Master 2. Mathématiques

Calcul Stochastique (H. Doss).

Enoncés d'exercices.

Dans toute la suite $B = (B_t)_{t \geq 0}$ désignera un mouvement brownien à valeurs réelles, issu de zéro, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1) Montrer que le processus $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ défini par :

$\tilde{B}_t = t \cdot B_{1/t}$ si $t > 0$; $\tilde{B}_0 = 0$

est un mouvement brownien (on étudiera la continuité en zéro).

Montrer que $\lim_{t \to +\infty} \frac{B_t}{t} = 0$ p.s.

2) a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de la v.a.

$V_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^n B_s \, ds$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé.

b) Supposons que $\alpha > 3/2$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$

$\sum_n P\{ |V_n| > \varepsilon \} < \infty$. En déduire que

$\lim_{n \to \infty} V_n = 0$ p.s.

Que peut-on dire si $\alpha \leq 3/2$?

3) Soit $A = \{ \lim \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq x \}$ où $x > 0$ est fixé.

a) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'événement A est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_m$ engendrée par les variables aléatoires B_s, $s \leq m$. En déduire que $P\{A\} = 0$ ou 1

b) Montrer que $P\{A\} = 1$

En déduire que $P\{ \lim_{t \to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \} = 1$ puis que

$P\{ \lim_{t \to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \} = 1$.

c) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe un ensemble négligeable $\mathcal{N}_t$ tel que pour tout $\omega \notin \mathcal{N}_t$, on peut trouver trois suites strictement décroissantes vers zéro : $(h_n(\omega))$, $(h'_n(\omega))$, $(h''_n(\omega))$ vérifiant

$B_{t+h_n(\omega)}(\omega) - B_t(\omega) > \sqrt{h_n(\omega)}$, $B_{t+h'_n(\omega)} - B_t(\omega) < -\sqrt{h'_n(\omega)}$

$B_{t+h''_n(\omega)}(\omega) = B_t(\omega)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En déduire que P p.s. la fonction $t \longmapsto B_t(\omega)$ n'est monotone sur aucun intervalle non trivial

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $T_x = \inf\{ t \geq 0 ; B_t = x \}$, avec la convention $\inf(\phi) = +\infty$. Montrer que $T_x < \infty$ p.s. et que

$$\lim_{x \to +\infty} T_x = \lim_{x \to -\infty} T_x = +\infty \quad \text{p.s.}$$

$$\lim_{x \to 0} T_x = 0 \quad \text{p.s.}$$

5) On admettra la propriété suivante.

$$P\left\{ \lim_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log(\log(1/t))}} = 1 \right\} = 1. \quad (\text{"loi du logarithme itéré"}).$$

Montrer que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log(\log(t))}} = 1 \quad \text{p.s.}$$

et que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log(\log(t))}} = -1 \quad \text{p.s.}$$

6) Soient $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ et $s \geq t$. Déterminer les espérances conditionnelles suivantes :

$E\{ B_s / B_{t_0}, B_{t_1}, \dots, B_t \}$; $E\{ (B_s^2 - s) / B_{t_0}, B_{t_1}, \dots, B_t \}$

$E\{ \exp(\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2} s) / B_{t_0}, B_{t_1}, \dots, B_t \}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$

$E\{ f(B_s) / B_{t_0}, B_{t_1}, \dots, B_t \}$ où f est une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Déf. 1 Notons $\mathcal{F}_t = \sigma\{ B_s ; s \leq t \}$. On a évidemment : $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tous $0 \leq t \leq s$. On dit qu'un processus aléatoire continu $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale (continue) si

i) Pour tout $t \geq 0$ M_t est une v.a. $\mathcal{F}_t$-mesurable et intégrable

ii) Pour tous $0 \leq t \leq s$: $E\{ M_s / \mathcal{F}_t \} = M_t$ p.s.

Remarquer que les calculs précédents montrent que les processus $(B_t)_{t \geq 0}$, $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$, $(\exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t))_{t \geq 0}$ sont des $(\mathcal{F}_t)$-martingales

7) Etudier le comportement asymptotique, quand $t \to +\infty$, des martingales précédentes.

8) Soient f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $X_t = \int_0^t f(s)\,dB_s$ $(t \geqslant 0)$. a) Montrer que le processus $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ est un processus gaussien centré dont on déterminera la covariance.

On admettra qu'on peut choisir la famille de v.a. X_t $(t \geqslant 0)$ de telle sorte que le processus $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ soit à trajectoires continues.

b) Montrer que les processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ et $\left(\exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)\,ds\right)\right)_{t \geqslant 0}$ sont des $(\mathcal{F}_t)$ - martingales où $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s ; s \leqslant t\}$.

c) On suppose, de plus, que pour tout $s \geqslant 0$ $f(s) \neq 0$. Soit $c = \int_0^{+\infty} f^2(s)\,ds \in]0, +\infty]$. Notons T l'application continue de $[0, c[$ sur $\mathbb{R}_+$ définie par $T\left[\int_0^t f^2(s)\,ds\right] = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On pose $Z_t = X_{T(t)}$. Montrer que le processus $Z = (Z_t)_{t \in [0, c[}$ est un mouvement brownien sur $[0, c[$.

d) En déduire que, si $\int_0^{\infty} f^2(s)\,ds < \infty$, (X_t) converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. X_∞ dont on déterminera la loi ;

e) si $\int_0^{+\infty} f^2(s)\,ds = +\infty$, soit $Y_t = \dfrac{X_t}{\sqrt{2\,g(t)\,\mathrm{Log}\,(\mathrm{Log}\,(g(t)))}}$ où $g(t) = \int_0^t f^2(s)\,ds$.

Déterminer $\overline{\lim}_{t \to \infty} Y_t$, $\underline{\lim}_{t \to \infty} Y_t$, $\overline{\lim}_{t \to \infty} X_t$, $\underline{\lim}_{t \to \infty} X_t$, $\lim_{t \to \infty} \exp\left[X_t - \frac{1}{2}g(t)\right]$ (Utiliser l'exercice 5).

9) a) Soient $t > 0$ fixé et $B_s^t = B_{t+s} - B_t$. Montrer que le processus $(B_s^t)_{s \geqslant 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s ; s \leqslant t\}$. (Propriété de Markov simple).

b) Notons $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées. $V \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ étant fixé, posons pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geqslant 0$:

(*)
$$\begin{cases} P_t f(x) = E\{f(B_t + x)\} \\ P_t^V f(x) = E\left\{f(B_t + x)\exp\left(\int_0^t V(B_s + x)\,ds\right)\right\} \end{cases}$$

Montrer que les applications $x \longmapsto P_t f(x)$ et $x \longmapsto P_t^V f(x)$ sont continues et bornées.

g) (suite) c) Soient P_t et P_t^V les opérateurs linéaires et continus de l'espace de Banach $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ dans lui-même définis par les formules (*). Montrer que, pour tous t et $s \geqslant 0$ on a :

$$P_{t+s} = P_t \circ P_s \quad ; \quad P^V_{t+s} = P^V_t \circ P^V_s$$

d) Posons $U(t,x) = P_t f(x)$ où $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $(t,x) \longmapsto U(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ et que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} U(t,x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} U(t,x) & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t \downarrow 0} U(t,x) = f(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

e) On suppose que f et V sont de classe $\mathcal{C}^2_b$. Posons $\Psi(t,x) = P^V_t f(x)$ où $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $(t,x) \longmapsto \Psi(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \Psi(t,x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(t,x) + V(x)\, \Psi(t,x) & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t \downarrow 0} \Psi(t,x) = f(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Déf. 2 Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on considère la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ où $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leqslant t\}$ (augmentée des ensembles négligeables de $\mathcal{F}$).

Une application T de Ω dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt si $\forall t \geqslant 0 \quad \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$.

On appelle tribu des évènements antérieurs à T la tribu

$$\mathcal{F}_T = \{ A \in \mathcal{F} \text{ t.q. } A \cap (T \leqslant t) \in \mathcal{F}_t \text{, pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \}.$$

Soient S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leqslant T$, alors : $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$ et $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ étant une $\mathcal{F}_t$-martingale (cf Déf. 1) on a le Théorème suivant, si de plus, S et T sont <u>bornés</u> :

$$E\{M_T / \mathcal{F}_S\} = M_S \quad \text{p.s.} \qquad \text{(Th d'arrêt borné)}.$$

T étant un temps d'arrêt quelconque, le processus $(M_{T \wedge t})_{t \geqslant 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

Théorème (Propriété de Markov forte)

Soit T un temps d'arrêt tel que $P\{T<\infty\} = 1$. Posons $B_t^* = B_{T+t} - B_T$. Le processus $(B_t^*)_{t\geqslant 0}$ est alors un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.

---

10) Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$ et $x \in]\alpha, \beta[$.

On considère la v.a. $T_x = \inf\{t \geqslant 0 \text{ tq. } x + B_t \notin [\alpha, \beta]\}$

a) Montrer que T_x est un t.a. p.s. fini

b) En utilisant le fait que les processus $(B_t)_{t\geqslant 0}$ et $(B_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ sont des martingales calculer $P\{x + B_{T_x} = \alpha\}$, $P\{x + B_{T_x} = \beta\}$ et $E\{T_x\}$

c) En utilisant le fait que $\left(\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right)\right)_{t\geqslant 0}$ est une martingale, calculer $E\left\{\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} T_x\right)\right\}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

d) Soient $T_x^\alpha = \inf\{t \geqslant 0 \text{ tq. } x + B_t \notin [\alpha, +\infty[\}$

$T_x^\beta = \inf\{t \geqslant 0 \text{ tq. } x + B_t \notin]-\infty, \beta]\}$

Calculer $E\left\{\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} T_x^\alpha\right)\right\}$, $E\left\{\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} T_x^\beta\right\}\right.$, $E\{T_x^\alpha\}$ et $E\{T_x^\beta\}$.

11) Soient $M_t = \sup_{s \leqslant t} B_s$ et $T^x = \inf\{s \geqslant 0 \quad B_s \geqslant x\}$

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$P\{M_t < x\} = P\{B_t < x\} - P\{B_t < x, T^x \leqslant t\}$$

En utilisant la propriété de Markov forte, en déduire que

$$P\{M_t < x\} = P\{B_t < x\} - P\{B_t > x\} \qquad (x > 0)$$

En déduire la loi de M_t et la loi de T^x

b) Plus généralement, soient $x > 0$ et $y \leqslant x$; montrer que

$$P\{M_t < x, B_t < y\} = P\{B_t < y\} - P\{B_t < y, T_x \leqslant t\}$$
$$= P\{B_t < y\} - P\{B_t > 2x - y\}$$

En déduire la loi du couple (M_t, B_t)

12) On considère le processus $B_t^\theta = B_t + \theta t$ $(t \geqslant 0)$ où θ est un paramètre réel fixé, non nul. Soient $M_t^\theta = \sup_{s \leqslant t} B_s^\theta$,

$T^x = \inf \{ s \geqslant 0 , B_s^\theta \geqslant x \}$ $(x > 0$, fixé$)$.

et $T = \inf \{ s \geqslant 0 \quad B_s^\theta \notin [\alpha, \beta] \}$ $(\alpha < 0 < \beta$, fixés$)$.

a) Déterminer la loi du couple $(M_t^\theta , B_t^\theta)$

b) Calculer $E\{\exp(-\mu T^x)\}$ et $E\{\exp(-\mu T)\}$ pour tout $\mu > 0$.

En déduire $P\{T^x < \infty\}$ et $E\{T^x \, 1_{(T^x < \infty)}\}$ (distinguer les cas $\theta > 0$ et $\theta < 0$).

13) Notons μ la loi du mouvement brownien $B = (B_t)_{t \in [0,T]}$ sur l'espace canonique $(\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}), \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, et tout $\varepsilon > 0$, on a : $P\{ \sup_{t \in [0,T]} |B_t - f_t| \leqslant \varepsilon \} = \mu \{ w : \sup_{t \in [0,T]} |w_t - f_t| \leqslant \varepsilon \} > 0$.

(Considérer d'abord le cas où f est de classe C^1 et utiliser la formule de Cameron - Martin).

14) Soit $f \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$, de classe C^1, nulle en zéro. En utilisant la formule de Cameron - Martin, montrer que pour tous $\varepsilon \neq 0$, $\delta > 0$ et $M > 0$ on a l'inégalité :

$$P\{ \sup_{t \in [0,T]} |\varepsilon B_t - f_t| < \delta \} \geqslant \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds - \frac{M}{\varepsilon} \right) P\left\{ \sup_{t \in [0,T]} |\varepsilon B_t| < \delta , \int_0^T \dot{f}_s \, dB_s \leqslant M \right\}$$

En déduire que :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^2 \log P\{ \sup_{t \in [0,T]} |\varepsilon B_t - f_t| < \delta \} \geqslant -\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds$$

(Inégalité de grandes déviations).

15) Pour tout $\varepsilon \neq 0$, notons μ_ε la loi du processus $\varepsilon B = (\varepsilon B_t)_{t \in [0,T]}$ sur l'espace canonique $(\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}), \mathcal{B})$ où B est le mouvement brownien usuel. Montrer que si $\varepsilon \neq \varepsilon'$ les lois μ_ε et $\mu_{\varepsilon'}$ sont étrangères.

16) Considérons la solution de l'équation différentielle stochastique

(*) $X_t = X_0 + \sigma B_t - b\int_0^t X_s\,ds$ où $\sigma \neq 0$ et $b \geq 0$ sont fixés, X_0 est une v.a.r indépendante de $(B_t)_{t\geq 0}$

a) En posant $Y_t = X_t - \sigma B_t$, montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est solution d'une équation différentielle ordinaire facile à résoudre. En déduire l'expression explicite de X_t.

b) Montrer que X_t converge en loi, quand $t \to +\infty$, vers une v.a.r X_∞ dont on déterminera la loi μ.

c) Montrer que si X_0 a pour loi μ, alors X_t a pour loi μ quel que soit $t \geq 0$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons (X_t^x) la solution de l'équation (*) où $X_0 \equiv x$.

(**) Si $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ posons $P_t f(x) = E\{f(X_t^x)\}$ $(t \geq 0)$.

Montrer que $E\{f(X_t^{X_0})\} = \int P_{X_0}(dx)\, P_t f(x)$ où $(X_t^{X_0})_{t\geq 0}$ est solution de (*) et que l'application $x \longmapsto P_t f(x)$ est continue bornée.

En déduire que, pour tous s et $t \geq 0$ on a

$$P_t \circ P_s = P_{t+s}$$

où P_t est l'opérateur linéaire continu de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ dans lui-même défini par la formule (**).

e) Soit $U(t,x) = P_t f(x)$ $(t \geq 0, x \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}))$

Montrer que l'application $(t,x) \longmapsto U(t,x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et que $U = (U(t,x))$ est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} U(t,x) = \dfrac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} U(t,x) - bx \dfrac{\partial}{\partial x} U(t,x) & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t \downarrow 0} U(t,x) = f(x). \end{cases}$$

17) Soit $\phi = (\phi_n(\omega))_{n \geq 0}$ un processus progressivement mesurable à valeurs dans l'espace des matrices $d \times d$ orthogonales i.e. que

$\forall (n,\omega)$ $\phi_n(\omega) = (\phi_{l,k}(n,\omega))_{l,k=1,\dots,d}$ est une matrice orthogonale

On pose :

$X_t = \int_0^t \phi_s \, dB_s$ où $B = (B_1(n), \dots, B_d(n))_{n \geq 0}$ est un mouvement brownien d-dimensionnel.

Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $M_t = \exp\left(i \lambda . X_t + \frac{1}{2} |\lambda|^2 t\right)$ $(t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale où $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_p ; p \leq t\}$

En déduire que $(X_t)_{t \geq 0}$ est aussi un mvt brownien d-dimensionnel.

