \text{p.s.}$$

Dém. :

On a : $X_u^s(x) = x + \int_s^u \sigma(v, X_v^s)\, dB_v + \int_s^u b(v, X_v^s)\, dv$

$$= \left(x + \int_s^t \sigma(v, X_v^s)\, dB_v + \int_s^t b(v, X_v^s)\, dv\right) + \int_t^u \sigma(v, X_v^s)\, dB_v + \int_t^u b(v, X_v^s)\, dv$$

$$= X_t^s(x) + \int_t^u \sigma(v, X_v^s)\, dB_v + \int_t^u b(v, X_v^s)\, dv \quad \text{p.s.}$$

donc $X_u^s(x,\omega) = X_u^t(X_t^s(x,\omega),\omega)$ p.s., d'après la Prop. 3. $\square$

On suppose, dans la suite, que les coefficients σ et b ne dépendent pas de $\omega \in \Omega$ i.e. que σ et b sont deux applications mesurables de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^q$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement, vérifiant l'hypothèse $\mathcal{H}$ suivante.

$\mathcal{H}_1$) Il existe $C > 0$ telle que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ et $u \in \mathbb{R}_+$

$$|\sigma(u,x) - \sigma(u,y)| + |b(u,x) - b(u,y)| \leqslant C\,|x-y|$$

$\mathcal{H}_2$. Pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^q$:

$$\int_0^t \left(|\sigma|^2(u,x) + |b|^2(u,x)\right) du < \infty$$

On notera $\left(X_t^s(x,\omega)\right)_{0 \leqslant s \leqslant t}$ la solution régulière, donnée par la Proposition 3, de l'E.D.S.

$$(1) \quad X_t^s(x) = x + \int_s^t \sigma(u, X_u^s(x))\, dB_u + \int_s^t b(u, X_u^s(x))\, du \quad \text{p.s.}$$

Théorème 5 :

Soient σ et b deux applications de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^q$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement, vérifiant l'hypothèse $\mathcal{H}$ et $\left(X_t^s(x,\omega)\right)_{0 \leq s \leq t}$ la solution de l'E.D.S. (1), alors pour toute application f mesurable et bornée de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$ et tous $0 \leq s \leq t \leq u$, on a :

$$(2) \quad E\left\{ f(X_u^s(x)) / \mathcal{F}_t \right\} = E\left\{ f(X_u^s(x)) / X_t^s(x) \right\} = \Pi_{(t,u)} f\left(X_t^s(x)\right) \quad \text{p.s.}$$

où $\Pi_{(t,u)} f(z) = E\left\{ f\left(X_u^t(z)\right)\right\} \quad (z \in \mathbb{R}^q)$

Dém. :

Soient $z \in \mathbb{R}^q$ et $0 \leq t \leq u$. On a :

$$X_u^t(z) = z + \int_t^u \sigma(v, X_v^t(z))\, dB_v + \int_t^u b(v, X_v^t(z))\, dv \quad \text{p.s.}$$

$$= z + \int_0^{u-t} \sigma(t+v, X_{t+v}^t)\, dB_v^t + \int_0^{u-t} b(t+v, X_{t+v}^t)\, dv \quad \text{p.s.}$$

où $B^t = \left(B_v^t\right)_{v \geq 0} = \left(B_{t+v} - B_t\right)_{v \geq 0}$ est un mouvement brownien translaté, indépendant de la tribu $\mathcal{F}_t$.

Notons $\left(\mathcal{G}_u^t\right)_{u \geq t}$ la filtration complète donnée par :

$\mathcal{G}_u^t = \sigma\left\{ B_{t+v} - B_t \,,\ 0 \leq v \leq u-t \right\}$.

On vérifie facilement, d'après la Proposition 3, que l'application :

$(z,\omega) \in \mathbb{R}^q \times \Omega \longrightarrow X_u^t(z,\omega) \in \mathbb{R}^q$

est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^q} \otimes \mathcal{G}_u^t$ mesurable.

En considérant le processus $B^t = \left(B_v^t\right)_{v \geq 0}$ comme une v.a. à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, on voit qu'il existe une application mesurable Θ_u^t de $\mathbb{R}^q \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}^q$:

$(z, w) \in \mathbb{R}^q \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \longrightarrow \Theta_u^t(z,w) \in \mathbb{R}^q$

telle que $X_u^t(z,\omega) = \Theta_u^t(z, B^t(\omega))$, pour tout $(z,\omega) \in \mathbb{R}^q \times \Omega$.

Notons μ la mesure de Wiener sur l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ (c'est la loi du processus $\left(B_v^t\right)_{v \geq 0}$).

On a :

$$E\{ f(X_u^t(z)) \} = \int_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)} f(\Theta_u^t(z, w))\, \mu(dw) = \Pi_{(t,u)} f(z)$$

De plus, si $0 \leq s \leq t \leq u$, on a, d'après le Lemme 4 :

$$E\{ f(X_u^s(x)) / \mathcal{F}_t \} = E\{ f(X_u^t(X_t^s(x))) / \mathcal{F}_t \}$$

$$= E\{ f(\Theta_u^t(X_t^s(x), B^t)) / \mathcal{F}_t \}$$

$$= \int_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)} f(\Theta_u^t(X_t^s(x), w))\, \mu(dw) = \Pi_{(t,u)} f(X_t^s(x)) \quad \text{p.s.}$$

puisque $X_t^s(x)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et que B^t est indépendant de $\mathcal{F}_t$. $\square$

Notons $\Pi_{(s,t)}(x, dy)$ $(0 \leq s \leq t)$ le noyau de transition de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^q$ défini par :

(3) $\Pi_{(s,t)}(x, A) = P\{ X_t^s(x) \in A \}$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}$, $x \in \mathbb{R}^q$

La formule (2) montre que :

$$E\{ f(X_u^s(x)) \} = E\{ \Pi_{(t,u)} f(X_t^s(x)) \} = \Pi_{(s,u)} f(x),$$

ce qui entraîne la propriété de semi-groupe (non homogène) suivante :

(4) $\Pi_{(s,u)}(x, dy) = \int \Pi_{(s,t)}(x, dz)\, \Pi_{(t,u)}(z, dy)$

$(0 \leq s \leq t \leq u)$.

La formule (2) montre, de plus, que le processus $(\Pi_{(t,u)} f(X_t^s(x)),\ s \leq t \leq u)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

Réciproquement, la donnée du semi-groupe de transition $(\Pi_{(s,t)}(x, dy))_{0 \leq s \leq t}$ détermine entièrement la loi du processus $(X_t^s(x))_{t \geq s}$. En effet : soient $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_{n-1} \leq t_n$ et $f_1, \ldots, f_n$ n applications mesurables bornées de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$

$$E\left\{ f_1\left(X^s_{t_1}(x)\right) \cdots f_{n-1}\left(X^s_{t_{n-1}}(x)\right) \cdot f_n\left(X^s_{t_n}(x)\right) \right\}$$
$$= E\left\{ f_1\left(X^s_{t_1}(x)\right) \cdots f_{n-1}\left(X^s_{t_{n-1}}(x)\right) \cdot \Pi_{(t_{n-1}, t_n)} f_n\left(X^s_{t_{n-1}}(x)\right) \right\}$$
$$= \int \Pi_{(s, t_1)}(x, dy_1)\, \Pi_{(t_1, t_2)}(y_1, dy_2) \cdots \Pi_{(t_{n-1}, t_n)}(y_{n-1}, dy_n)\, f_1(y_1) f_2(y_2) \cdots f_n(y_n)$$

$\square$

Théorème 6 (Unicité en loi).

Soit $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{F}_t, \tilde{P})$ un deuxième espace de probabilité filtré, vérifiant les conditions habituelles, sur lequel est défini un autre $\tilde{F}_t$ - mouvement brownien $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ à valeurs $\mathbb{R}^d$, issu de zéro.

