C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 1129–1153, 2000

Partie III

ANNEXES

Exposés et trois Notes aux *Comptes rendus*, par Wolfgang DOEBLIN

Présentation, par Bernard Bru

On reproduit ci-dessous un ensemble de textes manuscrits conservés aux Archives littéraires allemandes de Marbach avec les manuscrits du grand romancier allemand Alfred Döblin, le père de Wolfgang Doeblin. Ces textes sont tous relatifs à l'équation de Chapman–Kolmogorov et sont, selon toute vraisemblance, des exposés faits par W. Doeblin en 1938 à Paris sur ses travaux en cours. Ils sont malheureusement tronqués. Doeblin en a visiblement utilisé certains pour rédiger des notes ou des mémoires sur le sujet (en particulier {10}). D'autres morceaux ont été perdus ou sont classés ailleurs. L'ensemble de ces manuscrits provient des papiers personnels de W. Doeblin rassemblés par sa mère Erna Döblin et conservés dans l'appartement parisien des Döblin jusqu'à leur mort en 1957. Ces papiers ont une histoire assez mouvementée, certains d'entre eux proviennent des papiers d'Alfred Doeblin cachés à Paris pendant la guerre, d'autres ont été envoyés par W. Doeblin aux États-Unis chez son frère aîné Peter ou à Zurich chez un ami de la famille, S. Pollag, voir à ce sujet la thèse très érudite de Louis Huguet [1968] et la lettre à S. Pollag reproduite ci-dessous, p. 1151. Nous avons pensé que ces textes bien que tronqués pouvaient éclairer quelque peu la genèse des travaux de Doeblin sur l'équation de Chapman et à ce titre méritaient d'être présentés ici.

Le premier de ces textes est très certainement le début d'un exposé fait au séminaire Hadamard du Collège de France au printemps 1938. Pour les deux autres on a indiqué en note des provenances possibles mais il faudra attendre l'analyse complète et détaillée du fonds de Marbach pour avoir à ce sujet des certitudes un peu plus assurées.

Les numéros ([1]), ([2]),..., renvoient aux notes qui figurent à la suite des exposés.

Exposé(s) de W. Doeblin sur l'équation de Chapman, (1938)

I ([1])
Nous allons envisager aujourd'hui quelques problèmes qui se posent à propos d'une équation fonctionnelle du calcul des probabilités : l'équation de Chapman. Commençons par le cas le plus simple. Envisageons un système matériel ne pouvant prendre qu'un nombre fini d'états $E_1, \ldots, E_n$ évoluant aléatoirement par sauts et admettons qu'il existe une probabilité $P_{ik}(s,t)$ bien définie pour que le système passe de la position E_i à l'instant s à la position E_k à l'instant t, ne dépendant pas du mouvement antérieur du système. Je répète, $P_{ik}(s,t)$ est la prob. ...

L'hypothèse que $P_{ik}(s,t)$ ne dépende pas du mouvement du système avant l'instant s est une hypothèse de déterminisme, le présent, c'est-à-dire l'état à l'instant initial détermine complètement le futur ou plutôt les probabilités du mouvement futur, le passé n'intervient plus.

S0764-4442(01)01849-3/MIS
© 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

En appliquant le théorème des probabilités totales et composées l'on obtient

$$P_{ik}(s,t) = \sum P_{ij}(s,u)\,P_{jk}(u,t), \quad s \leqslant u \leqslant t.$$

C'est l'équation de Chapman ou plutôt un cas particulier de cette équation.
L'on a les conditions $P_{ii}(s,s)=1$, $\sum_j P_{ij}(s,t)=1$, $P_{ij}(s,t)\geqslant 0$.

Le problème qui se pose est de trouver une solution de l'équation de Chapman satisfaisant ou non ces conditions. Sous l'hypothèse de continuité et $|P_{ik}(s,t)| \neq 0$, ce qui entraîne que $P_{ii}(s,s+0)=1$, $P_{ij}(s,s+0)=0$, M. Fréchet a démontré la forme suivante très élégante des solutions ([2]) :

$$P_{ik}(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ij}(s)\,A_{kj}(t)}{\mathrm{d}(t)},$$

où $A_{ki}(t)$ est le coefficient de $a_{ki}(t)$ dans le développement du déterminant $\mathrm{d}(t)$ des $a_{ki}(t)$. Cette forme est valable même en dehors du cas des probabilités.