18) Soit $\phi = (\phi_n(\omega))_{n \geq 0}$ un processus progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tous $0 \leq n < t < \infty$: $0 < \int_n^t \phi_u^2(\omega) \, du < \infty$ p.s

et que $\int_0^{+\infty} \phi_u^2(\omega) \, du = +\infty$ p.s.

On pose $X_t = \int_0^t \phi_n \, dB_s$ où $B = (B(n))_{n \geq 0}$ est un mvt brownien réel.

Soient $\tau_t = \inf\left\{ n \geq 0 \; ; \int_0^n \phi_u^2 \, du \geq t \right\}$ $(t \geq 0)$ et

$\tilde{B}_t(\omega) = X_{\tau_t(\omega)}(\omega)$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$M_t = \exp\left(i \lambda \tilde{B}_t + \frac{1}{2} \lambda^2 t\right)$ $(t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_{\tau_t})$-martingale.

En déduire que $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ est aussi un mvt brownien réel.

Généraliser le résultat précédent en dimension $d \geq 1$.

19) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue à support compact

① Montrer que, pour tout $t \geq 0$: $\int_0^t \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(a) \, 1_{]a,+\infty[}(B_s) \, da \right\} dB_s = \int_{\mathbb{R}} f(a) \left\{ \int_0^t 1_{]a,+\infty[}(B_s) \, dB_s \right\} da$ p.s.

② Soit $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(a) (x-a)^+ \, da$. On vérifie que $F \in C^2(\mathbb{R})$ et que

$F'(x) = \int_{\mathbb{R}} f(a) \, 1_{]a,+\infty[}(x) \, dx$, $F''(x) = f(x)$. En appliquant la formule d'Itô à $F(B_t)$, montrer que

$(*)$ $\frac{1}{2} \int_0^t f(B_s) \, ds = \int_{\mathbb{R}} f(a) \, \phi(t,a) \, da$ p.s, $\forall f \in \mathcal{C}_k(\mathbb{R})$, $\forall t \geq 0$

où $\phi(t,a) = (B_t - a)^+ - (B_0 - a)^+ - \int_0^t 1_{]a,+\infty[}(B_s) \, dB_s$.

20) (Suite de l'exercice 19).

On admettra qu'on peut choisir la famille de v.a. $\phi(t,a,\omega)$ $(t \geq 0, a \in \mathbb{R})$ de telle sorte que l'application $(t,a) \longmapsto \phi(t,a,\omega)$ soit p.s. continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

① Montrer que, pour tout $(t,a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a :

$$\phi(t,a) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t 1_{[a-\varepsilon, a+\varepsilon]}(B_s)\, ds$$

② Déduire de la formule (*) (ex. 19), que, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$|B_t - a| = |B_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - a)\, dB_s + L(t,a) \quad \text{p.s.}$$

où $L(t,a) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{[a-\varepsilon, a+\varepsilon]}(B_s)\, ds$ $\quad (t \geq 0)$

et $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Montrer que le processus $\tilde{B}_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - a)\, dB_s$ $\quad (t \geq 0)$

est un mouvement brownien.

Quelles sont les propriétés du processus $(L(t,a))_{t \geq 0}$?

(21) On dit qu'un processus $B = (B_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est un mouvement brownien complexe issu de zéro, s'il se met sous la forme

$$B_t = B_1(t) + i\, B_2(t) \qquad (t \geq 0)$$

où $(B_1(t))$ et $(B_2(t))$ sont deux mvts browniens réels indépendants, issus de zéro.

Soit f une application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Posons

$$M_t = \mathrm{Re}\,[f(B_t)], \quad N_t = \mathrm{Im}\,[f(B_t)] \qquad (t \geq 0).$$

1) Montrer que les processus $(M_t)_{t\geq 0}$, $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t N_t)_{t\geq 0}$ s'expriment simplement en fonction d'intégrales stochastiques relativement au mvt brownien bidimensionnel $(B_1(t), B_2(t))_{t\geq 0}$.

2) Montrer qu'il existe un autre mvt brownien $\tilde{B}_t = (\tilde{B}_1(t), \tilde{B}_2(t))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{cases} M_t = \mathrm{Re}[f(0)] + \displaystyle\int_0^t |f'(B_s)|\, d\tilde{B}_1(s) & \text{p.s.} \\ N_t = \mathrm{Im}[f(0)] + \displaystyle\int_0^t |f'(B_s)|\, d\tilde{B}_2(s) & \text{p.s.} \end{cases}$$

(Utiliser l'ex. 17).

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Développer, à l'aide de la formule d'Itô l'expression

$$\exp\Big[i\,[\lambda_1 M_t + \lambda_2 N_t] + \frac{1}{2}\,|\lambda|^2 \int_0^t |f'(B_s)|^2\, ds \Big] \qquad (t \geq 0)$$

3) On suppose que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \alpha \exp(z)$ où $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ est fixé

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty |f'(B_s)|^2\, ds = |\alpha|^2 \int_0^\infty \exp\big(2 B_1(s)\big)\, ds = +\infty$ p.s.

b) Montrer qu'on peut trouver un mouvement brownien $C_t = C_1(t) + i\, C_2(t)$ $(t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (issu de zéro) tel que, pour tout $t \geq 0$:

$$(*) \qquad \alpha \exp(B_t) = \alpha + C_{\rho_t} \quad \text{p.s.}$$

où $\rho_t = \displaystyle\int_0^t |f'(B_s)|^2\, ds = |\alpha|^2 \int_0^t \exp\big(2 B_1(s)\big)\, ds$

c) Déduire de la représentation (*) que, pour tout $x \in \mathbb{C} - \{0\}$:

$$P\{\,]t>0 : B_t = x \,\} = 0 \qquad \text{(on dit alors que tous les points sont polaires)}$$

$$P\Big\{ \lim_{t\to\infty} |B_t - x| = 0 \Big\} = 1$$

Cette dernière propriété entraîne que les trajectoires de $(B_t)_{t\geq 0}$ sont p.s. partout denses dans le plan complexe : le mvt brownien bidimensionnel est récurrent.

(22) Soit $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_d(t))$ $(t \geqslant 0)$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$, issu de zéro. Si $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$.

Soient $0 < \alpha < 1/2$ et $\eta > 0$. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P\{|B(n)| \leqslant \eta . n^\alpha\} \leqslant \frac{c}{n^{d(\frac{1}{2}-\alpha)}}.$$

Montrer, de plus, que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P\left\{\sup_{t \in [n, n+1]} |B_t - B_n| > \varepsilon n^\alpha\right\} < \infty.$$

En déduire que si $d \geqslant 3$ et $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$, alors

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|B_t|}{t^\alpha} = +\infty \quad \text{p.s.}$$

(Le mouvement brownien est transcient si $d \geqslant 3$).

(23) Soit $B = (B(t))_{t \in [0,T]}$ un mvt brownien réel, issu de zéro, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}, P)$.

1) Soit σ une application lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons φ la solution de l'équation différentielle $\varphi' = \sigma \circ \varphi$; $\varphi(0) = x$. On pose $X_t = \varphi(B_t)$. Montrer que (X_t) est solution de l'E.D.S. :

$$(*) \qquad X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma' \sigma (X_s)\, ds \qquad t \in [0,T] \quad \text{p.s.}$$

2) On suppose, de plus, que pour tout $y \in \mathbb{R}$: $0 < \alpha \leqslant \sigma(y) \leqslant \beta < \infty$ où α et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que, pour toute application b de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mesurable et bornée, on peut construire une probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ équivalente à P et un Q-mouvement brownien $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \in [0,T]}$ tels que la solution (X_t) de l'équation $(*)$ soit aussi solution de l'E.D.S. :

$$(**) \qquad X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\, d\tilde{B}_s + \int_0^t b(X_s)\, ds, \qquad t \in [0,T] \quad \text{p.s.}$$

(24) Soit $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mvt brownien réel issu de zéro, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ et soient σ, b_1 et b_2 trois applications lipschitziennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $y \in \mathbb{R}$: $0 < \alpha \leqslant \sigma(y)$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ est une constante fixée.

Considérons les solutions (X_t) et (Y_t) des E.D.S.

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s + \int_0^t b_1(X_s)\,ds \\ Y_t = x + \int_0^t \sigma(Y_s)\,dB_s + \int_0^t b_2(Y_s)\,ds \end{cases} \quad \text{où } t\in[0,T] \quad (x\in\mathbb{R} \text{ est fixé})$$

Notons Q_{b_1} et Q_{b_2} les lois des processus (X_t) et (Y_t) respectivement sur l'espace $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ muni de sa tribu borélienne.

En utilisant le théorème de Girsanov, montrer que les probabilités Q_{b_1} et Q_{b_2} sont équivalentes et calculer la densité $D = \frac{dQ_{b_1}}{dQ_{b_2}}$.

Considérer le cas où $b_2 \equiv 0$.

(25) Soient $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mvt brownien réel issu de zéro, σ et b deux applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Considérons les solutions (X_t) et (Y_t) des E.D.S.

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s + \int_0^t b(X_s)\,ds \\ Y_t = y + \int_0^t \sigma(Y_s)\,dB_s + \int_0^t b(Y_s)\,ds \end{cases} \quad \text{où } t\in[0,T] \quad (x<y \text{ sont fixés})$$

1) Montrer que le processus d'Itô

$$M_t = \int_0^t \frac{\sigma(X_s)-\sigma(Y_s)}{X_s - Y_s}\cdot 1_{(X_s\neq Y_s)}\,dB_s + \int_0^t \frac{b(X_s)-b(Y_s)}{X_s-Y_s}\cdot 1_{(X_s\neq Y_s)}\,ds \text{ est bien défini}$$

2) Montrer que :

$$X_t - Y_t = (x-y)\exp\left(M_t - \tfrac{1}{2}\langle M\rangle_t\right) \text{ où } \langle M\rangle_t = \int_0^t \left(\frac{\sigma(X_s)-\sigma(Y_s)}{X_s-Y_s}\right)^2 1_{(X_s\neq Y_s)}\,ds$$

En déduire que $\mathbb{P}\{\forall t\geqslant 0 \quad X_t < Y_t\} = 1$.

3) Que peut-on dire si $\sigma(y) = b(y) = 0$?

4) On suppose que $b\equiv 0$ et qu'il existe $(y_1,y_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que $y_1 < x < y_2$; $\sigma(y_1) = \sigma(y_2) = 0$ et $\sigma(y)\neq 0$ pour tout $y\in]y_1,y_2[$.

Montrer que (X_t) converge, quand $t\to\infty$ (dans L^2), vers une v.a. X_∞ ne prenant que les deux valeurs y_1 et y_2 : $X_\infty = y_1\cdot 1_{(X_\infty = y_1)} + y_2\cdot 1_{(X_\infty = y_2)}$

Calculer $\mathbb{P}(X_\infty = y_i)$ $(i=1,2)$ et vérifier que $X_t = E\{X_\infty / \mathcal{F}_t\}$ où $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s ; s\leqslant t\}$

(26) Soient $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de zéro, $b = (b(s,y))$ une application continue de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ uniformément lipschitzienne en $y \in \mathbb{R}$.

Considérons la solution $(X_t) = (X_{\theta,\sigma}(t))_{t \geq 0}$ de l'E.D.S. :

$$(*) \quad X_t = x + \sigma B_t + \theta \int_0^t b(s, X_s)\, ds \quad ; \quad (x \in \mathbb{R} \text{ est donné, } \theta \text{ et } \sigma \text{ sont deux paramètres réels})$$

1) Soit $(Y_t) = (X_{\theta,0}(t))_{t \geq 0}$: $Y_t = x + \theta \int_0^t b(s, Y_s)\, ds$.

En utilisant le lemme de Gronwall, montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tous $t \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sup_{0 \leq u \leq t} |X_u - Y_u| \leq \left(|\sigma| \sup_{0 \leq u \leq t} |B_u| \right) \exp(c|\theta| t)$$

En déduire que $\lim_{\sigma \to 0} \left\{ \sup_{0 \leq u \leq t} |X_u - Y_u| \right\} = 0$ p.s et dans L^p, pour tout $p \in [1, \infty[$

2) Soit $T > 0$ fixé. Pour toute subdivision $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_\Delta} = T\}$ de $[0,T]$, notons $V_\Delta(X) = \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2$. Montrer que

$$\lim_{|\Delta| \to 0} V_\Delta(X) = \sigma^2 T \quad \text{en probabilité (et même dans } L^2)$$

3) On suppose, dans la suite, qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que, pour tout $(s,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$: $0 < \alpha \leq b(s,y) \leq \beta < \infty$.

Notons $Q_{\theta,\sigma}$ la loi image du processus $(X_{\theta,\sigma}(t))_{t \in [0,T]}$ sur l'espace canonique $W = \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$. Calculer la densité :

$$(**) \quad \frac{dQ_{\theta,\sigma}}{dQ_{0,\sigma}}(w) = D_{\theta,\sigma,T}(w) \qquad (\sigma \neq 0), \ w \in W$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ est la valeur $\hat{\theta}_T(w)$ de θ qui maximise la densité $(**)$. Calculer $\hat{\theta}_T(w)$.

4) Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{\sigma}\left[\hat{\theta}_T(X_{\theta,\sigma}) - \theta\right]$ converge dans L^2, quand $\sigma \downarrow 0$, vers une v.a.r. Z_θ de loi $N_1\left(0, \left(\int_0^T b^2(s, Y_s)\, ds\right)^{-1}\right)$

5) On suppose, de plus, que $\lim_{s \to \infty} b(s,y) = l > 0$, uniformément en $y \in \mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout $(\theta, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

$\frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left[\hat{\theta}_T(X_{\theta,\sigma}) - \theta\right]$ converge en loi, quand $T \to +\infty$, vers $N_1\left(0, \frac{1}{l^2}\right)$.

(27) Soient σ et b deux applications lipschitziennes de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbb{R}^d$ respectivement. On suppose, de plus, que σ et b sont bornées, de classe $\mathcal{C}^2_b$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, considérons la solution $(X^x_t)_{t \geq 0}$ de l'E.D.S.

$$X^x_t = x + \int_0^t \sigma(X^x_s)\, dB_s + \int_0^t b(X^x_s)\, ds \quad , \quad (B_t)_{t \geq 0} \text{ étant un mvt brownien à valeurs } \mathbb{R}^d$$

1) Soit f une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2_b. Posons

$P_t f(x) = E\{f(X^x_t)\}$ $(t \geq 0)$. Montrer que

$$P_t f(x) = f(x) + \int_0^t P_s[Lf](x)\, ds \quad , \quad L \text{ étant l'opérateur différentiel}$$

défini par : $Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

où $a_{ij}(x) = \sum_{\ell=1}^{d} \sigma_{i\ell}(x) \cdot \sigma_{j\ell}(x) = (\sigma \cdot \sigma^*)_{ij}(x)$

2) Soit $U(t,x) = P_t f(x)$ $(f \in \mathcal{C}^2_b)$

On admettra que $U = (U(t,x))_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d}$ est de classe $\mathcal{C}^2_b$ en x.

