C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 1033–1035, 2000

Présentation du pli cacheté

Marc YOR

Le titre du pli : « Sur l'équation de Kolmogoroff » ne rend compte que très partiellement de son contenu, qui, en fait, offre une approche (c'est un théorème ! à mon sens le résultat le plus profond du pli) de la diffusion inhomogène, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de coefficient de diffusion $\sigma(s,x)$ et de dérive $a(s,x)$, fonctions de $(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles, comme solution de :

$$X_t = x + \beta_{H(t)} + \int_0^t a(s, X_s)\,\mathrm{d}s, \tag{1}$$

où $(\beta(u),\, u \geqslant 0)$[1] est un mouvement brownien réel, changé de temps au moyen de l'horloge

$$\left(H(t) = \int_0^t \sigma^2(s, X_s)\,\mathrm{d}s,\ t \geqslant 0\right).$$

Cette écriture est à rapprocher de celle d'Itô qui, quelques années plus tard, présentera cette même diffusion sous forme de solution d'équation différentielle stochastique :

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t a(s, X_s)\,\mathrm{d}s, \tag{2}$$

où $(B_s,\, s \geqslant 0)$ est un mouvement brownien réel.

Pour ne nous permettre aucun écart par rapport au texte manuscrit de Doeblin, et montrer clairement les relations entre (1) et (2), introduisons, en suivant Doeblin, le changement de temps :

$$\theta(\tau) = \inf\{t\ :\ H(t) > \tau\}$$

[inverse de H, processus croissant de la martingale

$$\left(M_t = \int_0^t \sigma(s, X_s)\ \mathrm{d}B_s,\ t \geqslant 0\right)$$

figurant en (2)].

L'auteur, qui ne dispose pas de l'intégrale stochastique d'Itô, montre néanmoins que le processus :

$$Z_t = X_t - x - \int_0^t a(s, X_s)\,\mathrm{d}s$$

est une martingale, ainsi que $(Z_t^2 - H_t,\, t \geqslant 0)$; autrement dit, $(H(t),\, t \geqslant 0)$ est le processus croissant associé à $(Z_t,\, t \geqslant 0)$.

[On ne trouve pas les termes martingale et processus croissant dans le texte de Doeblin, mais les résultats sont, quant à eux, bien établis !]

[1] Pour la commodité de la lecture, nous écrivons $Y(u)$, ou Y_u, la valeur du processus Y en l'instant u.

S0764-4442(01)01845-6/MIS

Doeblin montre ensuite que le processus $\big(\beta(\tau) \overset{\text{déf}}{=} Z(\theta(\tau)),\, \tau \geqslant 0\big)$ est un mouvement brownien. Ainsi, $Z_t = \beta(H(t))$, et on a obtenu la représentation (1). (*Voir* les lemmes VIII, IX et le théorème X.)

Par la suite, W. Doeblin exploite systématiquement la représentation (1) pour en tirer tout un ensemble de conséquences (énoncés XI à XIV) pour le processus $(X_t,\, t \geqslant 0)$, telles que loi du logarithme itéré, probabilité des grandes valeurs, loi centrale limite (énoncé XIV) que l'on écrira ici en extrapolant un peu :

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\Delta}\,\sigma(s,X_s)}\big(X(s+\Delta u)-X(s)\big),\ u \geqslant 0\right\}$$

converge en loi vers un mouvement brownien, lorsque $\Delta \to 0$, résultat que l'on peut rapprocher de l'article de F. Delbaen : *Infinitesimal behavior of a continuous local martingale*, Séminaire de Probabilités XXVI, Lect. Notes in Math. 1526, Springer-Verlag, 1992, p. 398.