M. Fréchet a étendu sa méthode à des cas beaucoup plus généraux et a obtenu des résultats assez complets. Comme M. Fréchet a exposé, comme me l'a dit M. Weinstein, cette théorie, il y a quelques ans je ne vous en parlerai pas et je vais passer à un groupe de travaux où l'on s'est posé un problème d'une nature assez différente.

Connaissant $P_{ik}(s,t)$ lorsque la distance $t-s$ est $<\varepsilon$, ε quelconque, l'équation de Chapman nous permet de calculer $P_{ik}(s,t)$ lorsque s et t sont quelconques ; alors on peut penser qu'il suffit de connaître certaines grandeurs caractérisant l'allure de $P_{ik}(s,t)$ lorsque $t\to s$ pour pouvoir reconstituer la courbe, par exemple si $P_{ik}(s,t)$ est dérivable ou plus exactement si

$$\frac{P_{ik}(s,s+\Delta)-P_{ik}(s,s)}{\Delta} \longrightarrow a_{ik}(s),$$

l'on peut chercher à reconstituer la fonction $P_{ik}(s,t)$ connaissant les grandeurs dérivées $a_{ik}(s)$, ([3]). Et la plupart des problèmes que nous allons envisager plus loin sont de la même nature : on se donne des grandeurs caractérisant l'allure locale de la fonction pour $t\to s$, reconstituer la solution, alors on aura des problèmes d'existence, d'unicité et de formation effective de la solution.

Au fond le problème essentiel qui a été envisagé par presque tous les auteurs est un passage de l'infiniment petit au fini, soit un problème d'intégration. Généralement, les conditions locales que nous imposons doivent avoir un sens stochastique, un sens pour le mouvement et la solution idéale sera une solution qui permette de lire en quelque sorte le mouvement qui le décrit. Nous nous occupons d'abord du cas des $P_{ik}(s,s+\Delta)$ avec une dérivée $a_{ik}(s)$.

Kolmogorov a montré le premier, ([4]), que les $P_{ik}(s,t)$ satisfont alors à une équation différentielle linéaire, en écrivant

$$P_{ik}(s,t+\Delta t) = \sum_j P_{ij}(s,t)\big[P_{jk}(t,t+\Delta t)-P_{jk}(t,t)\big],$$

nous voyons qu'on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ik}(s,t) = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(s,t)\,a_{jk}(t)$$

et Hostinský a montré qu'on pouvait écrire effectivement sous forme d'une série la solution, le terme d'ordre général de cette série s'écrit comme somme $\sum_{i_1 i_2 \dots}$, portant sur les états, d'intégrales multiples d'ordre n. Maintenant, le terme général de la solution n'a pas d'interprétation stochastique simple ; d'autre part, elle suppose la dérivabilité ([5]).

Envisageons maintenant le cas général de l'équation de Chapman. Je me bornerai pour simplifier l'écriture au cas où nous avons un mouvement dans un ensemble linéaire W. Alors nous allons supposer qu'il y a une probabilité $P(x, E, s, t)$ bien définie pour que le point mobile passe de la position x à l'instant s dans l'ensemble E à l'instant t, probabilité supposée de nouveau indépendante du mouvement antérieur du système. Nous allons astreindre $P(x, E, s, t)$ à certaines hypothèses de mesurabilité et le théorème des probabilités totales et composées nous donne alors

$$P(x, E, s, t) = \int_W P(z, E, u, t) \, \mathrm{d}_z P(x, z, s, u),$$

où l'intégrale est d'ailleurs une intégrale de Lebesgue–Stieltjes, $P(x, E, s, t)$ est, pour $x,\ s,\ t$ fixés, une fonction complètement additive non négative en E, avec $P(x, W, s, t) = 1$.
Si vous voulez c'est une mesure normée définie sur W dépendant des paramètres $x,\ s,\ t$.
L'on a encore $P(x, x, s, s) = 1$.
L'équation ci-dessus est la forme générale de l'équation de Chapman. Elle prend une forme plus simple si nous supposons que W est l'intervalle $a,\ b$ et que $P(x, E, s, t)$ soit absolument continue, c'est-à-dire qu'il y a une densité de probabilité $p(x, y, s, t)$ pour que le point passe de x à l'instant s en y à l'instant t. Alors on aura $p(x, y, s, t) = \int_a^b p(z, y, u, t)\, p(x, z, s, u) \, \mathrm{d}u$.