Soit $x \in \mathbb{R}^q$. Notons $(X_t(x, \omega))_{t \geq 0, \omega \in \Omega}$ et $(\tilde{X}_t(x, \tilde{\omega}))_{t \geq 0, \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}}$ les solutions respectives des E.D.S.

(5) $\quad X_t(x) = x + \int_0^t \sigma(u, X_u(x))\, dB_u + \int_0^t b(u, X_u(x))\, du \qquad$ p.s.

(6) $\quad \tilde{X}_t(x) = x + \int_0^t \sigma(u, \tilde{X}_u(x))\, d\tilde{B}_u + \int_0^t b(u, \tilde{X}_u(x))\, du \qquad$ p.s.

où les coefficients σ et b vérifient l'hypothèse $\mathcal{H}$, alors les processus $(X_t(x))_{t \geq 0}$ et $(\tilde{X}_t(x))_{t \geq 0}$ ont même loi sur l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^q)$.

Dém.

On considère le mouvement brownien canonique $\pi = (\pi_t(w))_{t \geq 0}$ défini sur l'espace $(W = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathcal{B}_W, \mathcal{B}_t, \mu)$ où μ est la mesure de Wiener, $\mathcal{B}_t = \sigma\{\pi_s ; s \leq t\}$

Soit $(Y_t(x, w))_{t \geq 0, w \in W}$ la solution régulière de l'E.D.S (définie sur W)

(7) $\quad Y_t(x) = x + \int_0^t \sigma(u, Y_u(x))\, d\pi_u + \int_0^t b(u, Y_u(x))\, du \quad \mu$ p.s.

On vérifie aisément que les processus

$Z_t(x, \omega) = Y_t(x, B(\omega)) \qquad (t \geq 0, \omega \in \Omega)$

$\tilde{Z}_t(x, \tilde{\omega}) = Y_t(x, \tilde{B}(\tilde{\omega})) \qquad (t \geq 0, \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega})$

sont respectivement solutions des équations (5) et (6).

On en déduit, grâce à l'unicité trajectorielle de ces solutions que $Y_t(x, B(\omega))_{t \geq 0} = (X_t(x,\omega))_{t\geq 0}$ P p.s.

et que $Y_t(x, \tilde{B}(\tilde{\omega}))_{t\geq 0} = (\tilde{X}_t(x,\tilde{\omega}))_{t\geq 0}$ $\tilde{P}$ p.s.

Or les mouvements browniens B et $\tilde{B}$ ont même loi sur l'espace $W = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ (la mesure de Wiener μ) donc les processus $(X_t(x))_{t\geq 0}$, $(\tilde{X}_t(x))_{t\geq 0}$ et $(Y_t(x))_{t\geq 0}$ ont même loi sur l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^q)$. $\square$

Cas homogène :

On suppose maintenant que les coefficients σ et b ne dépendent ni de $u \in \mathbb{R}_+$, ni de $\omega \in \Omega$ i.e. que σ et b sont deux applications de $\mathbb{R}^q$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement vérifiant l'hypothèse $\mathcal{H}'$ suivante :

$(\mathcal{H}')$ Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| + |b(x) - b(y)| \leq C \cdot |x-y|$$

Théorème 7 (Propriété de Markov simple).

Considérons la solution régulière $(X_t(x))_{t\geq 0}$ de l'E.D.S.

$$(8) \quad X_t(x) = x + \int_0^t \sigma(X_u(x))\, dB_u + \int_0^t b(X_u(x))\, du \quad \text{p.s.}$$

où les coefficients σ et b vérifient l'hypothèse $(\mathcal{H}')$

Alors pour tous $0 \leq t \leq u$ et toute application f mesurable bornée de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$(9) \quad E\{f(X_u(x))/\mathcal{F}_t\} = E\{f(X_u(x))/X_t(x)\} = \Pi_{u-t} f(X_t(x)) \quad \text{p.s.}$$

$$(10) \quad \text{où} \quad \Pi_s f(x) = E\{f(X_s(x))\} \quad (s \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^q).$$

Dém :

Considérons la solution $(X^t_u(x))_{0\leq t\leq u}$ de l'E.D.S.

$$X^t_u(x) = x + \int_t^u \sigma(X^t_v(x))\, dB_v + \int_t^u b(X^t_v(x))\, dv$$

Il suffit, compte tenu du Théorème 5 où on prend $s=0$, de montrer que, pour $0 \leq t \leq u$ $E\{f(X^t_u(x))\} = E\{f(X^0_{u-t}(x))\}$

or $X_u^t(x) = x + \int_0 \sigma(X_{t+s}^t(x))\, dB_s^t + \int_0 b(X_{t+s}^t(x))\, ds$ (11)

où $B_s^t = B_{t+s} - B_t$ $(s \geq 0)$

Posons $Y_s(\omega) = X_{t+s}^t(x, \omega)$.

L'équation (11) montre que, pour tout $s \geq 0$, on a :

$$Y_s = x + \int_0^s \sigma(Y_u)\, dB_u^t + \int_0^s b(Y_u)\, du \quad \text{p.s.}$$

Le processus $(Y_s)_{s\geq 0}$ est donc solution d'une E.D.S. analogue à l'équation (8) où on remplace le mouvement brownien $(B_u)_{u\geq 0}$ par le mouvement brownien translaté $(B_u^t)_{u\geq 0}$.

D'après le Théorème 6, on voit que les processus $(Y_s)_{s\geq 0}$ et $(X_s^0(x))_{s\geq 0}$ ont même loi, donc :

$$E\{f(X_{t+s}^t(x))\} = E\{f(X_s^0(x))\} \quad (s \geq 0). \ \square$$

Notons $\Pi_t(x, dy)$ $(t \geq 0)$ le noyau de transition de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^q$ donné par :

(11) $\Pi_t(x, A) = P\{X_t(x) \in A\}$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}$, $x \in \mathbb{R}^q$.

On définit ainsi un semi-groupe de transition homogène : pour tous $s \geq 0$ et $t \geq 0$:

(12) $\Pi_{t+s}(x, dy) = \int \Pi_t(x, dz)\, \Pi_s(z, dy) = \Pi_t . \Pi_s(x, dy)$

(cf. la formule (4)).

<u>Propriétés du semi-groupe $(\Pi_t(x, dy))_{t\geq 0}$</u> :

Si f est une application mesurable de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}_+$:

(13) $E\{f(X_t(x))\} = \Pi_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \Pi_t(x, dy)\, f(y)$

<u>Proposition 8</u> (sous les hypothèses du Th. 7).

1) Si f est une application continue et bornée de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$ $(f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^q))$, l'application

$$\Pi_t f : x \in \mathbb{R}^q \longrightarrow \Pi_t f(x) \in \mathbb{R}$$

est continue bornée (i.e. $\Pi_t(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^q)) \subseteq \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^q)$)

2) Si f est une application continue de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$ et tend vers zéro à l'infini ($f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^q)$) et si les coefficients σ et b sont bornés, alors $\Pi_t f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^q)$ (i.e. $\Pi_t(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^q)) \subseteq \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^q)$).

Dém.

1) Soient $f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^q)$, $x \in \mathbb{R}^q$, $x_n \in \mathbb{R}^q$ tels que $x_n \to x$, il faut montrer que $\Pi_t f(x_n) \longrightarrow \Pi_t f(x)$ (qd $n \to \infty$).