Soit $T > 0$ fixé. Développer, à l'aide de la formule d'Itô, l'expression $U(T-t, X^x_t)$, pour tout $t \in [0,T]$. En déduire que $U = (U(t,x))$ est l'unique solution, de classe C^1 en t et C^2 en x du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U(t,x) = LU(t,x) & \text{où } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \\ U(0,x) = f(x) \end{cases}$$

3) On dit qu'une mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ est invariante si, pour tout $t \geq 0$ et toute application f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, mesurable bornée on a

$$\mu P_t f = \int \mu(dx)\, P_t f(x) = \int \mu(dx)\, f(x) = \mu(f).$$

Montrer que μ est invariante si et seulement si, pour toute application $f \in \mathcal{C}^2_b$, on a :

$$\mu Lf = \int \mu(dx)\, Lf(x) = 0.$$

Université de Paris 9 - Dauphine — DEA MASE

UFR MD, année 1999-2000 — Calcul d'Itô, Contrôle Stochastique

Examen du 3 Février 2000

I) Soit $(B_t)_{t \geqslant 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien scalaire issu de zéro, défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ vérifiant les conditions habituelles

A) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$T_a(\omega) = \inf \{ t \geqslant 0 \ ; \ B_t(\omega) \geqslant a \} \quad , \quad \text{Inf } \phi = +\infty .$$

On se propose d'étudier le temps d'arrêt T_a.

Le cas $a = 0$ est trivial. Le cas $a < 0$ se déduit du cas $a > 0$ en changeant (B_t) en $(-B_t)$. Supposons donc $a > 0$.

Soit $\alpha \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)_t$ telle que, pour tout t, α_t soit $\geqslant 0$ et telle que $\beta_t = \int_0^{+\infty} \alpha_s \, ds$ tende vers $+\infty = \beta_\infty$, quand $t \to \infty_+$.

On pose $Z = \exp \left\{ -\int_0^{+\infty} \alpha_s \, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \alpha_s^2 \, ds \right\}$ et on définit la probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par :

$$Q(S) = \int_S Z(\omega) \, P(d\omega) \quad \text{si} \quad S \in \mathcal{F}.$$

Enfin on pose $X_t = B_t + \beta_t \quad (t \geqslant 0)$.

1) Montrer que, pour toute suite finie $0 \leqslant t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ et toute application mesurable positive φ de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$E_Q \{ \varphi(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \} = E_P \{ \varphi(B_{t_0}, B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) \}$$

Quelle est la loi du processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ sous la probabilité Q ?

On pose $S_a(\omega) = \inf \{ t \geqslant 0 \ ; \ X_t(\omega) \geqslant a \}$, $\text{Inf } \phi = +\infty$.

2) Montrer que $E_P \{ \beta_{t \wedge S_a} \} \leqslant a$, pour tout $t \geqslant 0$.

En déduire que la v.a. β_{S_a} est intégrable.

3) Montrer que $P \{ S_a < \infty \} = 1$.

4) Montrer que $P \{ T_a < \infty \} = Q \{ S_a < \infty \}$

et en déduire que $P \{ T_a < \infty \} = 1$

5) Déduire de ce qui précède que $\lim_{t \to +\infty} B_t(\omega) = +\infty$ p.s.

et $\lim_{t \to +\infty} B_t(\omega) = -\infty$ p.s.

I) (suite). B). Etant donné un temps d'arrêt quelconque T, on rappelle que, pour tout $t \geqslant 0$:

$$B_{T \wedge t} = \int_0^t 1_{]0,T]}(s)\, dB_s \quad \text{p.s.}$$

1) On suppose que $E\{T\} < \infty$. Montrer que :

$$E\left\{ \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} B_s^2 \right\} \leqslant 4\, E\{T\} < \infty .$$

Calculer $E\{B_T\}$ et $E\{B_T^2\}$

2) Evaluer $E\{B_{T_a}\}$ où T_a est défini en A).

En déduire que, pour tout $a \neq 0$, $E\{T_a\} = +\infty$.

C) Le but de cette partie est de calculer la transformée de Laplace du temps d'arrêt T_a. $(a > 0)$.

1) En utilisant le fait que le processus

$M_t = \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right)$ $(t \geqslant 0)$ est une martingale, calculer, pour tout $\lambda > 0$:

$$E\left\{ \exp\left(\lambda B_{t \wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2} t \wedge T_a\right)\right\}$$

2) En déduire que, si $\lambda > 0$ et $a > 0$:

$$E\left\{ \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} T_a\right) \cdot 1_{(T_a < \infty)} \right\} = \exp(-\lambda a) .$$

Calculer $E\left\{ T_a \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} T_a\right)\right\}$,

puis, en faisant tendre λ vers zéro, redémontrer que :

$$P\{T_a < \infty\} = 1 \quad \text{et} \quad E\{T_a\} = +\infty .$$

II) On considère le système contrôlé donné par :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} dX_t = \sigma\, dB_t + (mU_t - \ell X_t)\, dt, & t \geq s \geq 0 \\ X_s = x \end{cases}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien réel, $(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, σ, ℓ et m sont des constantes réelles fixées telles que : $m.\sigma \neq 0$ et $\ell \geq 0$, le contrôle $U = (U_t)_{t\geq 0}$ est un processus mesurable, adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}$, tel que : $\sup_{t\geq 0} E\{U_t^2\} < \infty$.

On désignera par $\mathcal{A}$ l'ensemble des contrôles U vérifiant les propriétés précédentes. La fonction de coût J est donnée par :

$$J((s,x),U) = E\left\{ \int_s^{+\infty} e^{-\rho t} (c X_t^2 + k U_t^2)\, dt \right\}$$

où $\rho > 0$, $c \geq 0$ et $k > 0$ sont des constantes

$(X_t)_{t\geq s} = (X_t^{(s,x),U})_{t\geq s}$ étant solution de $(\mathcal{S})$.

On désigne par $V = (V(s,x))_{(s,x)\in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}$ la fonction de valeur : $V(s,x) = \inf \{ J((s,x),U),\ U \in \mathcal{A} \}$.

1) Ecrire l'équation de Hamilton - Jacobi - Bellmann associée au problème précédent et montrer que cette équation admet une solution de la forme : $W(s,x) = e^{-\rho s}(ax^2 + b)$ où a et b sont deux constantes positives à déterminer.

2) i) Développer à l'aide de la formule d'Itô la quantité $|X_t^{(s,x),U}|^2$; en déduire une majoration convenable de $E\{|X_t^{(s,x),U}|^2\}$ et montrer que, pour tout $U \in \mathcal{A}$:

$$\lim_{t\to\infty} E\{W(t, X_t^{(s,x),U})\} = 0$$

ii) Montrer que $W(s,x) = V(s,x)$, pour tout $(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et déterminer un contrôle optimal markovien $U^* \in \mathcal{A}$.

3) Soit $(X_t^*)_{t\geq s}$ l'évolution du système $(\mathcal{S})$ associée au contrôle optimal $U^* = (U_t^*)_{t\geq s}$

II) (suite)

3) a) Montrer que $(X_t^*)_{t \geqslant s}$ est un processus gaussien donné par :

$$(\mathcal{G}^*) : X_t^* = x + \sigma (B_t - B_s) - \left(l + \frac{am^2}{k}\right) \int_s^t X_v^* \, dv \quad , \quad (t \geqslant s, x \in \mathbb{R})$$

Calculer explicitement X_t^* ainsi que sa fonction caractéristique.

b) Montrer que (X_t^*) converge en loi, quand $t \longrightarrow +\infty$, vers une v.a.r. de loi μ à déterminer.

c) Soit $\bar{x}$ une v.a.r. de loi μ, indépendante du processus $(B_t - B_s)_{t \geqslant s}$.

On considère la solution $(\bar{X}_t)_{t \geqslant s}$ de :

$$(\bar{\mathcal{G}}) : \bar{X}_t = \bar{x} + \sigma (B_t - B_s) - \left(l + \frac{am^2}{k}\right) \int_s^t \bar{X}_v \, dv \quad , \quad (t \geqslant s)$$

Montrer que, pour tout $t \geqslant s$, $\bar{X}_t$ a même loi que $\bar{x}$.

4) Soient $0 \leqslant s < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ fixés $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $T > 0$. Montrer que le vecteur aléatoire :

$$\left(X^*_{t_k + T}\right)_{k = 1, 2, \dots, n}$$ converge en loi, quand $T \longrightarrow +\infty$,

vers le vecteur : $\left(\bar{X}_{t_k}\right)_{k = 1, 2, \dots, n}$ où $(X_t^*)_{t \geqslant s}$ et $(\bar{X}_t)_{t \geqslant s}$ sont respectivement solutions des systèmes $(\mathcal{G}^*)$ et $(\bar{\mathcal{G}})$.

Université de Paris 9 - Dauphine — DEA M.A.S.E.

UFR MD, année 2000 - 2001 — Calcul d'Itô, Contrôle Stochastique

Examen du 2 Février 2001

I) Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ vérifiant les conditions habituelles, soit $B = (B_1(t), B_2(t))_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^2$, issu de zéro.

1) Soit $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posons

$$\tilde{B}_1(t) = \frac{1}{|\sigma|}\{\sigma_1 B_1(t) - \sigma_2 B_2(t)\}$$

$$\tilde{B}_2(t) = \frac{1}{|\sigma|}\{\sigma_2 B_1(t) + \sigma_1 B_2(t)\}$$

où $|\sigma|^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Que peut-on dire du processus $\tilde{B} = (\tilde{B}_1(t), \tilde{B}_2(t))_{t\geq 0}$?

2) Soient $Y_1(t) = \exp\{\sigma_1 B_1(t) - \sigma_2 B_2(t)\} \cos\{\sigma_2 B_1(t) + \sigma_1 B_2(t)\}$

$Y_2(t) = \exp\{\sigma_1 B_1(t) - \sigma_2 B_2(t)\} \sin\{\sigma_2 B_1(t) + \sigma_1 B_2(t)\}$

et $Z(t) = Y_1(t) \cdot Y_2(t)$

Montrer que les processus $(Y_1(t))_{t\geq 0}$, $(Y_2(t))_{t\geq 0}$ et $(Z(t))_{t\geq 0}$ sont des $\mathcal{F}_t$ - martingales.

Calculer les crochets $\langle Y_1 \rangle_t$, $\langle Y_2 \rangle_t$, $\langle Y_1, Y_2 \rangle_t$ et $\langle Z \rangle_t$, pour tout $t \geq 0$.

3) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On définit :

$$X_1^x(t) = x_1 Y_1(t) - x_2 Y_2(t)$$

$$X_2^x(t) = x_2 Y_1(t) + x_1 Y_2(t).$$

Montrer que $X^x = \begin{pmatrix} X_1^x(t) \\ X_2^x(t) \end{pmatrix}_{t\geq 0}$ est un processus de Markov, solution d'une équation différentielle stochastique que l'on déterminera.

Calculer le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ de $(X_t^x)_{t\geq 0}$.

4) a) Calculer $|X_t^x| = \left[(X_1^x(t))^2 + (X_2^x(t))^2\right]^{1/2}$

et montrer qu'il existe un <u>unique</u> processus $V = (V_t)_{t\geq 0}$

I) 4) i) (suite)

à variations finies, adapté, continu, issu de 1, tel que $(|X_t^x| \cdot V_t)_{t \geq 0}$ soit une $\mathcal{F}_t$-martingale.

ii) Que peut-on dire du comportement asymptotique, quand $t \longrightarrow +\infty$, des processus :

$(|X_t^x|)_{t \geq 0}$, $(|X_t^x| \cdot V_t)_{t \geq 0}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2t \operatorname{Log}(\operatorname{Log}(t))}} \operatorname{Log}|X_t^x|\right)_{t \geq e}$ et $\left(\frac{1}{t} \log\{|X_t^x| \cdot V_t\}\right)_{t \geq 0}$?

II) On considère le système contrôlé donné par :

$$(\mathcal{G}) \begin{cases} dX_t = \sigma\, dB_t + U_t\, dt, & t \geq s \geq 0 \\ X_s = x \end{cases}$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel [défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})\ldots$], $(s, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, σ est une constante réelle non nulle, le contrôle $U = (U_t)_{t \geq 0}$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$, tel que, pour tout $t \geq 0$: $E\left\{\int_0^t U_v^2\, dv\right\} < \infty$.

On désignera par $\mathcal{A}$ l'ensemble des contrôles vérifiant les propriétés précédentes.

Soient $\tau \in]s, +\infty[$ et $m \in \mathbb{R}$ deux constantes données.

On notera $\tilde{\mathcal{A}} = \left\{U \in \mathcal{A} \text{ tels que } E\left\{X_\tau^{(s,x),U}\right\} = m\right\}$

où $X^{(s,x),U} = (X_t)_{t \geq s}$ est la solution du système $(\mathcal{G})$.

On se propose de calculer, pour tout $(s, x) \in [0, \tau[\times \mathbb{R}$, la quantité $V(s, x) = \operatorname{Inf}\left\{J((s, x), U),\ U \in \tilde{\mathcal{A}}\right\}$ (*)

où la fonction de coût J est définie par :

$$J((s, x), U) = E\left\{\int_s^\tau (X_v^2 + U_v^2)\, dv + (X_\tau)^2\right\}$$

et de rechercher, dans $\tilde{\mathcal{A}}$, un contrôle optimal réalisant la borne inférieure (*).

II) (suite)

Soit α un paramètre réel. On considère une nouvelle fonction de coût définie par :

$$J_\alpha((s,x),u) = E\left\{\int_s^T \left(X_v^2 + u_v^2\right) dv + X_T^2 + \alpha(X_T - m)\right\}$$

où $u \in \mathcal{A}$.

Posons, pour tout $(s,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}$

$$V_\alpha((s,x)) = Inf\left\{J_\alpha((s,x),u),\ u \in \mathcal{A}\right\}.$$

1) a) Ecrire l'équation de H. J. B. associée au problème de contrôle sans contraintes, relatif à la fonction de coût J_α et à la fonction de valeur V_α puis montrer que cette équation admet une solution de la forme $H_\alpha(s,x) = x^2 + a_\alpha(s)\,x + b_\alpha(s)$, $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, où les fonctions $a_\alpha(\cdot)$ et $b_\alpha(\cdot)$ sont dérivables et à déterminer.

b) Montrer que $V_\alpha(s,x) = H_\alpha(s,x)$, pour tout $(s,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}$ et déterminer un contrôle optimal markovien u_α^* appartenant à $\mathcal{A}$.

2) Soit $\left(X_\alpha^*(t)\right)_{t \geqslant s}$ la solution du système $(\mathcal{Y})$ associée au contrôle optimal u_α^*.

a) Ecrire l'E. D. S. que vérifie le processus X_α^* et montrer que :

$$X_\alpha^*(t) = x\exp(s-t) - \int_s^t M_v \exp(v-t)\,dv + M_t$$

où $M_t = \sigma(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\alpha\exp(-T)\left[\exp(t) - \exp(s)\right]$, $(t \geqslant s)$.

b) En déduire le calcul de $E\left\{X_\alpha^*(T)\right\}$.

3) Montrer qu'il existe un unique $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$E\left\{X_{\alpha_0}^*(T)\right\} = m.$$

II) 3) (suite)

En déduire que le contrôle $U^*_{d_0}$ appartient à $\tilde{\mathcal{A}}$ et que :

$$V(s,x) = J\left((s,x), U^*_{d_0}\right) = V_{d_0}(s,x)$$

pour tout $(s,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}$.

[On notera que d_0 dépend de s, x et m].

Université de Paris Dauphine — DEA M.A.S.E. — Calcul stochastique.

UFR MD ; année 2001 - 2002. — Examen du 4 Février 2002.

I) On considère un signal aléatoire donné par une v.a.r. gaussienne

$$X \sim N_1(m, \sigma^2)$$

Supposons qu'à chaque instant $t \geq 0$, les observations Y_t de ce signal sont de la forme :

$$Y_t = X.t + \tilde{\sigma} B_t$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un "bruit" représenté par un mouvement brownien réel indépendant de X, issu de zéro ;

$m \in \mathbb{R}$, $(\sigma, \tilde{\sigma}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sont des paramètres.