Remarquons d'abord que pour tout $t = s$ le point se trouve certainement en x, il n'y a pas de densité de probabilité $p(x, y, s, s)$. Nous ne pouvons donc pas demander l'existence d'une limite $\left[p(x, y, s, s + \Delta) - p(x, y, s, s)\right]/\Delta$ pour toute valeur de x et y.
Mais si $x \neq y$, $p(x, y, s, s) = 0$, nous pouvons donc supposer que pour $x \neq y$,

$$\frac{p(x, y, s, s + \Delta)}{\Delta} \longrightarrow K[x, y, s] \geqslant 0.$$

L'on peut alors demander : $K[x, y, s] > 0$ étant donné, existe-t-il une solution de l'équation de Chapman $p(x, y, s, t)$ avec cette condition ?

Hostinský a montré que la réponse était affirmative mais que la solution n'est pas unique ([6]). Il a mis en évidence une solution dépendant encore d'une fonction arbitraire.

Je reviendrai tout à l'heure sur sa solution, je fais remarquer seulement que la non-unicité ne doit pas nous surprendre. Si

$$p(x, y, s, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t - s)}} \exp\left(-\frac{(y - x)^2}{2\sigma^2(t - s)}\right),$$

nous vérifions facilement que $K[x, y, s]$ est identiquement nul.

Un élève de Hostinský, Pospíšil, a essayé de tourner la difficulté, il a envisagé non pas les densités mais les probabilités elles-mêmes, ([7]). Alors rien ne nous empêche a priori de supposer que

$$\frac{P(x, E, s, s + \Delta) - P(x, E, s, s)}{\Delta} \longrightarrow K[x, E, s].$$

Si cette fonction existe, elle sera, comme $P(x, E, s, s) = 0$ si x ne fait pas partie de E, $\geqslant 0$ si x ne fait pas partie de E, et $\leqslant 0$ si x appartient à E, on aura d'autre part $K[x, W, s] = 0$.

Pospíšil s'est alors posé le problème, la fonction K bornée satisfaisant à ces conditions étant donnée bornée quelconque (sauf certaines hypothèses de mesurabilité) existe-t-il une solution de l'équation de Chapman admettant $K[x, W, s]$ comme dérivée ? Il a trouvé et donné effectivement sous forme d'une série une telle solution et même prouvé qu'elle était unique. A priori ce résultat paraît surprenant ([8]).

II

Passons à un cas mixte où nous avons un mouvement composé d'un mouvement continu plus un mouvement avec un nombre fini de sauts et qui présente encore quelques particularités supplémentaires.

C'est le mouvement étudié par Hostinský et qui donne lieu à une résolution de l'équation de Chapman dans un intervalle fini avec une densité de probabilité $p(x, y, s, t)$ satisfaisant à la condition

$$\frac{p(x, y, s, s+\Delta)}{\Delta} \longrightarrow K(x, y, s), \ \ y \neq x.$$

Hostinský obtient sa solution à peu près de la façon suivante : il suppose que la distribution $p(x, y, s, s+\Delta)$ est la somme d'une

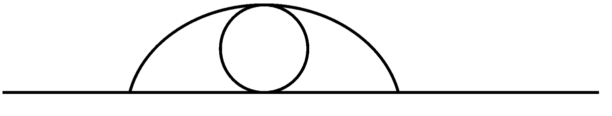
$$p(x, y, s, s+\Delta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(s)\Delta}} \exp\biggl(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(s)\Delta}\biggr)(1-\rho_x\Delta) + K(x, y, s)\Delta,$$

où $\rho_x = \int_a^b K(x, y, s)\,\mathrm{d}y$, c'est-à-dire dans des cas de probabilité $\rho\Delta$ le point a un déplacement brusque en saut, $\int K(x, y, s)\,\mathrm{d}y$ indique la densité de probabilité de passer en y, et dans des cas de probabilité $1-\rho\Delta$ le point a un déplacement régi par une loi de Gauss dont la valeur moyenne est nulle (j'envisage $y-x$) et dont l'écart-type ne dépend que de l'instant mais pas du tout de la position x ([9]).