On a :

$$|\Pi_t f(x_n) - \Pi_t f(x)| = |E\{f(X_t(x_n))\} - E\{f(X_t(x))\}|$$

Il suffit de vérifier que $X_t(x_n) \longrightarrow X_t(x)$ en loi ;

or $X_t(x_n) \longrightarrow X_t(x)$ dans L^2, puisque $E\{|X_t(x_n) - X_t(x)|^2\} \leqslant C|x_n - x|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2) Soient $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^q)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ t.q

$$|y| > A \Rightarrow |f(y)| < \varepsilon$$

On a : $X_t(x) = x + \int_0^t \sigma(X_s(x))\,dB_s + \int_0^t b(X_s(x))\,ds$

Supposons que $|x| > B > A$. On a :

$$|E\{f(X_t(x))\}| \leqslant E\{|f(X_t(x))|\, 1_{(|X_t(x)| > A)}\}$$

$$+ \|f\|_\infty\, P\{|X_t(x)| \leqslant A\}$$

$$\leqslant \varepsilon + \|f\|_\infty\, P\left\{\left|\int_0^t \sigma(X_s(x))\,dB_s + \int_0^t b(X_s(x))\,ds\right| \geqslant B - A\right\}$$

$$\leqslant \varepsilon + \|f\|_\infty \cdot \frac{1}{(B-A)^2}\, E\left\{\left|\int_0^t \sigma(X_s(x))\,dB_s + \int_0^t b(X_s(x))\,ds\right|^2\right\}$$

$$\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \cdot \frac{1}{(B-A)^2}\left\{\|\sigma\|_\infty^2 \cdot t + (\|b\|_\infty\, t)^2\right\}$$

$\leqslant 2\varepsilon$, si on choisit B assez grand $\blacksquare$.

Notons $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^q)$ l'espace des applications f de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. On définit un opérateur différentiel L de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^q)$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^q)$ par :

(14) $$Lf(\cdot) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{q} a_{i,j}(\cdot) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\cdot) + \sum_{i=1}^{q} b_i(\cdot) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\cdot)$$

où $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^q)$, $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_q(x))$, $x = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$

$$a(x) = \sigma(x) \cdot \sigma^*(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j=1,\ldots,q}$$

i.e. $a_{i,j}(x) = \sum_{l=1}^{d} \sigma_{i,l}(x)\, \sigma_{j,l}(x)$.

Remarquer que la matrice $a(x)$ est symétrique positive, éventuellement dégénérée (on peut avoir $\det a(x) = 0$) : pour tout $y \in \mathbb{R}^q$, on a : $\langle a(x) y, y \rangle_{\mathbb{R}^q} = |\sigma^*_{(x)}(y)|^2 \geq 0$.

<u>Théorème 9</u> : (sous les hypothèses du Th 7)

Soient $(X_t(x))_{t \geq 0}$ la solution de l'E.D.S. (8), L l'opérateur différentiel donné par (14) et f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$, alors :

(15) $$M_f(t) = f(X_t(x)) - f(x) - \int_0^t Lf(X_s(x))\, ds \qquad (t \geq 0)$$

est une $\mathcal{F}_t$ - martingale locale, nulle en zéro.

Si, de plus, f est de classe $\mathcal{C}_b^2$ (i.e. que les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sont bornées), $(M_f(t))_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ - martingale et

(16) $$\Pi_t f(x) = f(x) + \int_0^t \Pi_s L f(x)\, ds \qquad (t \geq 0)$$

<u>Dém</u> :

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^q)$. Appliquons la formule d'Itô à $f(X_t(x))$.

$$f(X_t(x)) = f(x) + \sum_{i=1}^{q} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s(x))\, dM_s^i$$

$$+ \sum_{i=1}^{q} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s(x))\, b_i(X_s(x))\, ds + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{q} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s(x))\, d\langle M^i, M^j \rangle_s$$

où $M_t^i = \sum_{l=1}^{d} \int_0^t \sigma_{i,l}(X_s(x))\, dB_s^l$

$$\langle M^i, M^j\rangle_t = \sum_{l,k=1}^{d} \int_0^t \sigma_{i,l}(X_s(x)) \cdot \sigma_{j,k}(X_s(x))\, d\langle B^l, B^k\rangle_s$$

$$= \sum_{l=1}^{d} \int_0^t \sigma_{i,l} \cdot \sigma_{j,l}\,(X_s(x))\,ds = \int_0^t a_{i,j}(X_s(x))\,ds .$$

Donc

$$M_f(t) = f(X_t(x)) - f(x) - \int_0^t Lf(X_s(x))\,ds = \sum_{i=1}^{q} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s(x))\,dM_s^i$$

est bien une $\mathcal{F}_t$ - martingale locale.

Si, de plus, f est de classe $\mathcal{C}_b^2$, on vérifie facilement que $E\left\{ \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s(x))\right)^2 d\langle M^i\rangle_s \right\} < \infty \quad (i = 1, 2, \dots, q)$

donc $(M_f(t))$ est une martingale. La relation (16) est alors évidente. □

<u>Corollaire 10</u> :

On munit l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^q)$ de la norme uniforme :

si $f \in \mathcal{C}_0$, $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^q} |f(x)|$

1) Si $f \in \mathcal{C}_0$ alors $\|\Pi_t f - f\| \longrightarrow 0$, quand $t \to 0$

2) Si $f \in \mathcal{C}_k^2$ (i.e de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact) alors $\left\| \frac{1}{t}(\Pi_t f - f) - Lf \right\| \longrightarrow 0$, quand $t \to 0$.

<u>Dém</u>. :

1) Supposons d'abord que $f \in \mathcal{C}_k^2$:

$$\Pi_t f(x) - f(x) = \int_0^t \Pi_s Lf(x)\,ds = E\left\{ \int_0^t Lf(X_s(x))\,ds \right\}$$

donc $\|\Pi_t f - f\| \leq t \cdot \|Lf\| \longrightarrow 0$, quand $t \to 0$

Si $f \in \mathcal{C}_0$, soient $\varepsilon > 0$ et $g \in \mathcal{C}_k^2$ tels que $\|f - g\| < \varepsilon$

On a : $\|\Pi_t f - f\| \leq \|\Pi_t(f-g)\| + \|\Pi_t g - g\| + \|g - f\|$

$\leq 2\varepsilon + \|\Pi_t g - g\| \leq 3\varepsilon$, pour tout $t > 0$ assez petit

2) Soit $f \in \mathcal{C}_k^2$: pour tout $t > 0$, on a :

$$\left\| \frac{1}{t}(\Pi_t f - f) - Lf \right\| = \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (\Pi_s Lf - Lf)\,ds \right\|$$

$$\leq \sup_{s \in [0,t]} \|\Pi_s Lf - Lf\| \longrightarrow 0, \text{ quand } t \to 0,$$

d'après 1). □

Théorème 11 (Propriété de Markov forte)

Sous les hypothèses du Th. 7, soient T un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt, $\mathcal{F}_T$ la tribu des événements antérieurs à T et $(X_t(x))_{t \geq 0}$ la solution de (8).

i) Pour toute application f de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$, mesurable bornée et tout $t \geq 0$, on a :

$$(17) \quad E\{ f(X_{T+t}(x))\, 1_{(T<\infty)} / \mathcal{F}_T \} = \Pi_t f(X_T(x)) \cdot 1_{(T<\infty)} \quad p.s.$$

ii) Pour toute application Φ de $W = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^q)$ dans $\mathbb{R}$, mesurable bornée, on a :

$$(18) \quad E\{ \Phi[(X_{s+T}(x))_{s \geq 0}] \cdot 1_{(T<\infty)} / \mathcal{F}_T \} = \Psi(X_T(x)) \cdot 1_{(T<\infty)} \quad p.s.$$

où l'application mesurable Ψ de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\Psi(y) = E\{ \Phi[(X_s(y))_{s \geq 0}] \} \qquad (y \in \mathbb{R}^q).$$

Dém. :

i) Supposons d'abord que T est un temps d'arrêt à valeurs dénombrables. Il faut montrer que, pour tout $A \in \mathcal{F}_T$, on a :

$$E\{ f(X_{T+t}(x)) \cdot 1_{A \cap (T<\infty)} \} = E\{ \Pi_t f(X_T(x)) \cdot 1_{A \cap (T<\infty)} \} \qquad (t \geq 0),$$

or le membre de gauche est égal à :

$$\sum_{r \in Im(T) \setminus \{\infty\}} E\{ f(X_{r+t}^{(x)}) \cdot 1_{A \cap (T=r)} \}$$

$$= \sum_{r \in Im(T) \setminus \{\infty\}} E\{ \Pi_t f(X_r(x)) \cdot 1_{A \cap (T=r)} \}$$, d'après la Prop de Markov simple, puisque $A \cap (T=r) \in \mathcal{F}_r$

$$= E\{ \Pi_t f(X_T(x))\, 1_{A \cap (T<\infty)} \}$$

Soit T un temps d'arrêt quelconque. Pour démontrer (17), il suffit de supposer que f est continue bornée.