Notons $\mathcal{G}_t$ la tribu engendrée par les v.a.r. Y_s, $(0 \leq s \leq t)$ et posons $\hat{X}_t = E\{X / \mathcal{G}_t\}$ p.s.

1) Quelle est la loi de Y_t ?

2) Soit $S_t = E\{(X - \hat{X}_t)^2\}$, $(t \geq 0)$.

Montrer que $S_t = \dfrac{\sigma^2 . \tilde{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}^2 + \sigma^2 t}$ et que

$$\hat{X}_t = S_t \left(\frac{m}{\sigma^2} + \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} . Y_t \right)$$

[On pourra utiliser le fait que $(S_t)_{t \geq 0}$ et $(\hat{X}_t)_{t \geq 0}$ sont solutions d'équations différentielles données par un Théorème du cours].

3) Montrer que $(\hat{X}_t)$ converge presque sûrement et dans $\mathcal{L}^2$, quand $t \longrightarrow +\infty$, vers une limite à déterminer.

Commenter ce résultat.

4) Soit h une application mesurable et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, calculer $E\{h(X) / \mathcal{G}_t\}$, $(t \geq 0)$.

II) Soit $(B_t)_{t \geqslant 0}$ un mouvement brownien réel, issu de zéro, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$. On considère le processus : $Z_t = B_t - t B_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

1) Montrer que $(Z_t)_{t \in [0,1]}$ est un processus gaussien indépendant de la v.a. B_1.

2) Soit $\overline{Z}_t = Z_{1-t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Montrer que les processus $(Z_t)_{t \in [0,1]}$ et $(\overline{Z}_t)_{t \in [0,1]}$ ont même loi.

3) Soit $Y_t = (1-t) \cdot B_{\left(\frac{t}{1-t}\right)}$ si $t \in [0,1[$, $Y_1 = 0$.

Montrer que $Y_t \longrightarrow 0$ p.s., quand $t \underset{t<1}{\longrightarrow} 1$.

Montrer que les processus $(Y_t)_{t \in [0,1]}$ et $(Z_t)_{t \in [0,1]}$ ont même loi.

4) On cherche la loi de $\sup_{t \in [0,1]} Z_t$

α) Montrer que $\sup_{t \in [0,1]} Z_t \geqslant 0$ p.s.

β) Soient $a > 0$ et $F(a) = P\left\{ \sup_{t \in [0,1]} Z_t < a \right\}$.

Montrer que $F(a) = 1 - P\{ \exists\, t \in [0,1],\ Z_t = a \}$

Prouver, à l'aide de la question 3), que

$$P\{ \exists\, t \in [0,1],\ Z_t = a \} = P\{ \exists\, t \geqslant 0,\ B_t - ta = a \}$$

γ) Notons $\tau_a = \inf\{ t \geqslant 0,\ B_t - ta = a \}$, $\inf \emptyset = +\infty$.

Montrer que τ_a est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt et que $F(a) = 1 - P\{\tau_a < \infty\}$.

δ) Développer, par la formule d'Itô, $\exp\{ 2a (B_t - ta) \}$.

Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$: $E\left\{ \exp\left(2a \left(B_{t \wedge \tau_a} - (t \wedge \tau_a) \cdot a \right) \right) \right\} = 1$

et que $B_{t \wedge \tau_a} - (t \wedge \tau_a) a \leqslant a$ p.s.

En déduire que :

$$E\left\{ 1_{(\tau_a < \infty)} \exp\left(2a \left(B_{\tau_a} - a \tau_a \right) \right) \right\} = 1$$

Calculer $P\{ \tau_a < \infty \}$ et en déduire la densité de $\sup_{t \in [0,1]} Z_t$.

III) Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de zéro, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ et soient σ et b deux applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Considérons les solutions $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ des E.D.S. :

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s + \int_0^t b(X_s)\,ds \quad \text{p.s.}$$

$$Y_t = y + \int_0^t \sigma(Y_s)\,dB_s + \int_0^t b(Y_s)\,ds \quad \text{p.s.}$$

où les valeurs initiales x et y sont des constantes réelles telles que $x < y$.

1) Montrer que le processus suivant est bien défini :

$$M_t = \int_0^t \frac{\sigma(X_s)-\sigma(Y_s)}{(X_s - Y_s)} \cdot 1_{(X_s \neq Y_s)}\,dB_s + \int_0^t \frac{b(X_s)-b(Y_s)}{(X_s-Y_s)} \cdot 1_{(X_s \neq Y_s)}\,ds \quad \text{p.s.}$$

2) Montrer, en utilisant la formule d'Itô, que :

$$X_t - Y_t = (x-y)\exp\left\{M_t - \tfrac{1}{2}\langle M\rangle_t\right\} \quad \text{p.s.}$$

où $\langle M\rangle_t = \int_0^t \left(\frac{\sigma(X_s)-\sigma(Y_s)}{X_s - Y_s}\right)^2 \cdot 1_{(X_s \neq Y_s)}\,ds$. $(t \geq 0)$.

En déduire que $P\{\forall t \geq 0 : X_t < Y_t\} = 1$.

3) On suppose que $b \equiv 0$ et qu'il existe $(y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $y_1 < y_2$, $\sigma(y_1) = \sigma(y_2) = 0$ et $\sigma(y) \neq 0$ pour tout $y \in]y_1, y_2[$.

Montrer que si $x \in]y_1, y_2[$, alors :

i) $P\{\forall t \geq 0, X_t \in]y_1, y_2[\} = 1$.

ii) $\int_0^{+\infty} \sigma^2(X_s)\,ds < \infty$ p.s.

iii) (X_t) converge presque sûrement et dans L^2, quand $t \to +\infty$, vers une v.a. X_∞ ne prenant que les deux valeurs y_1 et y_2.

Calculer $P\{X_\infty = y_i\}$, $i = 1, 2$ et $E\{X_\infty / \mathcal{F}_t\}$, $t \geq 0$.

N.B. : On rappelle que toute martingale continue et bornée $(N_t)_{t\geq 0}$ converge presque-sûrement, quand $t \to \infty$.

IV) Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$, soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$, issu de zéro et soit σ une application lipschitzienne définie sur $\mathbb{R}^q$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{M}$ des matrices à q lignes et d colonnes.

Considérons la solution $(X_t^x)_{t \geq 0}$ de l'E.D.S. :

$$X_t^x = x + \int_0^t \sigma(X_s^x)\, dB_s \quad \text{p.s.}$$

où $x \in \mathbb{R}^q$

On suppose, de plus, que σ est à support compact.

Soit $K = \text{Supp}\, \sigma = \overline{\{x \in \mathbb{R}^q : \sigma(x) \neq 0\}}$

1) Montrer que $(x \notin K) \Rightarrow P\{\forall t \geq 0 : X_t^x = x\} = 1$

et, en utilisant la propriété de Markov forte, démontrer que

$(x \in K) \Rightarrow P\{\forall t \geq 0 : X_t^x \in K\} = 1$

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^q$, (X_t^x) converge p.s. et dans $\mathcal{L}^2$, quand $t \to +\infty$, vers une v.a. X_∞^x.

Calculer $E\{X_\infty^x / \mathcal{F}_t\}$, $(t \geq 0)$.

3) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^q$, $\sigma\{X_\infty^x(\omega)\} = 0$ p.s.

4) Soit f une application continue et bornée de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}^q$, posons :

$$u(y) = E\{f(X_\infty^y)\}.$$

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^q$, le processus

$$M_t = u(X_t^x), \quad (t \geq 0)$$

est une $\mathcal{F}_t$ - martingale.

Université de Paris-Dauphine ; DEA MASE , Calcul d'Itô, Contrôle Stochastique

U.F.R. MD. ; Année 2002-2003. Examen du 13 Janvier 2003

I) Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, vérifiant les conditions habituelles, on désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des semi-martingales continues à valeurs réelles.

A) Soient $M = (M_t)_{t\geq 0}$ un élément de $\mathcal{S}$ et $C = (C_t)_{t\geq 0}$ un processus continu $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs réelles.

On se propose d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution [continue, $\mathcal{F}_t$-adapté] $X = (X_t)_{t\geq 0}$ de l'E.D.S. :

$$(*) \qquad X_t = C_t + \int_0^t X_s \, dM_s \,, \quad (t \geq 0) \quad \text{p.s.}$$

1) Unicité :

Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ deux solutions continues $\mathcal{F}_t$-adaptées de l'E.D.S. (*). Posons $R_t = X_t - \tilde{X}_t$.

Démontrer, grâce à la formule d'Itô, que le processus $\left(R_t \exp\left(-M_t + \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right)\right)_{t\geq 0}$ est p.s. constant ; en déduire que $(X_t)_{t\geq 0} = (\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ p.s.

2) Existence :

a) Supposons, d'abord, que le processus $C = (C_t)_{t\geq 0}$ est aussi un élément de $\mathcal{S}$. Vérifier que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ donné par : $X_t = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right)\left\{C_0 + \int_0^t \exp\left(-M_s + \frac{1}{2}\langle M\rangle_s\right) d\left(C_s - \langle C, M\rangle_s\right)\right\}$ est une solution de (*).

aa) Si $C = (C_t)_{t\geq 0}$ est seulement continu $\mathcal{F}_t$-adapté, vérifier que le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$, donné par :

$$X_t = C_t + \left[\exp\left(M_t - \tfrac{1}{2}\langle M\rangle_t\right)\right] \cdot \int_0^t C_s \exp\left(-M_s + \tfrac{1}{2}\langle M\rangle_s\right) d\left(M_s - \langle M\rangle_s\right)$$

est bien une solution de l'E.D.S. (*).

Indication : considérer $Y_t = X_t - C_t$.

I) (suite)

B) Soient σ_ℓ, $\ell \in \{1, 2, \dots, d\}$, b_1, b_2 $d+2$ applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $B = (B_t^1, \dots, B_t^d)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$.

Considérons les solutions $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ des E.D.S. :

$$X_t = x + \int_0^t b_1(X_s)\, ds + \sum_{\ell=1}^{d} \int_0^t \sigma_\ell(X_s)\, dB_s^\ell \quad , (t \geq 0) \text{ p.s.}$$

$$Y_t = y + \int_0^t b_2(Y_s)\, ds + \sum_{\ell=1}^{d} \int_0^t \sigma_\ell(Y_s)\, dB_s^\ell \quad , (t \geq 0) \text{ p.s.}$$

où x et y sont deux réels donnés tels que $x \leq y$.

On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $b_1(\alpha) < b_2(\alpha)$

1) Posons $M_t = \sum_{\ell=1}^{d} \int_0^t \left(\frac{\sigma_\ell(X_s) - \sigma_\ell(Y_s)}{X_s - Y_s} \right) \cdot 1_{(X_s \neq Y_s)}\, dB_s^\ell$

Vérifier que $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale continue de carré intégrable. Calculer le "crochet" $\langle M \rangle_t$, $(t \geq 0)$.

2) Posons $C_t = x - y + \int_0^t (b_1(X_s) - b_2(Y_s))\, ds$.

Montrer que le processus $Z_t = X_t - Y_t$ $(t \geq 0)$ est solution de l'E.D.S. :

$$Z_t = C_t + \int_0^t Z_s\, dM_s \quad , (t \geq 0) \text{ p.s.}$$

En déduire, grâce à la partie A), une formule explicite donnant $(Z_t)_{t \geq 0}$ en fonction de $(C_t)_{t \geq 0}$ et $(M_t)_{t \geq 0}$.

3) Posons $F(t) = Z_t \exp\left(-M_t + \frac{1}{2}\langle M \rangle_t\right)$.

a) Montrer que, pour tout $t \geq 0$:

$$F(t) = (x - y) + \int_0^t \exp\left(-M_s + \tfrac{1}{2}\langle M \rangle_s\right) \cdot \left(b_1(Y_s + Z_s) - b_2(Y_s)\right) ds$$

b) Démontrer que p.s., on a, pour tout $t > 0$: $F(t) < 0$

En déduire que $P\{\forall t > 0 : X_t < Y_t\} = 1$.

Indication : étudier le signe de $F'(t)$ sur $\{t \geq 0 : F(t) = 0\}$.

II) On considère le système contrôlé donné par :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} dX_t = \sigma U_t \, dB_t + b U_t \, dt \\ X_s = x \quad , \quad t \geq s \geq 0 \end{cases}$$

où (B_t) est un mouvement brownien réel, $(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, σ et b sont des constantes réelles non nulles, le contrôle $U = (U_t)$ est un processus mesurable, adapté à valeurs $\mathbb{R}$, tel que $\sup_{t \geq 0} E\{U_t^2\} < \infty$.

On désignera par $\mathcal{A}$ l'ensemble des contrôles vérifiant les propriétés précédentes.

La fonction de coût J est donnée par :

$$J((s,x),u) = E\left\{ \int_s^{+\infty} e^{-\rho t} \cdot (X_t)^2 \, dt \right\}$$

où $\rho > 0$ est une constante, $(X_t)_{t \geq s} = \left(X_t^{(s,x),u}\right)_{t \geq s}$ étant solution de $(\mathcal{S})$.

On notera $V = \left(V(s,x)\right)_{(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}$ la fonction de valeur : $V(s,x) = \inf\{ J((s,x),u), u \in \mathcal{A} \}$.

1) Ecrire l'équation de H.J.B. associée au problème précédent et montrer que cette équation admet une solution de la forme $W(s,x) = f(s) \cdot x^2$ où f est une fonction que l'on déterminera.

2) Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{A}$ et tout $(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a : $\lim_{t \to +\infty} E\{ W(t, X_t^{(s,x),u}) \} = 0$

En déduire que $W(s,x) = V(s,x)$, pour tout $(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et déterminer un contrôle optimal markovien U^* ; vérifier que $U^* \in \mathcal{A}$!

II) (suite)

3) Soit $(X_t^*)_{t \geq s}$ l'évolution du système $(\mathcal{S})$ associée au contrôle optimal $U^* = (U_t^*)_{t \geq s}$

Calculer X_t^* $(t \geq s)$ et retrouver directement le fait que $J((s,x), U^*) = W(s,x)$.

Que peut-on dire du comportement de (X_t^*), quand $t \longrightarrow +\infty$?

Université de Paris-Dauphine — DEA MASE . Calcul Stochastique

UFR MD . Année 2003-2004 — Examen du 11 Décembre 2003 .

I) Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel, issu de zéro.

Pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, posons :

$$\Phi_t(x) = P\{\exists\, s \in]0,t[: B_s + x = 0\}$$

1) Montrer que $\Phi_t(x) = \Phi_t(-x)$ et que $\Phi_t(0) = 1$

On se propose de calculer $\Phi_t(-x)$, si $x > 0$

2) Soit $T_x = \inf\{s > 0 : B_s = x\}$.

Montrer que T_x est un temps d'arrêt p.s. fini

et que $\Phi_t(-x) = P\{T_x < t\}$

3) En utilisant la propriété de Markov forte, montrer que, si $x > 0$:

$$P\{T_x < t,\ B_t \leq x\} = P\{T_x < t,\ B_t \geq x\} = P\{B_t > x\}$$

4) En déduire que :

$$\Phi_t(-x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_{|x|}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

5) Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $0 < a < b$.

Posons $p = P\{\exists\, s \in]a,b[: B_s = 0\}$

Démontrer, en utilisant la propriété de Markov simple, que

$$p = E\{\Phi_{b-a}(B_a)\}$$

Indication : Remarquer que $p = P\{\exists\, s \in]0, b-a[: B_{s+a} = 0\}$

En déduire que $p = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arcos}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$ (*)

6) Soit $q = P\{\forall\, s \in]a,b[: B_s \neq 0\}$.

Montrer que $q = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

7) Soient $t > 0$, $\gamma_t = \inf\{s > t : B_s = 0\}$ et $\delta_t = \sup\{s < t : B_s = 0\}$.