Mais, il est facile de voir que cela donne lieu à des difficultés aux extrémités. L'on ne peut pas avoir cette équivalence uniformément par rapport à x ; si x est très voisin des extrémités de l'intervalle, l'intégrale par rapport à y entre a et b de cette expression est < 1 et peut devenir voisine de $1/2$.

Hostinský ne fait pas beaucoup attention sur ce qui se passe dans le voisinage de a et b, mais il tombe quand même sur une solution correcte de son problème qui est, je le rappelle, non pas de trouver une solution quelconque de l'équation de Chapman dans un intervalle fini, mais d'en trouver une dépendant d'une fonction arbitraire et satisfaisant à la condition là, $K[x, y, s]$ étant donné.

Regardons un peu ce qu'il obtient dans le cas où $K[x, y, s]$ est 0. Sa solution se réduit alors en fonction des y à une fonction elliptique de Jacobi, qui, on le voit immédiatement, est ce qu'on obtient en enroulant la loi de Gauss sur le cercle et en appliquant le cercle sur a, b



Si on prend comme solution une loi de Gauss dont le carré de l'écart-type est de la forme $\sigma(s, t) = \int_s^t f(u)\,\mathrm{d}u$, dont la valeur moyenne est la valeur initiale x, on additionne la densité dans tous les points équidistants de $b-a$ et on obtient une nouvelle densité de probabilité $j(x, y, s, t)$ définie dans $[a, b]$, qui est la solution de son problème dans le cas où $K[x, y, s]$ est nulle. Dans le cas où $K[x, y, s]$ est différente de 0, sa solution est composée à l'aide de la fonction j et de K ([10]).

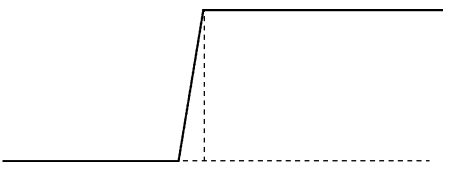
Le mouvement qu'il obtient ainsi, présente alors l'aspect suivant : si a est très petit et si y est un point à distance bornée inférieurement des points a et b, l'on a encore cette équation. Il n'y a pas de discontinuités fixes mais il peut y avoir quelques sauts brusques, mais si le point se trouve dans le voisinage de b, par exemple, nous le voyons apparaître dans des cas de probabilités voisines de $1/2$ dans le voisinage de a ; tout se passe du point de vue de continuité du mouvement comme si a et b étaient reliés. Hostinský ne s'est pas aperçu de ces dernières singularités.

Je passe maintenant au cas où l'ensemble W est un segment de droite ou la droite indéfinie ([11]).

Soit $F(x, y, s, t)$ la probabilité pour que le point mobile parti de x à l'instant s se trouve à l'instant t à gauche de y. Alors l'équation de Chapman prend la forme

$$F(x, y, s, t) = \int F(z, y, u, t)\,\mathrm{d}_z F(x, z, s, u),$$

où les limites de l'intégrale sont soit $-\infty$ et $+\infty$, soit a et b.
Nous allons faire l'hypothèse qui exclut les sauts brusques du point mobile ou plutôt les discontinuités fixées non aléatoires :
Nous allons admettre que si le point se trouve à l'instant t dans x, à l'instant $t + \Delta t$, il se trouve dans l'intervalle $x - \varepsilon, x + \varepsilon$ en dehors de cas de probabilité tendant vers 0 si Δt tend vers 0 et cela uniformément par rapport à t et à x.
Les fonctions $F(x, y, t, t + \Delta)$ suivront donc, si Δt petit, la forme que voici



Sous cette hypothèse l'on démontre immédiatement que si nous prenons des $t_n \to t$, où t est fixe, alors les positions successives du point mobile aux instants $t_1, \ldots, t_n$ convergent presque sûrement vers la position à l'instant t. Mais ceci ne prouve nullement qu'il n'y aura pas de discontinuités, il pourra très bien y en avoir, seulement ce qui est essentiel, il n'y aura pas de discontinuités pour des t fixes envisagés d'avance, les discontinuités sont mobiles.
Je rappelle que ces discontinuités mobiles ont été mises en évidence dans le cas des intégrales à termes aléatoires indépendants en particulier par M. Lévy, ([12]).