On définit $T_n = \sum_{k \geq 0} \frac{k+1}{2^n} \cdot 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}(T) + \infty\, 1_{(T=+\infty)}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

Les $(T_n, n \in \mathbb{N})$ sont des temps d'arrêt qui décroissent vers T et $A \in \mathcal{F}_{T_n}$ $(\forall n)$.

D'après la première partie, on a :

$$E\{ f(X_{T_n+t}(x)) \cdot 1_{A\cap(T_n<\infty)} \} = E\{ \Pi_t f(X_{T_n}(x)) \cdot 1_{A\cap(T_n<\infty)} \}, \forall n$$

En faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité précédente, on voit, grâce au Théorème de Lebesgue, que :

$$E\{ f(X_{T+t}(x)) \cdot 1_{A\cap(T<\infty)} \} = E\{ \Pi_t f(X_T(x)) \cdot 1_{A\cap(T<\infty)} \}$$

puisque, d'après la Proposition 8 :

$$\Pi_t f(X_{T_n}(x)) \cdot 1_{(T_n<\infty)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Pi_t f(X_T(x)) \cdot 1_{(T<\infty)} \quad \text{p.s.}$$

ii) Supposons que l'application Φ de $W = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^q)$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$(*) \quad \Phi(w) = f_1(w_{s_1}) \cdot f_2(w_{s_2}) \cdots f_n(w_{s_n}) \quad \text{où } 0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n, \ w \in W$$

et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des applications mesurables bornées de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$, il faut montrer que :

$$E\{ f_1(X_{s_1+T}(x)) \cdots f_n(X_{s_n+T}(x)) \cdot 1_{(T<\infty)} / \mathcal{F}_T \}$$

$$= \Psi(X_T(x)) \cdot 1_{(T<\infty)} \quad \text{p.s.}$$

$$\text{où} \quad \Psi(y) = E\{ f_1(X_{s_1}(y)) \cdots f_n(X_{s_n}(y)) \} \qquad (y \in \mathbb{R}^q)$$

Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n=1$, c'est l'assertion i) que nous venons de démontrer.

Supposons la propriété satisfaite au rang $n-1$. On a :

$$E\{ f_1(X_{s_1+T}(x)) \cdots f_{n-1}(X_{s_{n-1}+T}(x)) \, f_n(X_{s_n+T}(x)) \, 1_{(T<\infty)} / \mathcal{F}_T \}$$

$$= E\{ f_1(X_{s_1+T}(x)) \cdots f_{n-1}(X_{s_{n-1}+T}(x)) \, E\{ f_n(X_{s_n+T}(x)) \cdot 1_{(T<\infty)} / \mathcal{F}_{s_{n-1}+T} \} / \mathcal{F}_T \}$$

$$= E\{ f_1(X_{s_1+T}(x)) \cdots f_{n-1}(X_{s_{n-1}+T}(x)) \cdot \Pi_{s_n-s_{n-1}} f_n(X_{s_{n-1}+T}(x)) \, 1_{(T<\infty)} / \mathcal{F}_T \}$$

$$= \Psi(X_T(x)) \, 1_{(T<\infty)}, \quad \text{par récurrence}$$

$$\text{où} \quad \Psi(y) = E\{ f_1(X_{s_1}(y)) \cdots f_{n-1}(X_{s_{n-1}}(y)) \cdot \Pi_{s_n-s_{n-1}} f_n(X_{s_{n-1}}(y)) \}$$

$$= E\{ f_1(X_{s_1}(y)) \cdots f_{n-1}(X_{s_{n-1}}(y)) \, E\{ f_n(X_{s_n}(y)) / \mathcal{F}_{s_{n-1}} \} \}$$

$$= E\{ f_1(X_{s_1}(y)) \cdots f_{n-1}(X_{s_{n-1}}(y)) \, f_n(X_{s_n}(y)) \}, \quad \text{d'après (9)}$$

L'assertion ii) est donc démontrée pour les applications ϕ de la forme $(*)$, pour passer au cas général, il suffit d'utiliser un théorème de classe monotone. □

Equation de la chaleur :

Théorème 12 :

Sous les hypothèses du Théorème 7, on suppose, de plus, que les coefficients σ et b sont de classe $\mathcal{C}_b^2$.

Soient L l'opérateur différentiel défini par (14) et f une application de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}_b^2$.

Il existe une solution et une seule $\psi = \left(\psi(t,x)\right)_{(t,x)\in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^q}$ du problème suivant :

i) $\psi(t,x)$ est de classe C^1 en t, C_b^2 en x

ii) $\dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) = L\psi(t,x) = \dfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}(t,x) + \sum_{i=1}^{q} b_i(x)\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}(t,x)$

pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^q$

iii) $\psi(0,x) = f(x)$

$\psi(t,x)$ est, de plus, donnée par la formule :

(R). $\psi(t,x) = E\{f(X_t(x))\} = \Pi_t f(x)$

où $(X_t(x))$ est la solution de l'E.D.S. (8).

Dém :

Sous les hypothèses précédentes, on admettra le résultat suivant :

$\Pi_t f(x)$ est de classe C_b^2 en x [Cf. Gihman-Skorohod p.e]

La formule (16) : $\Pi_t f(x) = f(x) + \int_0^t \Pi_s L f(x)\,ds$

montre que $\Pi_t f(x)$ est de classe C^1 en t.

Soit $u > 0$. Considérons $\Pi_{u-t} f(X_t(x))$, $t\in[0,u]$

On a, en utilisant la formule d'Itô :

$E\{f(X_u(x))/\mathcal{F}_t\} = \Pi_{u-t} f(X_t(x)) = \Pi_u f(x) + N_t$

$+ \int_0^t \left[-\frac{\partial}{\partial u}\Pi_{u-s} f(X_s(x)) + L(\Pi_{u-s} f)(X_s(x))\right] ds$

où (N_t) est une martingale locale continue.

On en déduit que :

$$\int_0^t \left[-\frac{\partial}{\partial u} \Pi_{u-s} f(X_s(x)) + L(\Pi_{u-s} f)(X_s(x)) \right] ds$$

est une martingale locale continue, à variation finie, nulle en zéro : donc identiquement nulle et :

$$-\frac{\partial}{\partial u} \Pi_{u-s} f(X_s(x)) + L(\Pi_{u-s} f)(X_s(x)) = 0, \text{ pour tout } s \in [0,u].$$

En particulier, pour $s = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial u} \Pi_u f(x) = L(\Pi_u f)(x).$$

La formule (R) fournit donc une solution au problème i), ii), iii), puisque $\Pi_0 f(x) = f(x)$.

Réciproquement, soit $\varphi(t,x)$ une solution au problème précédent et soit $u \geq 0$. On a, d'après la formule d'Itô, en considérant le processus $(\varphi(u-t, X_t(x)),\ t \in [0,u])$:

$$\varphi(0, X_u(x)) = f(X_u(x))$$
$$= \varphi(u,x) + \tilde{N}_u + \int_0^u \left[-\frac{\partial}{\partial u} \varphi(u-t, X_t(x)) + L\varphi(u-t, X_t(x)) \right] dt$$
$$= \varphi(u,x) + \tilde{N}_u$$

où $(\tilde{N}_u)$ est une intégrale stochastique d'espérance nulle.