Calculer, pour tout couple (x,y) tel que $0 < y < t < x$:

$P\{\gamma_t \geq x\}$, $P\{\delta_t \leq y\}$ et $P\{\gamma_t \geq x,\ \delta_t \leq y\}$.

II) Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel, issu de zéro.

Pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, soit $(X_t^x)_{t\geq 0}$ le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ défini par $X_t^x = \begin{pmatrix} M_t \\ N_t \end{pmatrix}$ où

$$\begin{cases} M_t = \left\{ \left(\frac{1}{p\sqrt{2}} + x_1\right) \cos(pB_t) + \left(\frac{1}{p\sqrt{2}} - x_2\right) \sin(pB_t) \right\} \exp\left(\frac{1}{2}p^2 t\right) - \frac{1}{p\sqrt{2}} \\ N_t = \left\{ \left(\frac{1}{p\sqrt{2}} + x_1\right) \sin(pB_t) + \left(-\frac{1}{p\sqrt{2}} + x_2\right) \cos(pB_t) \right\} \exp\left(\frac{1}{2}p^2 t\right) + \frac{1}{p\sqrt{2}} \end{cases}$$

p étant un paramètre réel non nul.

1) Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ sont des $\mathcal{F}_t$-martingales et que $(X_t^x)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov, solution d'une équation différentielle stochastique dont on identifiera les coefficients. Déterminer le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ de $(X_t^x)_{t\geq 0}$.

2) Soient f et V deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $H_t = f(X_t^x) \exp\left(\int_0^t V(X_s^x)\,ds\right)$, $(t \in \mathbb{R}_+)$

Montrer que la v.a.r. $|H_t|$ est bornée par une constante $C_t > 0$.

Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, posons $\psi(t,x) = E\left\{ f(X_t^x) \exp\left(\int_0^t V(X_s^x)\,ds\right)\right\}$.

Montrer que la fonction $\Psi = (\psi(t,x))$ est une solution forte, de classe $\mathcal{C}^1$ en t et $\mathcal{C}^\infty$ en x, d'une E.D.P. que l'on précisera.

3) Soit $T > 0$. Démontrer qu'il existe un unique couple (α, Φ) où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\Phi = (\Phi_s)_{s\in[0,T]}$ est un processus continu borné à valeurs réelles, $\mathcal{F}_t$ adapté, vérifiant :

$$H_T = \alpha + \int_0^T \Phi_s\, dB_s \quad \text{p.s.}$$

avec : $H_T = f(X_T^x) \exp\left(\int_0^T V(X_s^x)\,ds\right)$.

Déterminer α et Φ en fonction de ψ.

4) Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $Y_t^x = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} B_t \\ B_t \end{pmatrix}$, $(t \geq 0)$

Démontrer que, pour tout $T > 0$:

$$\lim_{\substack{p\to 0 \\ p\neq 0}} E\left\{ \sup_{t\in[0,T]} |X_t^x - Y_t^x|^2 \right\} = 0$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

Indication :

I) question 5).

(*) On pourra vérifier, par un changement de variables en coordonnées polaires, que, si $0 < a < b$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2(b-a)}\right) 1_{(0<x<y)}\, dx\, dy$$

$$= \sqrt{a(b-a)}\left[\pi/2 - \mathrm{Arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{b-a}}\right)\right]$$

et que $\mathrm{Arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{b-a}}\right) = \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

Université de Paris Dauphine. DEA MASE. Calcul Stochastique.

DFR MD. Année 2004-2005. Examen du 15 Décembre 2004

I) Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel, issu de zéro, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Considérons l'équation différentielle stochastique :

$$(*) \quad X_t^x = x + \sigma B_t - \beta \cdot \int_0^t X_s^x \, ds \,, \quad t \geq 0 \,,$$

où $x \in \mathbb{R}$, σ et β sont des paramètres réels non nuls, $\beta > 0$.

1) Montrer que l'E.D.S. $(*)$ admet une solution unique donnée par :

$$X_t^x = \exp(-\beta t) \left[x + \sigma \cdot \int_0^t \exp(\beta s) \cdot dB_s \right] \quad p.s., \quad t \geq 0.$$

2) a) Déterminer la loi de X_t^x ainsi que sa fonction caractéristique.

b) Montrer que $(X_t^x)_{t \geq 0}$ converge en loi, quand $t \to \infty$, vers une limite μ à préciser.

c) Soit f une application mesurable et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; démontrer que, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} E\{ f(X_t^x) \} \, \mu(dx).$$

3) Etudier la limite de X_t^x, dans L^2, lorsque le paramètre β, figurant dans l'équation $(*)$, tend vers l'infini.

4) Soit $T > 0$. On se propose de démontrer que :

$$(\mathcal{P}) \quad \sup_{t \in [0,T]} \left| X_t^x - x \exp(-\beta t) \right| = \sup_{t \in [0,T]} |\sigma| \cdot e^{-\beta t} \left| \int_0^t e^{\beta s} \, dB_s \right| \xrightarrow[\beta \to \infty]{} 0 \quad p.s.$$

Soit Φ l'application de $W = \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})_t$ dans lui-même définie par :

$$(**) \quad \Phi(w)(t) = x e^{-\beta t} + \sigma W(t) - \beta \sigma \int_0^t e^{\beta(s-t)} W(s) \, ds \,, \quad t \in [0,T]$$

où $W = (W(t))_{t \in [0,T]}$ appartient à W.

a) Démontrer que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\Phi(B(\omega))(t) = X_t^x(\omega) \,, \quad t \in [0,T]$$

où $B(\omega) = (B_t(\omega))_{t \in [0,T]}$ désigne la trajectoire en ω du mouvement brownien B sur $[0,T]$

I) 4) (suite)

b) Démontrer que l'application Φ est lipschitzienne sur l'espace de Banach $W = \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$: il existe $C \in \mathbb{R}_+$ telle que :

pour tous w et $\tilde{w}$ dans W, on a : $\| \Phi(w) - \Phi(\tilde{w}) \|_T \leqslant C . \| w - \tilde{w} \|_T$

où $\| w \|_T = \sup_{t \in [0,T]} |w(t)|$.

c) Démontrer que si $w = (w(t))_{t \in [0,T]}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T]$, $w(0) = 0$, alors $\sup_{t \in [0,T]} | \Phi(w)(t) - x \exp(-\beta t) | \leqslant \frac{|\sigma|}{\beta} . \sup_{t \in [0,T]} |\dot{w}_t|$

où $\dot{w}$ désigne la dérivée de w.

d) Démontrer la propriété $(\mathcal{P})$ en utilisant les questions a), b) et c).

II) Soit $B = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)})_{t \geqslant 0}$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, issu de zéro, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Soit ε la variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, +1\}$, donnée par :

$$\varepsilon(\omega) = \operatorname{sgn}(B_1^{(1)}(\omega)) . \operatorname{sgn}(B_1^{(2)}(\omega)) . \operatorname{Sgn}(B_1^{(3)}(\omega)) \quad \text{p.s.}$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn}(x) = +1$ si $x \geqslant 0$ et $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$.

Quelle est la loi de ε ? Démontrer que ε est indépendante de chacun des couples de processus $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})_{t \geqslant 0}$, $(B_t^{(1)}, B_t^{(3)})_{t \geqslant 0}$ et $(B_t^{(2)}, B_t^{(3)})_{t \geqslant 0}$.

2) On considère le processus $C = (C_t^{(1)}, C_t^{(2)}, C_t^{(3)})_{t \geqslant 0}$ donné par :

$$C_t^{(1)}(\omega) = \varepsilon(\omega) . B_t^{(1)}(\omega), \quad C_t^{(2)}(\omega) = B_t^{(2)}(\omega), \quad C_t^{(3)}(\omega) = B_t^{(3)}(\omega) \quad \text{p.s.}$$

Démontrer que chacun des couples de processus :

$(C_t^{(1)}, C_t^{(2)})_{t \geqslant 0}$, $(C_t^{(1)}, C_t^{(3)})_{t \geqslant 0}$, $(C_t^{(2)}, C_t^{(3)})_{t \geqslant 0}$

est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$,

mais que $C = (C_t^{(1)}, C_t^{(2)}, C_t^{(3)})_{t \geqslant 0}$ n'est pas un mouvement brownien.

3) Comment concilier le résultat précédent (question 2)) avec le Théorème de P. Lévy donnant une caractérisation du mouvement brownien au moyen des "crochets" $\langle C^{(l)}, C^{(k)} \rangle$, $l, k \in \{1, 2, 3\}$?

III) Soient $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien réel, issu de zéro et f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non identiquement nulle.

1) Soient a et $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On définit, par récurrence, les temps d'arrêts :

$$T_1 = \inf \{ t \geq 0 : B_t = a \}$$
$$T_2 = \inf \{ t \geq T_1 : B_t = b \}$$
$$\vdots$$
$$T_{2k+1} = \inf \{ t \geq T_{2k} : B_t = a \}$$
$$T_{2k+2} = \inf \{ t \geq T_{2k+1} : B_t = b \}$$
$$\vdots$$

avec la convention $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Montrer que ces temps d'arrêts sont finis presque-sûrement.

2) Soit $Z_k = \int_{T_{2k+1}}^{T_{2k+2}} f^2(B_s)\, ds$, $k \in \mathbb{N}$

Montrer, en utilisant la propriété de Markov forte, que les v.a. $(Z_k, k \in \mathbb{N})$ sont indépendantes, de même loi et en déduire que $\int_0^{+\infty} f^2(B_s)\, ds = +\infty$ p.s.

3) Soit $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ un autre $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien <u>indépendant</u> de $B = (B_t)_{t \geq 0}$.

Soit $H_t = \dfrac{1}{\int_0^t f^2(B_s)\, ds} \cdot \int_0^t f(B_s)\, d\tilde{B}_s \cdot 1_{\left\{ \int_0^t f^2(B_s)\, ds > 0 \right\}}$ p.s.

a) Quelle est la loi conditionnelle de la v.a. H_t sachant B ?

b) Montrer que (H_t) tend vers zéro en probabilité, quand $t \longrightarrow +\infty$.

Université de Paris-Dauphine. Master 2. Spécialités MASEF, EDP, TSI

DFR MD. Année 2005-2006. Calcul Stochastique. Examen du 7/12/2005.

P_1) Soit $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel, issu de zéro, défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.

I) 1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{G}$ des nombres réels α tels que le processus $\int_0^t |B_s|^{-\alpha} \cdot 1_{(B_s \neq 0)} \, dB_s$, $(t \geqslant 0)$, soit une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable.

2) Soit $\alpha \in \mathcal{G}$. Posons $M_\alpha(t) = \int_0^t |B_s|^{-\alpha} \cdot 1_{(B_s \neq 0)} \, dB_s$, $(t \geqslant 0)$.

a) Montrer qu'il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que : pour tout $t \geqslant 0$, $E\{ \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |M_\alpha(s)|^2 \} \leqslant C_\alpha \cdot t^{1-\alpha}$

b) En déduire que : pour tout $\beta > 1 - \alpha/2$, $\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \frac{|M_\alpha(s)|}{t^\beta} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ p.s.

II) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit les temps d'arrêts :

$T_a = \inf\{ t \geqslant 0 : B_t = a \}$ et $\tilde{T}_a = \inf\{ t \geqslant 0 : |B_t| = |a| \}$

avec la convention $\inf \phi = +\infty$.

1) En considérant la martingale $(B_t^2 - t)_{t \geqslant 0}$, montrer que $\tilde{T}_a$ est intégrable et calculer $E\{\tilde{T}_a\}$.

2) Montrer que, si $a \neq 0$, T_a n'est pas intégrable mais que $T_a < \infty$ p.s. (raisonner par l'absurde et utiliser le fait que $a = E\{B_{T_a}\}$).

3) Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, calculer, en discutant suivant les valeurs de a et b : $E\{ \mathrm{Min}(T_a, T_b) \}$

III) Pour tout $a > 0$, on définit

$\sigma_a = \inf\{ t \geqslant 0 : B_t < t - a \}$, $\quad \mathrm{Inf}\, \phi = +\infty$.

III) (suite)

1) Montrer que σ_a est un temps d'arrêt p.s. fini et que $\lim_{a \nearrow +\infty} \sigma_a = +\infty$ p.s.

2) i) Pour tout $\lambda > 0$, vérifier que le processus
$$N_t = \exp\left\{ -\left(\sqrt{1+2\lambda} - 1\right)(B_t - t) - \lambda t \right\}, \quad (t \geq 0)$$
est une $\mathcal{F}_t$ - martingale.

ii) En considérant la martingale $\left(N_{t \wedge \sigma_a}\right)_{t \geq 0}$, montrer que
$$E\left\{ \exp\left(-\lambda \sigma_a\right) \right\} = \exp\left(-a\left(\sqrt{1+2\lambda} - 1\right)\right), \quad (\lambda > 0)$$
En déduire le calcul de $E\{\sigma_a\}$.

3) Pour $a > 0$ et $b > 0$, on définit maintenant :
$$\sigma_{a,b} = \inf\left\{ t \geq 0 : B_t < bt - a \right\}, \quad \text{Inf } \phi = +\infty ;$$
en particulier $\sigma_a = \sigma_{a,1}$.
Montrer, en utilisant les propriétés d'invariance d'échelle du mouvement brownien, que les v.a. $\sigma_{a,b}$ et $b^{-2}\sigma_{ab,1}$ ont même loi. En déduire le calcul de $E\{\sigma_{a,b}\}$ et de $E\left\{\exp\left(-\lambda \sigma_{a,b}\right)\right\}$, $(\lambda > 0)$.

P2) Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N}^*)$, issu de zéro et soient σ et b deux applications lipschitziennes, définies sur $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement.
On suppose qu'il existe un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^n$ tel que :

(*) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle a(x)\theta, \theta \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$

où $a(x) = \sigma(x)\,\sigma^*(x)$, $\sigma^*(x)$ étant la matrice transposée de $\sigma(x)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ désigne le produit scalaire habituel dans $\mathbb{R}^n$:
$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell y_\ell \quad \text{si} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

P_2) (suite).

Soit $(X_t)_{t \geqslant 0}$ la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s + \int_0^t b(X_s)\, ds \,, \quad (t \geqslant 0)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est fixé.

On se propose de montrer que, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$: $P\{\exists t \geqslant 0 : X_t \notin K\} = 1$

Soient $L > |x|$ et $T_L = \inf\{t \geqslant 0 : |X_t| \geqslant L\}$, $\inf \phi = +\infty$.

1) Développer à l'aide de la formule d'Itô, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, l'expression

$$E\{\exp(\lambda \langle \theta, X_{t \wedge T_L} \rangle_{\mathbb{R}^n})\}$$

2) En déduire, par un choix judicieux de λ et en utilisant l'hypothèse (*), qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

pour tout $t \geqslant 0$, $E\{t \wedge T_L\} \leqslant C$.

Conclure.

Université de Paris-Dauphine. Master 2. Spécialités MASEF, EDP, TSI.

DFR MD. Année 2006-2007. Calcul Stochastique

Examen du 18/12/2006.

I) Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel, issu de zéro, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Soient σ et b deux applications lipschitziennes et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose, de plus, qu'il existe deux constantes α et β telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 < \alpha \leq \sigma(x) \leq \beta < \infty$ et que σ est de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées.