L'on déduit de là qu'il n'y a presque sûrement qu'un nombre fini de sauts $> \varepsilon$, donc que la fonction $x(t)$ est une fonction de Baire de classe 1. Ce théorème a été énoncé pour la première fois par M. Slutsky dans un article du Giornale des Actuaires italiens 1937, ([13]).
J'ai l'impression que Slutsky se borne pour déduire que $x(t)$ est une fonction de classe 1 au fait que $x(t)$ n'a pas de discontinuités fixes. J'ignore si cela suffit pour en déduire immédiatement le théorème ([14]). En tout cas il résulte immédiatement de raisonnements de ma thèse, ([15]), que x n'admet qu'un nombre fini de sauts, ce qui prouve bien que c'est une fonction de classe 1.

III ([16])
Sous des hypothèses assez fortes M. Kolmogoroff a démontré que $p(x, y, s, t)$ satisfait à des équations aux dérivées partielles du type parabolique. Sous des hypothèses encore plus fortes, M. Feller a montré que ces équations ont une solution unique.
Alors Pospíšil a essayé de voir ce qui se passe si l'on n'envisage pas les densités mais les fonctions d'ensemble $P(x, E, s, t)$, il suppose donc l'existence de

$$\lim \frac{P(x, E, t, t + \delta) - P(x, E, t, t)}{\delta} = K(x, E, t)$$

pour tout ensemble E et il constate qu'il existe une solution et une solution unique de l'équation de Chapman avec cette dérivée $K(x, E, t)$. La méthode employée pour la démonstration est l'intégration des substitutions de Volterra. Je n'ai pas été capable pour certaines raisons de lire ce travail. M. Hostinský vous en a parlé il y a un an, ([17]).

C'est Feller qui le premier a donné des conditions d'existence et d'unicité. Feller suppose d'abord que les fonctions $a(x, t)$ et $b(x, t)$ admettent des dérivées partielles bornées des deux premiers ordres par rapport à x et t et que ces dérivées partielles sont lipschitziennes, ensuite que a et b et a/b soient bornées. Il utilise la méthode de Hadamard–Gevrey. Mais Feller ne montre pas qu'il n'existe qu'une seule solution de l'équation de Kolmogoroff pour les deux coefficients a et b. A priori il pourrait y avoir des solutions non dérivables par rapport à x. Nous allons voir qu'il n'en est pas ainsi et nous allons ainsi prouver la forme de F quand $\partial F/\partial x$ et $\partial^2 F/\partial x^2$ existent, ([18]).

Nous allons appliquer une idée d'interpolation qui a d'ailleurs été appliquée par beaucoup d'auteurs qui se sont occupés de cette question et spécialement par S. Bernstein.

Notes sur les exposés de Marbach, par B. Bru

([1]) L'exposé sur « l'équation de Chapman » se trouve dans le dossier 2 du carton 1 des archives W. Doeblin de Marbach. Il s'agit très vraisemblablement d'une conférence faite au séminaire Hadamard en mars 1938, comme l'indique notamment la référence à « M. Weinstein » qui était alors l'organisateur du séminaire.

Dans les Archives de Marbach se trouve la lettre suivante de A. Weinstein à W. Doeblin, datée du 28 février 1938 : « Pourriez-vous faire une conférence au séminaire de M. Hadamard vendredi 11 mars à 15h ? Vous m'obligeriez beaucoup en acceptant. Bien entendu il s'agit d'une séance entière.

Répondez immédiatement s.v.p., car l'IHP est fermé mardi.

Bien cordialement à vous. »

Bien que la soutenance de sa thèse, rédigée depuis plus d'un an, eût été fixée au 26 mars 1938, on peut penser que Doeblin répondit positivement à cette invitation prestigieuse et qu'il prépara soigneusement son exposé comme à son habitude.