Donc $\varphi(u,x) = E\{f(X_u(x))\} = \Pi_u f(x)$. $\square$

On dit que l'opérateur L défini par (14) est le <u>générateur infinitésimal</u> du processus de diffusion $(X_t(x))$, donné par (8). D'après le Théorème précédent, la donnée de L permet de déterminer le semi-groupe de transition $(\Pi_t(x, dy))_{t \geq 0}$ qui caractérise la loi de $(X_t(x))_{t \geq 0}$.

Localisation :

On suppose que les coefficients σ et b sont deux applications de $\mathbb{R}^q$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement, vérifiant l'hypothèse $(\mathcal{H}'')$ suivante :

$(\mathcal{H}'')$ Pour tout sous-ensemble borné K de $\mathbb{R}^q$, il existe une constante $C(K) > 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in K \times K : \quad |\sigma(x) - \sigma(y)| + |b(x) - b(y)| \leq C(K).\, |x-y| .$$

On dit que σ et b sont localement lipschitziennes.

C'est le cas si, par exemple, elles sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^q$.

Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}'')$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver deux applications σ_n et b_n de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathcal{M}$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement telles que :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^q$ tel que $|x| \leq n$, on a : $\sigma_n(x) = \sigma(x)$ et $b_n(x) = b(x)$.

2) Il existe une constante $D_n > 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q : \quad |\sigma_n(x) - \sigma_n(y)| + |b_n(x) - b_n(y)| \leq D_n \,.\, |x-y|$$

Soient $x \in \mathbb{R}^q$ et $(X_t^n(x),\ t \geq 0)$ la solution de l'E.D.S.

$$(19) \quad X_t^n(x) = x + \int_0^t \sigma_n(X_s^n(x))\, dB_s + \int_0^t b_n(X_s^n(x))\, ds \qquad \text{p.s.}$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on définit le temps d'arrêt :

$$(20) \quad T_n^m(x) = \inf\{ t \geq 0 : |X_t^n(x)| \geq m \} .$$

Lemme 13.

Pour tout $p \geq n$ on a

$$T_n^n(x) = T_p^n(x) \leq T_p^p(x) \qquad \text{p.s.}$$

et $X_t^n(x) = X_t^p(x)$ pour tout $t \in [0, T_n^n(x)]$ p.s.

Dém.

Soit $T = \operatorname{Min}\{ T_n^n(x),\ T_p^n(x) \}$. On a :

$$X^n_{t\wedge T} = x + \int_0^t 1_{(s\leq T)}\, \sigma_n(X^n_{s\wedge T})\, dB_s + \int_0^t 1_{(s\leq T)}\, b_n(X^n_{s\wedge T})\, ds$$

$$X^p_{t\wedge T} = x + \int_0^t 1_{(s\leq T)}\, \sigma_p(X^p_{s\wedge T})\, dB_s + \int_0^t 1_{(s\leq T)}\, b_p(X^p_{s\wedge T})\, ds$$

La définition de T entraine que les processus $\left(X^n_{t\wedge T}\right)_{t\geq 0}$ et $\left(X^p_{t\wedge T}\right)_{t\geq 0}$ sont tous deux solutions de la même E.D.S. :

$$Z_t = x + \int_0^t 1_{(s\leq T)}\, \sigma(Z_s)\, dB_s + \int_0^t 1_{(s\leq T)}\, b(Z_s)\, ds$$

Donc $X^p_{t\wedge T}(x) = X^n_{t\wedge T}(x)$ pour tout $t\geq 0$ p.s.

Si $0 < T(\omega) < \infty$, on voit que :

pour tout $t\in [0, T(\omega)[$: $|X^p_t(x,\omega)| = |X^n_t(x,\omega)| < n$

et $|X^p_{T(\omega)}(x,\omega)| = |X^n_{T(\omega)}(x,\omega)| = n$

donc $T(\omega) = T^n_n(x,\omega) = T^n_p(x,\omega)$

Si $T(\omega) = 0$, on a $|x|\geq n$ et $T(\omega) = T^n_n(x,\omega) = T^n_p(x,\omega) = 0$

Si $T(\omega) = +\infty$, on a : $T^n_n(x,\omega) = T^n_p(x,\omega) = +\infty$.

Le lemme est donc démontré. $\square$.

Soit δ le « point à l'infini » de $\mathbb{R}^q$:

$\delta \notin \mathbb{R}^q$ et les voisinages de δ sont les complémentaires dans $\widehat{\mathbb{R}}_q = \mathbb{R}^q \cup \{\delta\}$ de tous les ensembles bornés de $\mathbb{R}^q$.

<u>Théorème 14</u> :

Soient $x\in\mathbb{R}^q$, σ et b vérifiant l'hypothèse $(\mathcal{H}'')$.

Il existe un unique couple (X^x, ζ^x) où

ζ^x est un temps d'arrêt strictement positif (appelé « temps d'explosion »),

$X^x = (X_t(x), t\geq 0)$ est un processus adapté tel que :

1) La trajectoire $X_\cdot(x,\omega)$ est continue sur $[0, \zeta^x(\omega)[$ p.s.

$X_\cdot(x,\omega) \equiv \delta$ sur $[\zeta^x(\omega), +\infty]$ p.s.

2) $\lim\limits_{\substack{t\to\zeta^x(\omega)\\ t<\zeta^x(\omega)}} |X_t(x,\omega)| = +\infty$ p.s. sur $\{\zeta^x < \infty\}$

3) Pour tout temps d'arrêt T tel que :

$\{T < \xi^x\}$ p.s. sur $\{\xi^x < \infty\}$, on a :

$$X_{t \wedge T}(x) = x + \int_0^t 1_{(s \leq T)} \sigma(X_s(x)) dB_s + \int_0^t 1_{(s \leq T)} b(X_s(x)) ds, \quad \forall t \geq 0 \text{ p.s.}$$

<u>Dém</u> :

<u>Existence</u> : on pose $\xi^x = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} T_n(x)$ où $T_n(x) = T_n^n(x)$.

On vérifie immédiatement que si $|x| < n$ alors $T_n(x) > 0$ donc $\xi^x > 0$.

Soit $t \in [0, \xi^x(\omega)[$, il existe n tel que $T_n(x) > t$ et pour tout $p \geq n$, on a $X_t^p(x, \omega) = X_t^n(x, \omega)$ p.s. d'après le Lemme 13. On peut donc définir :

$$X_t(x, \omega) = \lim_{n \to \infty} X_t^n(x, \omega) . 1_{[0, \xi^x(\omega)[}(t) + \delta . 1_{[\xi^x(\omega), \infty[}(t)$$

Le processus $(X_t(x))$ vérifie la condition 1)

On voit facilement que si $\xi^x(\omega) < \infty$ alors :

$T_n(x, \omega) < T_{n+1}(x, \omega) < \ldots < \xi^x(\omega)$

et $|X_{T_n(x)}(x)| = n$ donc $\overline{\lim}_{\substack{t \to \xi^x \\ t < \xi^x}} |X_t(x)| = +\infty$ p.s. sur $\{\xi^x < \infty\}$

Supposons que $P\{\underline{\lim}_{\substack{t \to \xi^x \\ t < \xi^x}} |X_t(x)| < \infty, \xi^x < \infty\} > 0$

On peut alors trouver deux nombres $0 < r < R < \infty$ tels que : $P\{\underline{\lim}_{\substack{t \to \xi^x \\ t < \xi^x}} |X_t(x)| < r, \overline{\lim}_{\substack{t \to \xi^x \\ t < \xi^x}} |X_t(x)| > R, \xi^x < \infty\} > 0$ (*)

Soit $f \in \mathcal{C}_k^2(\mathbb{R}^q)$ telle que

$f(x) = 0$ si $|x| = r$, $f(x) = 1$ si $|x| = R$.