On cherche une méthode de résolution de l'E.D.S. :

$$(*) \quad X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s + \int_0^t b(X_s)\, ds \,, \quad (t \geq 0)$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) Soit ψ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donnée par :

$$\psi(y) = \int_{x_0}^{y} \frac{1}{\sigma(z)}\, dz \,, \quad (y \in \mathbb{R})$$

a) Vérifier que ψ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On notera $\varphi = \psi^{-1}$ la bijection réciproque.

b) Montrer que φ est solution de l'équation différentielle ordinaire $\varphi' = \sigma \circ \varphi$; $\varphi(0) = x_0$

2) Posons, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\hat{b}(y) = \left[b(y) - \frac{1}{2}\, \sigma'(y)\, \sigma(y) \right] \cdot \frac{1}{\sigma(y)}$$

Montrer que $\hat{b}$ est une application lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en déduire que l'E.D.S.

$$(**) \quad \xi_t = B_t + \int_0^t \hat{b}\left(\varphi(\xi_s)\right) ds \,, \quad (t \geq 0)$$

admet une unique solution $(\xi_t)_{t \geq 0}$.

I) (suite)

3) Posons $X_t = \varphi(\xi_t)$.

Montrer que le processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ est solution de l'E.D.S. (*).

4) Les applications σ et b vérifiant les conditions énoncées au début de l'exercice, soit $\tilde{b}$ une troisième application lipschitzienne et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $b(x) < \tilde{b}(x)$.

Soient $(X_t)_{t \geqslant 0}$ la solution de l'E.D.S. (*) et $(\tilde{X}_t)_{t \geqslant 0}$ la solution de l'E.D.S. $(\tilde{*})$:

$$(\tilde{*}) \qquad \tilde{X}_t = x_0 + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_s)\, dB_s + \int_0^t \tilde{b}(\tilde{X}_s)\, ds, \quad (t \geqslant 0)$$

Démontrer, en utilisant les résultats précédents, que

$$P\{\forall t \geqslant 0,\ X_t < \tilde{X}_t\} = 1.$$

II) Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}, P)$ soient $(B_t)_{t \geqslant 0}$ et $(\tilde{B}_t)_{t \geqslant 0}$ deux $\mathcal{F}_t$-mouvements browniens réels indépendants, issus de zéro.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on considère :

$$S_t = \int_0^t B_s\, d\tilde{B}_s - \int_0^t \tilde{B}_s\, dB_s \quad \text{et} \quad R_t = (B_t)^2 + (\tilde{B}_t)^2.$$

1) Montrer que les v.a. S_t et $-S_t$ ont même loi ; en déduire que la fonction caractéristique φ_{S_t} de S_t est donnée, pour tout $u \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi_{S_t}(u) = E\{\exp(iuS_t)\} = E\{\cos(uS_t)\}$$

On se propose de calculer $\varphi_{S_t}(u)$.

2) Soient λ et μ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

II) 2) (suite).

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$X_t = \cos(u S_t) \cdot \exp\left(-\frac{d_t}{2} R_t + \mu_t\right)$$

a) Montrer que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-semi-martingale continue ; décomposer $(X_t)_{t \geq 0}$ en ses parties « martingale locale continue » et « processus à variations finies continu ».

b) En déduire que, si les applications d et μ vérifient un système $(\mathcal{G})$ d'équations différentielles que l'on précisera, le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale locale continue.

3) Soit $T > 0$ fixé. Vérifier que les applications d et μ de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$, données par :

$$d_t = u \operatorname{th}(u(T-t)) \; ; \; \mu_t = -\operatorname{Log}\left[\operatorname{Ch}(u(T-t))\right], \quad t \in [0, T]$$

sont solutions du système d'équations différentielles $(\mathcal{G})$

[On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{Sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{Sh}(x)}{\operatorname{Ch}(x)} \;]$$

4) Les applications d et μ étant définies comme en 3), montrer que le processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable.

En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi_{S_t}(u) = E\left\{\cos(u S_t)\right\} = \frac{1}{\operatorname{Ch}(ut)}$$

III) Soit $B = (B_1(t), B_2(t), B_3(t))_{t \geq 0}$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^3$ issu de $(1, 0, 0)$.

Pour tout $t \geq 0$, on considère la matrice symétrique M_t donnée par :

$$M_t = \begin{pmatrix} 2B_1(t) & \sqrt{2}\, B_3(t) \\ \sqrt{2}\, B_3(t) & 2B_2(t) \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$: $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t)$.

1) Montrer que le processus

$$\tilde{B} = (\tilde{B}_1(t), \tilde{B}_2(t), \tilde{B}_3(t))_{t \geq 0}$$

où $\tilde{B}_1(t) = \dfrac{B_1(t) + B_2(t)}{\sqrt{2}}$, $\tilde{B}_2(t) = \dfrac{B_1(t) - B_2(t)}{\sqrt{2}}$, $\tilde{B}_3(t) = B_3(t)$

est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$.

Exprimer $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ en fonction de $\tilde{B}$.

2) On admettra que :

(*) $P\{\forall t \geq 0 : (\tilde{B}_2(t))^2 + (\tilde{B}_3(t))^2 > 0\} = 1$

Démontrer qu'il existe un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^2$ $C = (C_1(t), C_2(t))_{t \geq 0}$ issu de zéro, tel que le couple $(\lambda_1(t), \lambda_2(t))_{t \geq 0}$ soit solution de l'E.D.S.

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = \alpha\, C_1(t) + \beta \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}\, ds \\ \lambda_2(t) = 2 + \gamma\, C_2(t) + \delta \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}\, ds \end{cases}$$

où les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont à déterminer.

Remarque : Vérifier, d'abord, que la propriété (*) entraîne que $P\{\forall t \geq 0 \quad \lambda_2(t) > \lambda_1(t)\} = 1$.

Université de Paris-Dauphine Master 2 Spécialités M.A.S.E.F, E.D.P.A., T.S.I.
Département M.I.D.O. Année 2007-2008. Calcul Stochastique.

Examen du 10 Décembre 2007

I) Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale continue, issue de zéro.

1) On suppose qu'il existe une application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continue, strictement croissante, déterministe, nulle en zéro, telle que, p.s. pour tout $t \geq 0$: $\langle M \rangle_t = f(t)$

Démontrer que $(M_t)_{t \geq 0}$ est, à la fois, une martingale de carré intégrable centrée et un processus gaussien ; déterminer, pour toute suite finie $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, la loi du vecteur aléatoire $(M_{t_1}, M_{t_2} - M_{t_1}, \ldots, M_{t_n} - M_{t_{n-1}})$.

2) Réciproquement, on suppose que $(M_t)_{t \geq 0}$ est, à la fois, une martingale continue centrée et un processus gaussien.
Démontrer que le processus $(\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ est déterministe i.e. que p.s. pour tout $t \geq 0$: $\langle M \rangle_t = E\{\langle M \rangle_t\} < \infty$

Indication : Vérifier que, pour tous $0 \leq s < t$, $M_t - M_s$ est indépendante de $\mathcal{G}_s$ où $\mathcal{G}_s = \sigma\{M_u, u \leq s\}$

3) Soit $N = (N_t)_{t \geq 0}$ une autre martingale locale continue, issue de zéro, telle que, p.s. pour tout $t \geq 0$: $\langle M \rangle_t = \langle N \rangle_t$.
Peut-on en déduire que les processus continus $(M_t)_{t \geq 0}$ et $(N_t)_{t \geq 0}$ ont même loi ?
Trouver, éventuellement, un contre exemple.
Justifier votre réponse.

II) Soient $B = (B_t)_{t \geq 0}$ et $W = (W_t)_{t \geq 0}$ deux mouvements browniens réels indépendants, issus de zéro.

1) Montrer que l'E.D.S. :

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s \, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t X_s \, ds \quad , \quad (t \geq 0)$$

admet une unique solution $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ que l'on calculera explicitement.

En déduire que $\overline{\lim_{t \to +\infty}} X_t = +\infty$ p.s. et $\underline{\lim_{t \to +\infty}} X_t = 0$ p.s.

2) Soit $Y_t = \int_0^t X_s \, dW_s \quad , \quad (t \geq 0)$

Démontrer que le processus à deux composantes :

$$Z_t = (X_t, Y_t) \quad , \quad (t \geq 0)$$

est un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, solution d'une E.D.S., dont on déterminera le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$.

3) Posons $|Z_t| = \left(X_t^2 + Y_t^2\right)^{1/2} \quad , \quad (t \geq 0)$.

Démontrer que le processus $\left(\frac{1}{|Z_t|}\right)_{t \geq 0}$ est une semi-martingale continue dont on précisera la décomposition canonique.

4) En déduire que $\lim_{t \to +\infty} |Z_t| = +\infty$ p.s.

Remarque : On admettra le fait que toute martingale locale continue positive $(N_t)_{t \geq 0}$ converge p.s., quand $t \longrightarrow +\infty$, vers une limite finie.

III) Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de zéro. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère la solution $(X_t^x)_{t \geq 0}$ de l'E.D.S. :

$$X_t^x = x + \int_0^t \sigma(X_s^x)\, dB_s + \int_0^t b(X_s^x)\, ds \quad , \quad (t \geq 0)$$

où σ et b sont deux applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On supposera, de plus, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sigma^2(x) = a(x) > 0$.

On posera, pour tous x et y dans $\mathbb{R}$:

(*) $\tau(x,y) = \inf\{t \geq 0 : X_t^x = y\}$, avec la convention $\inf(\emptyset) = +\infty$

et, pour tout intervalle borné $[y,z]$ de $\mathbb{R}$:

(**) $\tau_{(y,z)}(x) = \inf\{t \geq 0 , X_t^x \notin]y,z[\}$

(1) On suppose d'abord que $b \equiv 0$ et que $x \in]y,z[$.

1) Montrer que, pour toute application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact, on a :

$$E\{\varphi(X^x_{t \wedge \tau^x})\} - \varphi(x) = \frac{1}{2} E\left\{\int_0^{t \wedge \tau^x} a\varphi''(X_s^x)\, ds\right\} , \quad (t \geq 0)$$

où $\tau^x = \tau_{(y,z)}(x)$ est donné par (**).

2) En déduire, par un choix judicieux de φ, que

$$P\{\tau^x < \infty\} = 1$$

3) Si φ est obtenue en résolvant une équation différentielle bien choisie, montrer, plus précisément, que $E\{\tau^x\} < \infty$ et calculer cette espérance.

4) Calculer $P\{X^x_{\tau^x} = y\}$ et $P\{X^x_{\tau^x} = z\}$.

5) En déduire que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$P\{\tau(x,y) < \infty\} = 1$$

III) ① , (suite)

6) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P\left\{ \lim_{t \to \infty} X_t^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \infty} X_t^x = -\infty \right\} = 1 .$$

② On suppose b "quelconque"

Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ strictement croissante.

On pose $Y_t(x) = F(X_t^x)$, $(t \geq 0)$

1) Montrer que le processus $\left(Y_t(x)\right)_{t \geq 0}$ est solution d'une E.D.S. de la forme :

$$Y_t(x) = Y_0(x) + \int_0^t \bar{\sigma}\left(Y_s(x)\right) dB_s + \int_0^t \bar{b}\left(Y_s(x)\right) ds , \quad (t \geq 0).$$

Calculer $\bar{\sigma}$ et $\bar{b}$ en fonction de σ, b, F et F^{-1}.

2) Montrer qu'on peut choisir F telle que :

$F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ et $\bar{b} \equiv 0$.

3) Soient $y < x < z$ et $\tau^x = \tau_{(y,z)}(x)$, donné par (**).

Montrer que $P\left\{\tau^x < \infty\right\} = 1$ et calculer $P\left\{X_{\tau^x}^x = y\right\}$, $P\left\{X_{\tau^x}^x = z\right\}$.

4) Etudier le comportement asymptotique de X_t^x, lorsque $t \to +\infty$ (on distinguera différents cas ; cf. la Remarque à la fin de l'exercice II)).

Université de Paris - Dauphine . M2. Spécialités MASEF, EDPA, TSI

Département MIDO . Année 2008 - 2009 . Calcul Stochastique

Examen de Décembre 2008

I) Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien réel, issu de zéro.

1) Montrer que, p.s., pour tout $t \geq 0$: $\int_0^t \frac{|B_u|}{u}\, du < \infty$

2) Posons, p.s., pour tout $t \geq 0$: $Y_t = \int_0^t \frac{B_u}{u}\, du$

Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien centré ; calculer, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$: $E\{Y_t \cdot Y_s\}$

3) Soit $Z_t = B_t - Y_t$, $(t \geq 0)$

Montrer que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien

Quelle est la loi conditionnelle de Y_t sachant Z_t ? $(t > 0)$.

4) Calculer, pour tous $0 < s < t$: $E\{Z_t / \mathcal{F}_s\}$.

Le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est-il un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien ?

5) Soient $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq t$, $(n \in \mathbb{N}^*)$

Posons $W = (Z_{s_1}, Z_{s_2}, \dots, Z_{s_n})$

Montrer que les v.a. B_t et W sont indépendantes

Les processus $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(Z_t)_{t\geq 0}$ sont-ils indépendants ?

Justifier votre réponse.

II) Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, soit $(B_t)_{t\geq 0} = (B_1(t), B_2(t))_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^2$, issu de zéro.

On admettra la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

$(\mathcal{P})$ pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $\mathbb{P}\{\exists\, t \geq 0 \;\; B_t = x\} = 0$

II) (suite)

1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : Ch(2x_2) + \cos(2x_1) = 0 \right\}$

et en déduire que : $P\left\{ \exists\, t \geqslant 0 : B_t \in \mathcal{C} \right\} = 0$

N.B. On rappelle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$Ch(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad Sh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

2) Soit $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$. On définit deux applications φ et ψ de l'ouvert $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, en posant, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}$:

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{\sin(2x_1)}{Ch(2x_2) + \cos(2x_1)} \quad \text{et} \quad \psi(x_1, x_2) = \frac{Sh(2x_2)}{Ch(2x_2) + \cos(2x_1)}$$

a) Vérifier les relations suivantes, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \psi(x_1, x_2) = 1 + (\varphi^2 - \psi^2)(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \varphi(x_1, x_2) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \psi(x_1, x_2) = -2\, \varphi.\psi(x_1, x_2)$$

b) Posons, pour tout $t \geqslant 0$:

$$X_1(t) = \varphi\left(B_1(t), B_2(t)\right) \; ; \; X_2(t) = \psi\left(B_1(t), B_2(t)\right)$$

et $X_3(t) = X_1(t).\, X_2(t)$

Démontrer que les processus $\left(X_1(t)\right)_{t \geqslant 0}$ et $\left(X_2(t)\right)_{t \geqslant 0}$ sont des $\mathcal{F}_t$ - martingales locales continues.

Calculer les « crochets » $\left(\langle X_1 \rangle(t)\right)_{t \geqslant 0}$, $\left(\langle X_2 \rangle(t)\right)_{t \geqslant 0}$ et $\left(\langle X_1, X_2 \rangle(t)\right)_{t \geqslant 0}$.

Le processus $\left(X_3(t)\right)_{t \geqslant 0}$ est-il une $\mathcal{F}_t$ - martingale locale ?

c) Soit $X(t) = \left(X_1(t), X_2(t)\right)$, $(t \geqslant 0)$.

Montrer que le processus $\left(X(t)\right)_{t \geqslant 0}$ est un processus de Markov à valeurs $\mathbb{R}^2$, solution d'une équation différentielle stochastique, dont on déterminera le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$.

II) (suite)

2) d) Soit $R_t = \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \varphi \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \varphi \right)^2 \right] (B_1(t), B_2(t)) \right\}^{1/2}$, $(t \geq 0)$.

Montrer que, p.s., pour tout $t \geq 0$:

$$\int_0^t 1_{(R_s > 0)} \, ds = t$$

et que les intégrales stochastiques suivantes sont bien définies :

$$C_1(t) = \int_0^t \frac{1}{R_s} \cdot 1_{(R_s > 0)} \, dX_1(s) \; ; \; C_2(t) = \int_0^t \frac{1}{R_s} 1_{(R_s > 0)} \, dX_2(s)$$

Que peut-on dire du processus $(C_t)_{t \geq 0} = (C_1(t), C_2(t))_{t \geq 0}$?