Le texte du manuscrit retranscrit ici est malheureusement incomplet, une ou plusieurs parties en ont été détachées. L'ensemble est cependant suffisamment intéressant pour mériter d'être lu, il expose la position des problèmes que se posaient alors Doeblin et les probabilistes analystes du temps au sujet de l'équation de Chapman. On a conservé le style de Doeblin qui visiblement avait prévu des reprises et des répétitions pour être suivi des auditeurs du séminaire peu au fait des questions dont il traite.

Sur Weinstein, on verra [Brüning et al., 1998] et [Siegmund–Schultze, 2000]. Alexander Weinstein (1897-1979) était un remarquable analyste, spécialiste de théorie de l'élasticité, que Hadamard appréciait beaucoup. Émigré en France depuis 1933, il avait bénéficié de diverses bourses de recherche mais d'aucun emploi fixe et ses fonctions d'organisateur du séminaire Hadamard étaient sans doute un artifice imaginé par Hadamard pour lui procurer quelques ressources et un soutien moral.

([2]) [Fréchet, 1932] et surtout [1938, chapitre II, section II, quatrième méthode] dont André Weil se moque dans son compte rendu pour la Revue Rose [1939] parce que Fréchet, selon lui, n'aurait pas remarqué qu'il s'agissait d'une formule de matrice inverse.

([3]) Ce problème est déjà étudié dans le grand mémoire de Kolmogorov [1931], chapitre 2, c'est à partir du cas fini que Kolmogorov procède pour édifier sa théorie générale et dériver les équations aux dérivées partielles devenues classiques. Ce cas est traité par Doeblin dans {6}, voir [Doob, 1942a, 1945, 1953] et

[Chung, 1960/1967]. Dans le mémoire {6}, Doeblin montre en particulier que les probabilités de passage, dans le cas d'un nombre fini d'états, sont nécessairement continues en t, mais il ne paraît pas avoir cherché si elles étaient dérivables ou continuement dérivables. Dans le cas homogène et pour un nombre fini d'états, il suffit de considérer les dérivées à l'origine. On vérifie alors (facilement) que $\frac{p_{ii}(t)-1}{t}$ a toujours une limite, éventuellement infinie. Doob a montré en 1942 que si cette limite est finie pour tout i, les probabilités de passage $p_{ij}(t)$ sont toutes dérivables [1942a, théorème 9, p. 52].

La dérivabilité des probabilités de passage sans aucune hypothèse a été démontrée par Kolmogorov quelques années plus tard [1951] et Austin a montré analytiquement en 1955 que l'hypothèse de Doob impliquait en outre que les $p_{ij}(t)$ soient continuement dérivables. Dans un livre à paraître, Chung donne de ce résultat une interprétation probabiliste remarquable [2001, pp. 70–72]. C'est à ce dernier auteur que nous devons l'essentiel des éléments de cette note et nous l'en remercions vivement. On se reportera à [Chung, 1967] pour un exposé complet et d'autres références.

Dans le cas d'un nombre fini d'états où se place ici Doeblin, les équations difffférentielles de Kolmogorov sont donc vérifiées sans restriction. Il n'en est pas de même du cas dénombrable pour lequel il existe des solutions non continues de l'équation de Chapman, [Doob, 1942a, p. 38].

Notons incidemment que même dans le cas fini l'équation de Chapman n'assure pas la validité de la propriété de Markov, ainsi que nous l'a fait observer K.L. Chung. Feller [1950/1968, pp. 383, 423, 471] donne un exemple simple d'une telle situation. Feller souhaitait-il manifester de la sorte que la théorie analytique markovienne dont il était l'un des maîtres ne pouvait avoir le dernier mot ?

(4) [Kolmogorov 1931], § 6, équation (52), p. 429.

(5) Voir Hostinský [1932/1938], première partie, 1932, § I, pp. 5–10. Hostinský utilise l'intégrale des substitutions linéaires dépendant d'un paramètre introduite par Volterra en 1887, voir *e.g.* [Volterra, 1913] ou [Volterra, Hostinský, 1938].