L, étant l'opérateur différentiel défini par (14), on vérifie facilement que, pour tout n assez grand,

$\left(f(X_t^n(x)) - \int_0^t Lf(X_s^n(x)) ds, t \geq 0\right)$ est une martingale, donc

$\left(f(X_{t \wedge T_p}^n) - \int_0^{t \wedge T_p} Lf(X_s^n) ds, t \geq 0\right)$ est une martingale

En faisant tendre n vers l'infini, on voit grâce au Théorème de Lebesgue, que

$$\left(f(X_{t\wedge T_p}) - \int_0^{t\wedge T_p} Lf(X_s)\, ds\ ,\ t \geq 0 \right) \text{ est une martingale.}$$

En faisant tendre p vers l'infini, on voit de même que :

$$\left(f(X_t(x)) \cdot 1_{(t<\zeta^x)} - \int_0^{t\wedge \zeta^x} Lf(X_s(x))\, ds\ ,\ t \geq 0 \right) \text{ est une martingale}$$

car $t < \zeta^x \Rightarrow X^{(x)}_{t\wedge T_p(x)} \longrightarrow X_t(x)$

et $t \geq \zeta^x \Rightarrow f(X_{t\wedge T_p(x)}(x)) = f(X_{T_p(x)}(x)) \longrightarrow 0$, quand $p \to \infty$.

On vérifie de plus (exercice) que la martingale précédente est continue ; il en est donc de même pour le processus $f(X_t(x)) \cdot 1_{(t<\zeta^x)}$, ce qui est contradictoire avec l'inégalité $(*)$ et la définition de f. Donc $\lim\limits_{\substack{t\to\zeta^x \\ t<\zeta^x}} |X_t(x)| = +\infty$ p.s. sur $\{\zeta^x < \infty\}$

Vérifions la condition 3). Soit T un temps d'arrêt tel que $T < \zeta^x$ p.s. sur $\{\zeta^x < \infty\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$X^n_{t\wedge T\wedge T_n} = x + \int_0^t 1_{(s\leq T\wedge T_n)}\, \sigma(X^n_s)\, dB_s + \int_0^t 1_{(s\leq T\wedge T_n)}\, b(X^n_s)\, ds$$

donc

$$X_{t\wedge T\wedge T_n} = x + \int_0^t 1_{(s\leq T\wedge T_n)}\, \sigma(X_s)\, dB_s + \int_0^t 1_{(s\leq T\wedge T_n)}\, b(X_s)\, ds\ ,\ (t \geq 0)$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit 3).

L'unicité du couple (X^x, ζ^x) vérifiant 1), 2), 3) est laissée en exercice. $\square$

Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ vérifiant les conditions habituelles, soit $B = (B_t^1, \dots, B_t^d)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mvt brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$ issu de zéro et soient

$$\sigma : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathcal{M} = \{\text{matrices } q \times d\}$$

$$b : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

$$\tilde{b} : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

trois applications lipschitziennes.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^q$, notons $(X_t(x))_{t \geq 0}$ et $(\tilde{X}_t(x))_{t \geq 0}$ les solutions de :

$$X_t(x) = x + \int_0^t \sigma(X_s(x))\, dB_s + \int_0^t b(X_s(x))\, ds$$

$$\tilde{X}_t(x) = x + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_s(x))\, dB_s + \int_0^t \tilde{b}(\tilde{X}_s(x))\, ds$$

$T > 0$ étant fixé, soient $Q_{x,\sigma,b}$ et $Q_{x,\sigma,\tilde{b}}$ les lois des processus $(X_t(x))_{t \in [0,T]}$ et $(\tilde{X}_t(x))_{t \in [0,T]}$ sur l'espace canonique :

$$\left(W = \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^q),\ \mathcal{B}_T,\ (\Pi_t)_{t \in [0,T]} \right)$$

où $\mathcal{B}_T = \sigma\{\Pi_s ;\ s \leq T\}$, $\Pi_s(w) = w_s$ si $w \in W$

Théorème :

Supposons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^q$,

$$b(x) - \tilde{b}(x) = \sigma(x)\, \varphi(x)$$

où $\varphi : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est mesurable bornée.

Alors les probabilités $Q_{x,\sigma,b}$ et $Q_{x,\sigma,\tilde{b}}$ sont équivalentes sur l'espace $(W, \mathcal{B}_T)$ et

$$dQ_{x,\sigma,b} \underset{T}{=} dQ_{x,\sigma,\tilde{b}} \cdot D$$

où $D(w) = \exp\left\{ \int_0^T \langle a^{-1}(w_s)(b(w_s) - \tilde{b}(w_s)), dw_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T \langle a^{-1}(w_s)(b(w_s) - \tilde{b}(w_s)), b(w_s) + \tilde{b}(w_s) \rangle ds \right\}$ p.s

et $a(x) = \sigma(x)\, \sigma^*(x)$ $(x \in \mathbb{R}^q)$

Dém.

Noter d'abord que la formule donnant la densité D a bien un sens car, sous la probabilité $Q_{x,\sigma,\tilde{b}}$ (ou $Q_{x,\sigma,b}$), le processus canonique $(\Pi_s(w))_{s\geq 0} = (w_s)_{s\geq 0}$ est une semi-martingale.

Remarquer aussi, que $a(x)\big|_{Im(\sigma(x))}$ est un isomorphisme $Im\,\sigma(x)$, donc $a^{-1}(x)\,[b(x)-\tilde{b}(x)]$ est bien défini, pour tout $x \in \mathbb{R}^q$.

On peut écrire :

$$\tilde{X}_t(x) = x + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_s(x))\,dB_s + \int_0^t b(\tilde{X}_s(x))\,ds - \int_0^t \left(b(\tilde{X}_s(x)) - \tilde{b}(\tilde{X}_s(x))\right) ds$$

$$= x + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_s(x))\left[dB_s - \varphi(\tilde{X}_s(x))\,ds\right] + \int_0^t b(\tilde{X}_s(x))\,ds$$

Soit $\tilde{P}$ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ donnée par :

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \exp\left(\int_0^T \varphi(\tilde{X}_s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\varphi(\tilde{X}_s)|^2\,ds\right) = Z$$

alors, sous $\tilde{P}$, $\left(B_t - \int_0^t \varphi(\tilde{X}_s(x))\,ds\right)_{t\in[0,T]}$ est un $\mathcal{F}_t$-mvt brownien. Donc, d'après l'"Unicité en Loi"

$$\tilde{X}(\tilde{P}) = X(P) = Q_{x,\sigma,b}$$

de plus : $\tilde{X}(P) = Q_{x,\sigma,\tilde{b}}$

Soit $\Psi : W = \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^q) \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et bornée.

$$E_{\tilde{P}}\{\Psi(\tilde{X})\} = E_P\{\Psi(\tilde{X})\cdot Z\}$$

$$= \int_W \Psi(w)\,dQ_{x,\sigma,b}(w).$$

Il faut donc "calculer" Z en fonction de $\tilde{X}$

$$\int_0^T \varphi(\tilde{X}_s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\varphi(\tilde{X}_s)|^2\,ds.$$

Supposons, d'abord, que $d = q$ et que $\sigma(x)$ est une matrice inversible.

alors $\quad b(x) - \tilde{b}(x) = \sigma(x)\, \varphi(x)$.