Exprimer le processus $(X(t))_{t \geq 0}$ en fonction des processus $(C_t)_{t \geq 0}$ et $(R_t)_{t \geq 0}$.

III) Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel, issu de zéro.

Posons, pour tout $t \in [0,1[$, $Z_t = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(\frac{-B_t^2}{2(1-t)}\right)$

1) Calculer $E\{Z_t\}$ et $E\{Z_t^p\}$, pour tout $p \in]1, \infty[$

2) a) Montrer que $(Z_t)_{t\in[0,1[}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale exponentielle

b) Etudier la limite p.s. de Z_t, quand $t \xrightarrow[t<1]{} 1$

3) Pour tout $(s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, soit :

$$\Psi_s(\omega) = \frac{-B_s(\omega)}{(1-s)} \cdot Z_s(\omega) \cdot 1_{[0,1[}(s)$$

a) Montrer que l'intégrale stochastique suivante est bien définie p.s. pour tout $t \geq 0$: $X_t = 1 + \int_0^t \Psi_s \, dB_s$

b) Montrer que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale locale continue positive telle que :

pour tous $t \geq 0$ et $p \in [1, \infty[$, $E\{(X_t)^p\} < \infty$

mais que $(X_t)_{t\geq 0}$ n'est pas une $\mathcal{F}_t$-martingale.

Université de Paris-Dauphine - M_2 - Spécialités MASEF, EDPA, TSI

Département MIDO - Année 2009-2010 - Calcul Stochastique

Examen de Décembre 2009

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité filtré vérifiant les conditions habituelles.

Les exercices (I), (II), (III) et (IV) sont indépendants.

(I) Soit $(X_t)_{t\geq 0} = (X_t^1, \dots, X_t^d)_{t\geq 0}$ un processus continu, $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs $\mathbb{R}^d$, issu de zéro.

Démontrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien d-dimensionnel si et seulement si on a la propriété

(P) : pour toute application f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, le processus $(M_f(t))_{t\geq 0}$, donné par :

$$M_f(t) = f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(X_s)\,ds$$

où $\Delta f = \sum_{\ell=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} f$

est une $\mathcal{F}_t$-martingale locale continue.

(II) Soient $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel issu de zéro et $\varphi = (\varphi_t)_{t\geq 0}$ un processus progressivement mesurable à valeurs réelles tel que, pour tout $t \geq 0$, $E\left\{\int_0^t |\varphi_s|^2 ds\right\} < \infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère l'E.D.S

$$(\mathcal{E}) : X_t = x + \int_0^t \sqrt{1+(X_s)^2}\, dB_s + \int_0^t \left(\frac{1}{2}X_s + \varphi_s\sqrt{1+(X_s)^2}\right) ds, \quad (t \geq 0)$$

1) Montrer que l'E.D.S. $(\mathcal{E})$ admet une solution $(X_t)_{t\geq 0}$ unique à l'indistinguabilité près.

2) Soit ψ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donnée par

$$\psi(x) = \mathrm{Log}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que ψ est une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; déterminer ψ^{-1}.

(II) (suite)

3) Développer, grâce à la formule d'Itô, l'expression $\psi(X_t)$, $(t \geqslant 0)$.

4) En déduire le calcul explicite de la solution $(X_t)_{t \geqslant 0}$ de l'E.D.S $(\mathcal{Z})$

5) Etudier le comportement asymptotique de $(X_t)_{t \geqslant 0}$ lorsque $t \to \infty$, dans le cas où le processus $(\varphi_t)_{t \geqslant 0}$ est constant : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_t = c$, $(c \in \mathbb{R})$. (discuter suivant les valeurs de c)

(III) Soient $(B_t)_{t \geqslant 0}$ et $(W_t)_{t \geqslant 0}$ deux $\mathcal{F}_t$-mouvements browniens réels, issus de zéro.

On considère les semi-martingales continues, données par :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma_s \, dB_s + \int_0^t b_s \, ds \quad , \quad (t \geqslant 0)$$

$$Y_t = y_0 + \int_0^t f_s \, dW_s + \int_0^t g_s \, ds \quad , \quad (t \geqslant 0)$$

où $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x_0 \leqslant y_0$

$(\sigma_s)_{s \geqslant 0}$ et $(b_s)_{s \geqslant 0}$ sont deux processus progressivement mesurables à valeurs réelles,

f et g sont deux applications mesurables, déterministes, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes.

i) pour tout $s \geqslant 0$: $(\sigma_s(\cdot))^2 \leqslant (f_s)^2$ et $b_s(\cdot) \leqslant g_s$

ii) pour tout $t \geqslant 0$: $\int_0^t \{ (f_s)^2 + |g_s| + |b_s(\cdot)| \} \, ds < \infty$ p.s

On se propose de « comparer » les processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ et $(Y_t)_{t \geqslant 0}$

1) Soit $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, une suite finie de points de $\mathbb{R}_+^*$. Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(Y_{t_0}, Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$?

(III) (suite)

2) Soit $(\tilde{B}_t)_{t\geqslant 0}$ un troisième $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel issu de zéro, indépendant du mouvement brownien $(B_t)_{t\geqslant 0}$.

On considère les deux processus $(Y_t^{(1)})_{t\geqslant 0}$ et $(Y_t^{(2)})_{t\geqslant 0}$ donnés par :

$$Y_t^{(1)} = y_0 + \int_0^t g_s\,ds + \int_0^t \sigma_s\,dB_s + \int_0^t \sqrt{(g_s)^2 - (\sigma_s)^2}\,d\tilde{B}_s \quad , \quad (t\geqslant 0)$$

$$Y_t^{(2)} = y_0 + \int_0^t g_s\,ds + \int_0^t \sigma_s\,dB_s - \int_0^t \sqrt{(g_s)^2 - (\sigma_s)^2}\,d\tilde{B}_s \quad , \quad (t\geqslant 0)$$

① Démontrer que les processus $(Y_t^{(1)})_{t\geqslant 0}$ et $(Y_t^{(2)})_{t\geqslant 0}$ ont même loi que le processus $(Y_t)_{t\geqslant 0}$.

3) Démontrer que, pour tout $t\geqslant 0$:

$$X_t \leqslant \frac{1}{2}\left(Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}\right) \leqslant \operatorname{Max}\left\{Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}\right\}$$

En déduire que, pour tous $c>0$ et $t\geqslant 0$:

$$P\{X_t \geqslant c\} \leqslant 2\,P\{Y_t \geqslant c\}$$

et que, pour toute application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexe, croissante, positive, on a :

$$E\{\varphi(X_t)\} \leqslant E\{\varphi(Y_t)\} \quad , \quad (t\geqslant 0).$$

(IV) Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel, issu de zéro.

On considère, pour tous $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ et $\alpha>0$, les processus donnés par :

$$Y_t^{(\alpha)} = y - \alpha\int_0^t Y_s^{(\alpha)}\,ds + \alpha B_t \quad , \quad (t\geqslant 0)$$

$$X_t^{(\alpha)} = x + \int_0^t Y_s^{(\alpha)}\,ds \quad , \quad (t\geqslant 0)$$

$$X_t = x + B_t \quad , \quad (t\geqslant 0)$$

Soit $T>0$. On se propose de démontrer que

$$(P) : \lim_{\alpha\to+\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left|X_t - X_t^{(\alpha)}\right| = 0 \quad \text{p.s.}$$

(IV) (suite)

1) Démontrer que, pour tout $\alpha > 0$, le processus $\left(Y_t^{(\alpha)}\right)_{t \geq 0}$ est bien défini et que :

$$Y_t^{(\alpha)} = \exp(-\alpha t)\left\{\alpha \int_0^t \exp(\alpha s)\, dB_s + y\right\}$$

2) Démontrer que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \sup_{t \in [0,T]} \left| \exp(-\alpha t) \int_0^t \exp(\alpha s)\, dB_s \right| = 0 \quad \text{p.s.}$$

3) En déduire la propriété (P).

Université de Paris-Dauphine . M_2 . Spécialités M.A.S.E.F., E.D.P.A., T.S.I.

Département M.I.D.O. Année 2010-2011. Calcul Stochastique

Examen de Janvier 2011

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ désigne un espace de probabilités filtré vérifiant les conditions habituelles.

Les exercices (I), (II), (III) et (IV) sont indépendants

(I) Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel, issu de zéro et soient $0 \leq \rho < t$.

1) Montrer que :

$$E\left\{\left(\int_s^t B_u \cdot dB_u\right)^2 / \mathcal{F}_\rho\right\} = E\left\{\int_s^t B_u^2 \, du / \mathcal{F}_\rho\right\}$$

En déduire le calcul de :

$$E\left\{B_s^2 \cdot \left(\int_s^t B_u \, dB_u\right)^2\right\}$$

N.B. : On rappelle que si $\xi \sim N_1(0,1)$, alors $E\{\xi^4\} = 3$.

2) Calculer $Cov\left\{B_s, \int_s^t B_u \, dB_u\right\}$.

Les v.a. B_s et $\int_s^t B_u \, dB_u$ sont-elles indépendantes ?

(II) Soit $(B_t)_{t\geq 0} = (B_1(t), B_2(t))_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^2$, issu de zéro.

On considère la martingale locale continue définie p.s. par :

$$M_t = \int_0^t \exp\left(\left(B_2(s)\right)^2\right) dB_1(s), \quad (t \geq 0)$$

1) a) Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ n'est pas un élément de $\mathcal{M}_c^2$

(II) (suite)

N.B : $\mathcal{M}_c^2$ désigne l'espace des $\mathcal{F}_t$ - martingales continues de carré intégrable.

ii) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(M_t)_{t \in [0, \gamma[}$ appartienne à $\mathcal{M}_c^2$ et déterminer la borne supérieure des nombres γ vérifiant cette propriété.

2) Soit $\mathcal{B}^{(2)}$ la tribu engendrée par le mouvement brownien $B_2(\cdot)$: $\mathcal{B}^{(2)} = \sigma \{ B_2(s), s \geqslant 0 \}$

i) Calculer, pour tous $t \geqslant 0$ et $u \in \mathbb{R}$, l'espérance conditionnelle : $E \{ \exp(iu M_t) / \mathcal{B}^{(2)} \}$

ii) Que peut-on dire de la loi de la v.a. $\left[\int_0^t \exp\left(2 \cdot (B_2(s))^2\right) ds \right]^{-1/2} \cdot M_t$, où $t > 0$?

3) Soit $(X_t)_{t \geqslant 0}$ le processus à valeurs $\mathbb{R}^2$, donné par :

$$X_t = (B_2(t), M_t), \quad (t \geqslant 0).$$

Montrer que $(X_t)_{t \geqslant 0}$ vérifie la propriété de Markov.

(III) Soit $(B_t)_{t \geqslant 0}$ une $\mathcal{F}_t$ - semi-martingale continue réelle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $(B_n(t))_{t \geqslant 0}$ par la formule :

$$B_n(t, \omega) = B_{k/2^n}(\omega) + 2^n \left(t - \tfrac{k}{2^n}\right) \left[B_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - B_{k/2^n}(\omega) \right]$$

si $t \in \left[\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{k+1}{2^n} \right[$, $k \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$.

1) Vérifier que $(B_n(t))_{t \geqslant 0}$ est un processus continu à variations finies.

(III) (suite)

2) Montrer que, pour tout $T > 0$:

$$\sup_{t \in [0,T]} |B_n(t) - B_t| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad , \text{ p.s.}$$

3) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer que :

$$\int_0^t f(B_n(s)) \cdot dB_n(s) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{p.s.}} \int_0^t f(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f'(B_s) \, d\langle B \rangle_s$$

et que la convergence précédente a lieu p.s. uniformément pour tout $t \in [0, T]$, $(T \in \mathbb{R}_+^*)$.

(IV) Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien réel, issu de zéro

Pour tous $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, considérons le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^2$: $X_t = (X_1(t), X_2(t))$, $(t \geq 0)$, solution de l'E.D.S. :

$$(*) \begin{cases} X_1(t) = \alpha + \frac{1}{2} \int_0^t X_1(s) \, ds + c \cdot \int_0^t X_2(s) \, dB_s \\ X_2(t) = \beta + \frac{1}{2} \int_0^t X_2(s) \, ds + \frac{1}{c} \int_0^t X_1(s) \, dB_s \end{cases}$$

1) Montrer que la solution $(X_t)_{t \geq 0}$ de l'E.D.S. $(*)$ existe et qu'elle est unique ; vérifier que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov et calculer son générateur infinitésimal $\mathcal{L}$.

2) Développer, grâce à la formule d'Itô, le processus

$$Y_t = \left(\frac{X_1(t)}{c} \right)^2 - \left(X_2(t) \right)^2 \quad , \quad (t \geq 0)$$

3) En déduire que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 - \beta^2 \neq 0$,

(IV) 3) (suite)

le processus $X_t = (X_1(t), X_2(t))$, $(t \geq 0)$, prend ses valeurs dans une hyperbole de $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.

Que peut-on dire si $\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 - \beta^2 = 0$?

4) Soit $\Delta = \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 - \beta^2$.

a) Montrer que, si $\Delta > 0$ et $\alpha \geq 0$, la solution $(X_t)_{t \geq 0}$ de l'E.D.S. (*) est donnée par :

$$X_1(t) = c.\sqrt{\Delta}\ .\ Ch(B_t + \gamma)$$

$$X_2(t) = \sqrt{\Delta}\ .\ Sh(B_t + \gamma)$$

où la constante réelle γ est à déterminer.

(on rappelle que $Ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $Sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

b) Lorsque $\Delta = 0$, résoudre, de même, l'E.D.S. (*).

Université de Paris-Dauphine. M2 - spécialités MASEF, EDPA, TSI

Département MIDO. Année 2011-2012. Calcul Stochastique

Examen de Janvier 2012

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité filtré vérifiant les conditions habituelles.

1) Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel, issu de zéro

A_1) Posons, pour tout $t \geq 0$:

$$Y_t = \int_0^t s \, dB_s \quad \text{et} \quad X = \int_0^1 Y_u \, du$$

1) Que peut-on dire du processus $(Y_t)_{t \geq 0}$?

Calculer, pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$: $E\{Y_u Y_v\}$

2) Déterminer la loi du couple (Y_1, X) et calculer, pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espérance conditionnelle :

$$E\{\exp(i s Y_1) / X\}, \text{ où } i^2 = -1.$$

A_2) 1) Montrer que, pour tous $p \geq 0$ et $T \geq 0$: $E\left\{\int_0^T |B_s|^p ds\right\} < \infty$

2) Montrer qu'il existe des constantes réelles λ et μ telles que le processus $(B_t^4 + \lambda t B_t^2 + \mu t^2)_{t \geq 0}$ soit une $\mathcal{F}_t$-martingale locale. Est-ce une martingale ?

3) On fixe $a > 0$ et on définit $\tau = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq a\}$.

i) Montrer que, pour tout $t \geq 0$: $E\{B_{t \wedge \tau}^2\} = E\{t \wedge \tau\}$, en déduire que $E\{\tau\} < \infty$, puis calculer $E\{\tau\}$.

ii) Calculer $E\{\tau^2\}$ en utilisant la question 2)

4) Calculer, pour tout $\alpha > 0$, la transformée de Laplace :

$$\varphi(\alpha) = E\{\exp(-\alpha \tau)\}$$

II) Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien réel, issu de zéro et soient b, σ, c des paramètres réels strictement positifs.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, considérons l'E.D.S. :

$$(*)\quad X_t = x + \int_0^t \sigma X_s \, dB_s + \int_0^t b X_s (c - X_s)\, ds \,, \quad (t \geqslant 0) \quad \text{p.s.}$$

1) Démontrer que l'E.D.S (*) admet une unique solution donnée par la formule :

$$\text{p.s.}, \forall t \geqslant 0 : \quad X_t = \frac{\exp\left\{ (bc - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t \right\}}{x^{-1} + b \displaystyle\int_0^t \exp\left\{ (bc - \tfrac{1}{2}\sigma^2)s + \sigma B_s \right\} ds}$$

2) Les paramètres $\sigma > 0$ et $c > 0$ étant fixés, montrer qu'il existe $b_0 > 0$ tel que, pour tout $b \in]0, b_0[$ le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ converge, presque-sûrement, quand $t \longrightarrow +\infty$, vers une limite que l'on déterminera.

III) Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^3$, issu de zéro et soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, fixé.

Posons $T_x = \inf\{ t \geqslant 0 : B_t = x \}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$\sigma_n = \inf\left\{ t \geqslant 0 : |B_t - x| \leqslant \frac{1}{n} \right\}$, avec la convention $\inf\{\phi\} = +\infty$

$|\cdot|$ désigne la norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^3$

Soit $X_t = \dfrac{1}{|B_t - x|} \, 1_{\{|B_t - x| \neq 0\}}$, $(t \geqslant 0)$.

1) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$: $P\{ B_t = x \} = 0$.

2) Montrer que, p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sigma_n < \sigma_{n+1}$

et $\lim_{n \to +\infty} \sigma_n = T_x$

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le processus $\left(X_{t \wedge \sigma_n}\right)_{t \geqslant 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ - martingale continue bornée.

III) 3) (suite)

Indication : Considérer le processus $(\varphi(B_t))_{t \geqslant 0}$ où φ est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, bornée, telle que $\varphi(y) = \frac{1}{|y-x|}$ si $|y-x| \geqslant \frac{1}{n}$

4) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant 0$.

$$n\, P\{\sigma_n \leqslant t\} \leqslant \frac{1}{|x|}, \text{ si } n > \frac{1}{|x|}.$$

5) En déduire que $P\{\tau_x = +\infty\} = 1 = P\{\forall t \geqslant 0 : B_t \neq x\}$ et que le processus $(X_t)_{t \geqslant 0} = \left(\frac{1}{|B_t - x|}\right)_{t \geqslant 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale locale continue.

6) Soit $\alpha \in]0, 3[$. Montrer qu'il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que, pour tout $t > 0$:

$$E\left\{\frac{1}{|B_t - x|^\alpha}\right\} \leqslant \frac{C_\alpha}{(\sqrt{2\pi t})^3} \exp\left(-\frac{1}{2t}\left|\frac{x}{2}\right|^2\right) + E\left\{\frac{1}{|B_t - x|^\alpha} \cdot 1_{\left\{|B_t - x| \geqslant \frac{|x|}{2}\right\}}\right\}$$

En déduire que $\lim_{t \to +\infty} E\{|X_t|^\alpha\} = 0$ et que $\sup_{t \geqslant 0} E\{|X_t|^\alpha\} < \infty$

7) Le processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ est-il une $\mathcal{F}_t$-martingale ?

Calculer $E\{\sup_{t \geqslant 0} |X_t|\}$

8) Montrer que $|B_t| \longrightarrow +\infty$ p.s., lorsque $t \longrightarrow +\infty$

Indication : On pourra utiliser le fait que toute $\mathcal{F}_t$-martingale locale continue, positive, converge p.s., quand $t \longrightarrow +\infty$, vers une limite finie.

Université de Paris-Dauphine — M_2. Spécialités MASEF, EDPA, TSI

Département MIDO. Année 2012-2013 — Calcul Stochastique

Examen de Janvier 2013

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ désigne un espace de probabilité filtré vérifiant les conditions habituelles.

I) Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel, issu de zéro

1) Pour tout $t \in [0,1[$, soit $\xi_t = \int_0^t \frac{1}{(1-u)}\, dB_u$

a) Montrer que $(\xi_t)_{t\in[0,1[}$ est un processus gaussien bien défini, continu, centré ; calculer, pour tout $(s,t) \in ([0,1[)^2$ la covariance $E\{\xi_t \xi_s\}$.

b) Posons, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$: $\beta_u = \xi_{\left(\frac{u}{1+u}\right)}$.
Montrer que $(\beta_u)_{u\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien réel.

c) En déduire que p.s. : $\lim_{\substack{t\to 1 \\ t<1}} \xi_t . (1-t) = 0$

d) Démontrer que les deux processus

$((1-t)\xi_t)_{t\in[0,1[}$ et $(B_t - tB_1)_{t\in[0,1[}$

ont même loi.

2) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, considérons la solution $(Y_t)_{t\in[0,1[}$ de l'E.D.S.

$(*)$: $Y_t = a + B_t + \int_0^t \frac{(b-Y_u)}{(1-u)}\, du$, $t \in [0,1[$ p.s

a) Montrer que l'E.D.S $(*)$ admet bien une unique solution $(Y_t)_{t\in[0,1[}$.

b) Démontrer que, p.s., pour tout $t \in [0,1[$

$$Y_t = a + t(b-a) + (1-t)\int_0^t \frac{1}{(1-u)}\, dB_u$$

I) 2) c) (suite)

En déduire que $(Y_t)_{t\in[0,1[}$ est un processus gaussien continu, issu de a, tel que p.s. $\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} Y_t = b$

d) On suppose que $a = 0$

Montrer que, pour tous $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, la loi du vecteur aléatoire $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n})$ est égale à la loi conditionnelle de $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ sachant que $B_1 = b$.

II) Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel, issu de zéro.

Pour tous $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, considérons le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, $X_t = (X_1(t), X_2(t))$, $(t \geq 0)$ solution de l'E.D.S. :

$$(**)\quad \begin{cases} X_1(t) = \alpha - \frac{1}{2}\int_0^t X_1(s)\,ds - c\int_0^t X_2(s)\,dB_s \\ X_2(t) = \beta - \frac{1}{2}\int_0^t X_2(s)\,ds + \frac{1}{c}\int_0^t X_1(s)\,dB_s \end{cases} \quad \text{p.s.}$$

1) Montrer que la solution $(X_t)_{t\geq 0}$ de l'E.D.S. $(**)$ existe, est unique ; vérifier que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov et calculer son générateur infinitésimal $\mathcal{L}$.

2) Développer, en utilisant la formule d'Itô, le processus

$$Y_t = (X_1(t))^2 + c^2 (X_2(t))^2, \quad (t \geq 0)$$

3) En déduire que le processus $(X_t)_{t\geq 0} = (X_1(t), X_2(t))_{t\geq 0}$ prend ses valeurs dans une ellipse de $\mathbb{R}^2$ dont on déterminera l'équation.

4) Démontrer que, p.s., pour tout $t \geq 0$

$$X_1(t) = \sqrt{\alpha^2 + c^2\beta^2}\,\cos(B_t + \gamma)$$

II) 4) (suite)

$$X_2(t) = \frac{1}{c}\sqrt{\alpha^2 + c^2\beta^2}\,\sin(\beta_t + \gamma)$$

où la constante $\gamma \in [0, 2\pi[$ est à déterminer.

III) Soit $(W_1(t), W_2(t))_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^2$, issu d'un point $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

On admettra la propriété suivante :

(P) $\quad P\{\,\exists\, t \geq 0 : (W_1(t), W_2(t)) = (0,0)\} = 0$

Soit $M_t = \mathrm{Log}\{(W_1(t))^2 + (W_2(t))^2\}$, $(t \geq 0)$

1) Montrer que $(M_t)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ - martingale locale continue ; calculer le "crochet" $\langle M \rangle_t$, $(t \geq 0)$

2) Montrer que pour tous $t > 0$ et $p \in [1, \infty[$:

$$E\{|M_t|^p\} < \infty$$

Indication : passer en coordonnées polaires.

3) Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \geq 1$: $E\{M_t\} \geq c + \mathrm{Log}(t)$

Le processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est-il une $\mathcal{F}_t$ - martingale ?

IV) Soit $N = (N_t)_{t \geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$ - martingale continue, positive vérifiant $N_0 = 1$ et $\lim_{t \to +\infty} N_t = 0$ p.s.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, soit

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : N_t > a\}, \text{ avec la convention } \inf(\emptyset) = +\infty$$

Posons $N^* = \sup_{t \geq 0} N_t$.

1) Montrer que, pour tout $a > 1$, on a p.s. :

$$\lim_{t \to +\infty} N_{t \wedge T_a} = a \cdot 1_{\{T_a < \infty\}} = a \cdot 1_{\{N^* > a\}}$$

IV) 1) (suite)

En déduire que la v.a. N^* a même loi que $\frac{1}{U}$ où U est une v.a. réelle de loi uniforme sur $[0,1]$

2) Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien réel issu de zéro. Soit $\theta > 0$. Posons, pour tout $t \geq 0$:

$$X_t = B_t - \theta t \quad \text{et} \quad X^* = \sup_{t \geq 0} X_t$$

a) Montrer que $P\{0 \leq X^* < \infty\} = 1$

b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $(\exp(\alpha X_t))_{t \geq 0}$ soit une $\mathcal{F}_t$ - martingale.

c) En déduire, grâce à la question 1), la loi de la v.a. X^*

Université de Paris-Dauphine, M_2 - Spécialités MASEF, EDPMAD, TSI.

Département MIDO. Année 2013-2014 Calcul Stochastique

Examen de Janvier 2014.

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ désigne un espace de probabilité filtré vérifiant les conditions habituelles.

Les exercices (I), (II), (III) et (IV) sont indépendants.

(I) Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel issu de zéro.

1) Posons, pour tous $t \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1-t)}\right)$$

et $M_t = p(t, B_t)$.

a) Calculer $E\{M_t\}$ et $E\{M_t^2\}$.

Montrer que $\lim_{t\to 1, t<1} M_t = 0$ p.s.

b) Montrer que, p.s., pour tout $t \in [0,1[$:

$$M_t = 1 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} p(s, B_s)\, dB_s$$

En déduire que $(M_t)_{t\in[0,1[}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue de carré intégrable.

2) Posons, pour tous $t \geq 0$ et $\omega \in \Omega$:

$$\psi(t,\omega) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} p(t, B_t(\omega)) & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

a) Montrer que le processus $(\psi_t)_{t\geq 0}$ est continu, $\mathcal{F}_t$-adapté et que, p.s., pour $t \geq 0$, $\int_0^t \psi_s^2\, ds < \infty$.

b) Soit $X_t = \int_0^t \psi_s\, dB_s$, $(t \geq 0)$.

Que vaut X_1 ? Calculer $E\left\{\int_0^1 \psi_s^2\, ds\right\}$.

Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale locale continue, telle que $E\{X_t^2\} < \infty$, pour tout $t \geq 0$. Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est-il une $\mathcal{F}_t$-martingale ?

(II) Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien réel issu de zéro.

Considérons l'E.D.S. suivante :

$$(*)\quad X_t = x + \int_0^t (\sigma X_s + \tilde{\sigma})\, dB_s + \int_0^t (bX_s + \tilde{b})\, ds, \quad (t \geq 0)$$

où x, σ, $\tilde{\sigma}$, b et $\tilde{b}$ sont des constantes réelles

1) Montrer que l'E.D.S. $(*)$ admet une unique solution $(X_t)_{t\geq 0}$.

2) Notons $(M_t)_{t\geq 0}$ la solution de l'E.D.S. :

$$(**)\quad M_t = 1 + \int_0^t \sigma M_s\, dB_s + \int_0^t b M_s\, ds, \quad (t \geq 0)$$

Montrer que $M_t = \exp\left(\sigma B_t + \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)$

3) Posons $Y_t = M_t^{-1} \cdot X_t$, $(t \geq 0)$.

où $(X_t)_{t\geq 0}$ est la solution de l'E.D.S. $(*)$

Montrer que

$$Y_t = x + \int_0^t M_s^{-1} (\alpha\, dB_s + \beta\, ds)$$

où les constantes α et β sont à déterminer.

En déduire le calcul explicite de X_t, $(t \geq 0)$

4) On suppose, dans la suite, que le coefficient σ, dans l'E.D.S. $(*)$, est nul

a) Démontrer que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est gaussien.

b) Calculer la fonction caractéristique de X_t, donnée par :

$$\varphi_{X_t}(u) = E\left\{\exp(iuX_t)\right\}, \quad (u \in \mathbb{R})$$

c) On suppose, de plus, que le coefficient b, dans l'E.D.S. $(*)$ est strictement négatif

Montrer que (X_t) converge en loi, quand $t \longrightarrow +\infty$, vers une limite μ à déterminer.

d) Montrer que si, dans l'E.D.S. $(*)$, on remplace la valeur initiale x par une v.a. réelle X_0 de loi μ, indépendante du mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$, alors, pour tout $t \geq 0$, la v.a. X_t suit aussi la loi μ.

(III) Pour tout $\varepsilon \geq 0$, soient σ_ε et b_ε deux applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel, issu de zéro.

Considérons la solution $X^\varepsilon = (X^\varepsilon_t)_{t\geq 0}$ de l'E.D.S. :

$$(*)\quad X^\varepsilon_t = x_\varepsilon + \int_0^t \sigma_\varepsilon(X^\varepsilon_s)\,dB_s + \int_0^t b_\varepsilon(X^\varepsilon_s)\,ds \quad , \quad (t\geq 0)$$

où $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$. On suppose que :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ |x_\varepsilon - x_0| + \sup_{y\in\mathbb{R}} |\sigma_\varepsilon(y) - \sigma_0(y)| + \sup_{y\in\mathbb{R}} |b_\varepsilon(y) - b_0(y)| \right\} = 0$$

Démontrer, en utilisant le Lemme de Gronwall, que, pour tout $t \geq 0$, on a $\lim_{\varepsilon \searrow 0} E\left\{ \sup_{0\leq s\leq t} |X^\varepsilon_s - X^0_s|^2 \right\} = 0$

[$(X^0_t)_{t\geq 0}$ est la solution de l'E.D.S. $(*)$ où on pose $\varepsilon = 0$].

(IV) Soient σ et b deux applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien réel, issu de zéro.

Considérons la solution $(X_t)_{t\geq 0}$ de l'E.D.S. :

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s + \int_0^t b(X_s)\,ds \quad , \quad (t\geq 0).$$

où $x \in \mathbb{R}$.

On suppose que $\sup_{z\in\mathbb{R}} |\sigma(z)| = \|\sigma\| < \infty$.

1) Posons $M_t = \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s$ et $\hat{M}_t = \sup_{0\leq s\leq t} |M_s|$, $(t\geq 0)$.

Evaluer, à l'aide de la majoration exponentielle, le nombre

$$P\left\{ \exp\left(\varepsilon (\hat{M}_t)^2\right) \geq n \right\}$$

où $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $t > 0$.

En déduire que

pour tout $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2\|\sigma\|^2 t}\right[$, on a $E\left\{\exp\left(\varepsilon (\hat{M}_t)^2\right)\right\} < \infty$.

[on rappelle que, si Z est une v.a. réelle positive, alors

$$E(Z) < \infty \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} P(Z \geq n) < \infty \ ].$$

(IV) (suite)

2) Soit $c > 0$ une constante de Lipschitz pour b. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{4t\|\sigma\|^2 \exp(2ct)}\right[$, on a :

$$E\left\{\exp\left(\varepsilon \left(\hat{X}_t\right)^2\right)\right\} < \infty \quad \text{où} \quad \hat{X}_t = \sup_{0 \le s \le t} |X_s|, \quad t > 0$$

[Utiliser le Lemme de Gronwall]

En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$E\left\{\exp\left(p \cdot \hat{X}_t\right)\right\} < \infty$$