Mais, c'est, à mon avis, le paragraphe XV qui, à lui seul !, justifierait amplement l'intérêt de la publication du pli cacheté, soixante ans après son dépôt : en effet, ce paragraphe XV, intitulé : *Changements de variables*, n'est autre qu'une version, tout à fait rigoureuse, dans le cadre des diffusions unidimensionnelles, de la célèbre formule d'Itô, énoncée précisément de la façon suivante par Doeblin :
partant de (X_t), solution de (1), et considérant une fonction $\varphi(t,x)$ de classe $\mathrm{C}^{1,2}$, croissante en x [cette restriction est nécessaire dans le cadre de Doeblin ; elle assure que $Y_t = \varphi(t, X_t)$ est encore une diffusion], Doeblin montre que (Y_t) satisfait encore une relation du type (1), à savoir :

$$Y_t = \varphi(0,x) + \gamma_{\overline{H}_t} + \int_0^t \overline{a}(s,X_s)\,\mathrm{d}s,$$

où $(\gamma_u,\, u \geqslant 0)$ est un mouvement brownien,

$$\overline{H}_t = \int_0^t (\overline{\sigma})^2(s,X_s)\,\mathrm{d}s, \quad \text{avec } \overline{\sigma}(s,x) = \varphi'_x(s,x)\,\sigma(s,x),$$
$$\text{et } \overline{a}(s,x) = \varphi'_x(s,x)\,a(s,x) + \varphi'_s(s,x) + \frac{1}{2}\,\varphi''_x(s,x)\,\sigma^2(s,x).$$

Tout lecteur probabiliste aura reconnu dans ces expressions les principaux ingrédients de la formule d'Itô, hormis bien sûr l'écriture de $\gamma_{\overline{H}_t}$ comme l'intégrale stochastique d'Itô :

$$\int_0^t \varphi'_x(s,X_s)\,\sigma(s,X_s)\;\mathrm{d}B_s$$

À la lumière de ces résultats, le pli cacheté de Doeblin apparaît comme le chaînon manquant entre la représentation de Feller d'une diffusion unidimensionnelle à l'aide du mouvement brownien, par changement de variables dans l'espace et le temps, et la représentation d'Itô comme solution d'équation différentielle stochastique.

Pour souligner encore, si besoin était, combien les recherches de Doeblin sont en avance de quelques décennies, le pli se termine par l'énoncé d'un résultat de monotonie des solutions de l'équation de Kolmogorov par rapport au coefficient de dérive a, résultat qui est la version « en loi » des théorèmes de comparaison de Yamada (1973) et Yamada–Ogura (1981) :

Si $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ sont solutions de (1) (ou (2)) avec le même coefficient de diffusion σ, et les dérives respectives $a^{(1)}$ et $a^{(2)}$ telles que : $a^{(1)}(s,x) \leqslant a^{(2)}(s,x)$, alors $X^{(1)}(t) \leqslant X^{(2)}(t)$, pour tout t.

[Dans ces énoncés, je ne donne pas, volontairement, les hypothèses précises sur les coefficients σ et a, laissant le lecteur aller puiser aux différentes sources, celles de Doeblin, et les autres...]

Ces quelques mots de présentation écrits, on ne saurait trop remercier Bernard Bru pour son travail de « traduction » fidèle des notes manuscrites – bien souvent difficiles à lire – de Doeblin, notes que Bernard Bru a entourées de commentaires historiques (la partie I) et scientifiques (la partie III qui situe en particulier les travaux de Doeblin par rapport à ceux de ses contemporains).

B. Bru et moi-même espérons que la publication de ce pli suscitera d'autres commentaires (que ceux faits ci-dessus) sur l'actualité des travaux de Doeblin (un tel commentaire nous a déjà été fait par W. Kendall) et initiatives (B. Roynette, à Nancy, organise une journée Doeblin en juin 2001), mais, dans un premier temps, nous nous sommes simplement donné pour but la publication de ce travail inédit de Doeblin dans les meilleures conditions possibles.

La publication du pli cacheté de Wolfgang Doeblin sur l'équation de Kolmogoroff a été rendue possible grâce à la volonté et à l'efficacité de Jean-Pierre Kahane qui est à l'origine même du projet et l'a sans cesse encouragé.

Que Monsieur Claude Doblin qui a permis l'ouverture du pli de son frère et nous a soutenu dans notre entreprise, trouve ici l'expression de notre reconnaissance. Quel meilleur hommage pouvait-on rendre à la mémoire de Wolfgang Doeblin que de publier, soixante ans après, son dernier manuscrit !

Pour toute correspondance, le lecteur peut contacter :
Marc Yor
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires
Université Pierre-et-Marie-Curie
Boîte 188
175, rue du Chevaleret
75013 Paris, France

ou

Bernard Bru
Laboratoire de Statistique
Université Paris-V
45, rue des Saints-Pères
75270 Paris cedex 06, France