$\Rightarrow \bullet\ \varphi(x) = \sigma^{-1}(x)\, [(b(x) - \tilde{b}(x))]$.

et $\quad |\varphi(x)|^2 = |\sigma^{-1}(x)\, [b(x) - \tilde{b}(x)]|^2$

$= \langle a^{-1}(x)\, (b(x) - \tilde{b}(x)),\ b(x) - \tilde{b}(x) \rangle$.

de plus :

$d\tilde{X}_t = \sigma(\tilde{X}_t)\, dB_t + \tilde{b}(\tilde{X}_t)\, dt$

donc $\bullet\ dB_t = \sigma^{-1}(\tilde{X}_t)\, [d\tilde{X}_t - \tilde{b}(\tilde{X}_t)\, dt]$

et $\quad \varphi(\tilde{X}_t)\, dB_t = \langle \sigma^{-1}(\tilde{X}_t)(b(\tilde{X}_t) - \tilde{b}(\tilde{X}_t)),\ \sigma^{-1}(\tilde{X}_t)[d\tilde{X}_t - \tilde{b}(\tilde{X}_t)dt] \rangle$

$= \langle a^{-1}(\tilde{X}_t)(b(\tilde{X}_t) - \tilde{b}(\tilde{X}_t)),\ d\tilde{X}_t \rangle - \langle a^{-1}(\tilde{X}_t)(b - \tilde{b})(\tilde{X}_t),\ \tilde{b}(\tilde{X}_t) \rangle$

donc

$$Z = \exp\left(\int_0^T \langle a^{-1}(\tilde{X}_s)(b(\tilde{X}_s) - \tilde{b}(\tilde{X}_s)),\ d\tilde{X}_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T \langle a^{-1}(\tilde{X}_s)(b(\tilde{X}_s) - \tilde{b}(\tilde{X}_s)),\ b(\tilde{X}_s) + \tilde{b}(\tilde{X}_s) \rangle ds \right)$$

d'où la formule du Théorème en passant aux lois images :

$$\int_W \psi(w)\, dQ_{x,\sigma,b}(w) = \int_W \psi(w) \exp\left(\int_0^T \langle a^{-1}(w_s)(b(w_s) - \tilde{b}(w_s)),\ dw_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T \langle a^{-1}(w_s)(b - \tilde{b})(w_s),\ b + \tilde{b}(w_s) \rangle \right) dQ_{x,\sigma,\tilde{b}}(w).$$

<u>Cas général</u>

On peut supposer que $\varphi(x) \in \ker(\sigma(x))^{\perp} = Im\, \sigma^*(x)$;

$\varphi(x) = \sigma^*(x)\, \tilde{\varphi}(x)$ où $\tilde{\varphi}(x) \in (\ker(\sigma^*(x)))^{\perp}$

$= Im(\sigma(x))$

donc $\quad b(x) - \tilde{b}(x) = \sigma(x)\, \sigma^*(x)\, \tilde{\varphi}(x) = a(x)\, \tilde{\varphi}(x)$

et $\quad |\varphi(x)|^2 = |\sigma^*(x)\, \tilde{\varphi}(x)|^2 = \langle a(x)\tilde{\varphi}(x),\ \tilde{\varphi}(x) \rangle$

$= \langle b(x) - \tilde{b}(x),\ a^{-1}(x)\, (b(x) - \tilde{b}(x)) \rangle$ ✓

$\langle \varphi(x), dB_t \rangle = \langle \sigma^*(x)\, \tilde{\varphi}(x),\ dB_t \rangle$

$= \langle \tilde{\varphi}(x),\ \sigma(x)\, dB_t \rangle = \langle a^{-1}(x)\, (b(x) - \tilde{b}(x)),\ dx - \tilde{b}(x)\, dt \rangle$

etc... $\square$

Théorèmes de représentation des fonctionnelles browniennes.

H. Doss.

Théorèmes de représentation des fonctionnelles browniennes.

On considère l'espace canonique :

$$\left(W = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d),\ \mathcal{B},\ (\mathcal{B}_t)_{t \geq 0},\ (\pi_t)_{t \geq 0},\ \mu\right)$$

où μ est la mesure de Wiener

$(\pi_t)_{t \geq 0}$ est le processus des coordonnées

$\mathcal{B} = \sigma\{\pi_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{B}_t = \sigma\{\pi_s ; s \leq t\}$

(filtration éventuellement complétée et rendue continue à droite)

On désigne par Λ^2 l'ensemble des processus $H = (H_t)_{t \geq 0}$, définis sur W à valeurs $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{B}_t$-prévisibles et tels que $E\left\{\int_0^\infty |H_t|^2 dt\right\} < \infty$.

<u>Théorème 1</u> : (Itô)

Soit $\phi \in \mathcal{L}^2(W, \mathcal{B}, \mu)$. Il existe alors un "unique" processus H appartenant à Λ^2 tel que

$$(1)\quad \phi(\cdot) = E(\phi) + \int_0^\infty H_t \cdot d\pi_t(\cdot) \qquad \mu \text{ p.s.}$$

où $E(\phi) = \int_W \phi\, d\mu$.

<u>Dém.</u> :

On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(W, \mathcal{B}, \mu)$

soit $F = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} \text{ tels que } \varphi = E(\varphi) + \int_0^\infty H_t\, d\pi_t \text{ où } H = (H_t)_{t \geq 0} \in \Lambda^2 \right\}$

Soient φ et $\tilde{\varphi}$ deux éléments de F :

$$\varphi = E(\varphi) + \int_0^\infty H_t\, d\pi_t, \quad \tilde{\varphi} = E(\tilde{\varphi}) + \int_0^\infty \tilde{H}_t\, d\pi_t$$

où H et $\tilde{H}$ appartiennent à Λ^2.

On a : $E\{|\varphi - \tilde{\varphi}|^2\} = |E(\varphi) - E(\tilde{\varphi})|^2 + E\left\{\int_0^\infty |H_t - \tilde{H}_t|^2 dt\right\}$

L'égalité précédente entraîne facilement que F est un sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}$.

Pour montrer que $F = \mathcal{H}$, il suffit donc de vérifier que $F^{\perp} = \{0\}$

Remarquons que F contient toutes les (classes de) v.a. de la forme :

$$\varphi = \varphi_\infty = \exp\left\{ \int_0^\infty \dot{h}_s . d\Pi_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds \right\}$$

où $h \in G$, (espace de Caméron-Martin).

En effet, posons $\varphi_t = \exp\left\{ \int_0^t \dot{h}_s \, d\Pi_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\dot{h}_s|^2 ds \right\}$, $(t \geqslant 0)$; on sait, d'après la formule d'Itô, que :

$$\varphi_t = 1 + \int_0^t \varphi_s . \dot{h}_s . d\Pi_s \quad , \quad t \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

$$E(\varphi^2) = 1 + E\left\{ \int_0^\infty |\varphi_s . \dot{h}_s|^2 ds \right\} < \infty$$

Soit $\Phi \in F^{\perp}$. On a donc :

(*) $$E\left\{ \Phi . \exp\left(\int_0^\infty \dot{h}_s \, d\Pi_s \right) \right\} = 0 \text{, pour tout } h \in H.$$

Soient $0 \leqslant s_1 < s_2 < \dots < s_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

La propriété (*) entraine que, pour tous $d_1, d_2, \dots, d_n$ appartenant à $\mathbb{R}$, on a :

$$E\left\{ \Phi \exp\left(d_1 . \Pi_{s_1} + d_2 \Pi_{s_2} + \dots + d_n \Pi_{s_n} \right) \right\} = 0$$

et donc, par prolongement analytique :

$$E\left\{ \Phi \exp\left(i d_1 \Pi_{s_1} + i d_2 \Pi_{s_2} + \dots + i d_n \Pi_{s_n} \right) \right\} = 0$$

où $i^2 = -1$

(**) $$E\left\{ E\{\Phi / (\Pi_{s_1}, \dots, \Pi_{s_n})\} \exp\left(i \left(\sum_{l=1}^n d_l \Pi_{s_l} \right) \right) \right\} = 0$$

L'égalité (**), valable pour tous $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{R}$, entraine facilement (propriétés de la transformée de Fourier) que $E\{ \Phi / (\Pi_{s_1}, \dots, \Pi_{s_n}) \} = 0$ p.s.

On a donc, pour tous

$0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$

et toute application f mesurable et bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:

$$E\{ \Phi \cdot f(\pi_{s_1}, \pi_{s_2}, \dots, \pi_{s_n}) \} = 0$$

On en déduit, par un théorème de classe monotone, que $\Phi = 0 \quad \mu$ p.s $\square$.

On se restreindra, dans la suite, à l'espace de Banach $W_T = \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$ où $T > 0$ est fixé.

<u>Théorème 2 :</u> (Clark).

Soit Φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ (au sens de Fréchet) de W_T dans $\mathbb{R}$ à dérivée Φ' bornée.

On identifiera, pour tout $\omega \in W_T$, $\Phi'(\omega)$ à une mesure bornée sur $[0, T]$.

On a alors la représentation suivante :

$$(2) \quad \Phi(\cdot) = E(\Phi) + \int_0^T H_t \, d\pi_t(\cdot) \quad \mu \text{ p.s}$$

où $H = (H_t)_{t \in [0,T]}$ est un élément de $\Lambda^2([0,T])$ donné par la formule « explicite » :

pour tout $t \in [0,T]$: $\quad H_t(\cdot) = E\{ \Phi'(\cdot)(]t,T]) / \mathcal{B}_t \}(\cdot)$

<u>Dém.</u>

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des processus u mesurables, adaptés et bornés sur $[0,T]$, à valeurs $\mathbb{R}^d$.

On sait, d'après le Théorème de Girsanov, que pour tout $\varepsilon \neq 0$:

$$(3) \quad E\{\Phi(\omega)\} = E\left\{ \Phi(\omega - \varepsilon \hat{U}(\omega)) \exp\left(\varepsilon \int_0^T u_s \, d\pi_s - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^T |u_s|^2 ds \right) \right\}$$

pour tout $u \in \mathcal{U}$, en posant $\hat{U}(\omega) = \int_0^{\cdot} u_s(\omega) ds$, $\omega \in W_T$

Les hypothèses entraînent que l'on peut dériver, sous le signe $E\{\cdot\}$, par rapport au paramètre ε dans l'égalité (3). On obtient, pour tout $\varepsilon \neq 0$:

$$(4) \quad E\left\{ \Phi(\omega - \varepsilon \hat{U}(\omega)) \exp\left(\varepsilon \int_0^T u_s\, d\Pi_s - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T |u_s|^2 ds\right) \cdot \left[\int_0^T u_s\, d\Pi_s - \varepsilon \int_0^T |u_s|^2 ds\right]\right\}$$

$$= E\left\{ \Phi'(\omega - \varepsilon \hat{U}(\omega)) \cdot \hat{U}(\omega) \exp\left(\varepsilon \int_0^T u_s\, d\Pi_s - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T |u_s|^2 ds\right)\right\}$$

En prenant $\varepsilon = 0$, on voit que, pour tout $u \in \mathcal{U}$:

$$(5) \quad E\left\{ \Phi(\omega) \cdot \int_0^T u_s \cdot d\Pi_s(\omega)\right\} = E\left\{ \Phi'(\omega) \cdot \hat{U}(\omega)\right\}$$

Or, on sait, d'après le Théorème 1, qu'il existe un processus $H = (H_t)_{t \in [0,T]} \in \Lambda^2([0,T])$ tel que

$$\Phi(\cdot) = E(\Phi) + \int_0^T H_t \, d\Pi_t(\cdot) \quad \text{p.s.}$$

donc $E\left\{ \Phi(\omega) \cdot \int_0^T u_s\, d\Pi_s(\omega)\right\} = E\left\{ \left(\int_0^T H_s\, d\Pi_s\right) \cdot \left(\int_0^T u_s\, d\Pi_s\right)\right\}$

$$= E\left\{ \int_0^T H_s \cdot u_s\, ds \right\}$$

$$= E\left\{ \int_0^T \left[\int_0^t u_s\, ds\right] \Phi'(\omega)(dt)\right\}$$

$$= E\left\{ \iint 1_{(0 \leq s < t \leq T)}\, u_s\, ds\, \Phi'(\omega)(dt)\right\}$$

$$= E\left\{ \int_0^T u_s \cdot \Phi'(\omega)(]s,T])\, ds\right\}$$

$$= E\left\{ \int_0^T u_s \cdot E\{\Phi'(\cdot)(]s,T])/\mathcal{B}_s\}\, ds\right\}$$

pour tout $u \in \mathcal{U}$, en utilisant la formule (5).

On en déduit que le processus $(H_s)_{s \in [0,T]}$ s'identifie au processus $\left(E\{\Phi'(\cdot)(]s,T])/\mathcal{B}_s\}\right)_{s \in [0,T]}$ $\square$

Théorème 1'

Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$, issu de zéro.
On supposera que $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle de B, éventuellement rendue complète et continue à droite.

1) Soit Φ une application mesurable de $W = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\Phi(B(\cdot))$ soit de carré intégrable il existe alors un "unique" processus $H = (H_t)_{t \geq 0}$ $\mathcal{F}_t$-prévisible à valeurs $\mathbb{R}^d$, tel que $E\left\{ \int_0^\infty |H_s|^2 \, ds \right\} < \infty$, vérifiant

$$\Phi(B(\cdot)) = E\{\Phi(B)\} + \int_0^\infty H_s \, dB_s(\cdot) \quad p.s.$$

2) Soit Φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ (au sens de Fréchet) de $W_T = \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$ à dérivée Φ' bornée. On a alors, en posant $\xi(\cdot) = \Phi\left((B_t(\cdot))_{t \in [0,T]} \right)$

$$\xi(\cdot) = E(\xi) + \int_0^T H_s \, dB_s(\cdot) \quad p.s.$$

où, pour tout $s \in [0,T]$

$$H_s = E\left\{ \Phi'(B(\cdot))(]s,T]) \,/\, \mathcal{F}_s \right\}$$

Dém : C'est une traduction des Théorèmes 1 et 2 précédents. $\square$

Corollaire :

Sous les hypothèses du Théorème 1', soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$ - martingale de carré intégrable.
Il existe alors un "unique" processus $H = (H_t)_{t \geq 0}$ à valeurs $\mathbb{R}^d$, prévisible, tel que pour tout $t \geq 0$: $E\left\{\int_0^t |H_s|^2 ds\right\} < \infty$, vérifiant p.s.

$$M_t = E\{M_0\} + \int_0^t H_s . dB_s \quad , \quad (t \geq 0)$$

En particulier, $(M_t)_{t \geq 0}$ admet une version continue.

Dém : Exercice.

□

Remarque :
Dans l'énoncé du Théorème 2 (resp 1') on peut "affaiblir" les conditions de différentiabilité concernant la fonctionnelle Φ. Cf Karatzas [3], par exemple.

Références.

1) " Stochastic Differential Equations "
B. Øksendal, Springer, (1995)

2) " Stochastic Differential Equations and Diffusion processes "
N. Ikeda and S. Watanabe, North Holland (1981)

3) " Brownian Motion and Stochastic Calculus "
I. Karatzas and S. Shreve, Springer (1988).

4) " Continuous Martingales and Brownian Motion "
D. Revuz and M. Yor. (1991)

5) " Probabilités et Potentiel "
C. Dellacherie et P.A. Meyer, Hermann (1980)

6) " Stochastic Integrals "
H.P. Mc Kean, Jr., Academic Press, (1969)

7) " Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance ".
D. Lamberton et B. Lapeyre, Ellipses (1997)