Au Colloque de Genève, en octobre 1937, Hostinský avait indiqué sa méthode et affirmé que les termes de sa solution dans le cas d'un nombre fini d'états pouvaient s'interpréter comme les probabilités pour que le point passe entre les temps s et t par les états $i_1 i_2 \cdots$. Doeblin avait remarqué aussitôt que ce n'était pas le cas mais qu'on pouvait en améliorant la méthode de Hostinský atteindre facilement la « forme idéale » de la solution avec son interprétation probabiliste naturelle. Dans les Archives de Marbach, se trouve un projet d'article daté du 23 janvier 1938 intitulé « le cas de Pospíšil » dans lequel Doeblin entreprend de corriger Hostinský qui semble l'avoir assez mal pris puisqu'il refusa l'article définitif de Doeblin sur ce sujet, {10}, qui fut publié par Feller en Suède, voir [Cohn, 1993, pp. 41–42].

Bohuslav Hostinský (1884–1951), professeur de physique théorique à l'université Masaryk de Brno, est un savant oublié qui connut dans les années trente une certaine notoriété particulièrement à Paris. Il fut par deux fois conférencier invité au nouvel institut Henri-Poincaré, en 1930 puis en 1936, et ses très nombreux travaux ont eu une importance décisive sur le développement du calcul des probabilités à Paris et à Moscou au début des années trente. C'est lui plus que tout autre qui, à la fin des années vingt, fut à l'origine de l'intérêt de Fréchet pour les événements en chaîne, au point que ce dernier réorienta, sous son influence, une partie importante de ses activités de recherche et celles de ses élèves (Fortet et Doeblin notamment) vers l'étude des schémas markoviens, voir par exemple [Fréchet, 1938], le premier livre entièrement consacré aux chaînes de Markov. C'est en effet Hostinský qui s'est rendu compte, le premier (avant Kolmogorov, von Neumann et Weil réunis), que le théorème du battage des cartes de Poincaré (la distribution finale est uniforme si les battages sont indépendants et de même loi mélangeante) est de fait un théorème sur les transformations itérées qui peut se concevoir comme une version probabiliste très générale du principe ergodique des systèmes dynamiques [Hostinský, 1928] et ce résultat impressionna non seulement Kolmogorov et toute l'École de Moscou mais aussi Hadamard lui-même [1928], le maître de Fréchet et Lévy. Les travaux de Hostinský sur l'équation de Chapman, dans le cas général, sont originaux et importants, en dépit de certaines imprécisions et de prétentions parfois excessives, [1932/1938] ; ils ont été en partie retrouvés (indépendamment) par Feller [1936], et seront précisés et élargis dans les derniers travaux de Doeblin, {CR13} et [Cohn, pp. 32–36]. Sa méthode (l'intégrale multiplicative de Volterra) est intéressante. Elle consiste à chercher les solutions de l'équation de Chapman sous forme de séries exponentielles formelles, les puissances successives étant remplacées par des intégrales multiples ; elle a été redécouverte à diverses reprises.

(6) Voir Hostinský [1932/1938], première partie, 1932, § III, théorème V, p. 26, pour l'existence d'une solution satisfaisant à la condition locale donnée ici par Doeblin. Cette solution dépend du choix d'une « unité symbolique », $j(x, y, s, t)$, qui dépend elle-même d'une fonction arbitraire, *ibid.*, p. 19, théorème III. Hostinský interprète sa solution de la façon suivante (*ibid.* p. 34) : la probabilité que le mouvement passe brusquement de x à y entre s et $s + \mathrm{d}s$ est égale à $K(x, y, s)\,\mathrm{d}s$ (avec les notations de Doeblin), c'est un passage « de seconde espèce » ou « passage brusque ». Quant à l'unité $j(x, y, s, t)$, elle représente, selon Hostinský, la « densité de passage de première espèce » de x à y entre s et t, dans le cas d'un « passage lent » (*e.g.* [Hostinský, 1940]). C'est cette interprétation que Doeblin entend préciser. La méthode analytique de Hostinský lui paraît d'ailleurs sans intérêt et sa discussion aux bornes de l'intervalle $a,\ b$, fausse.

Dans les archives Fréchet se trouve un exemplaire de l'article de Hostinský corrigé par Doeblin, sans doute à l'occasion de l'exposé dont nous reproduisons ici le texte. Doeblin a visiblement bâti son exposé à partir du texte de Hostinský, texte lui-même repris dans les deux mémoires suivantes (1934, 1938), les calculs de la première partie étant en certains endroits pour le moins audacieux. Il semble bien que Doeblin ait été le seul lecteur attentif de ce texte ésotérique de Hostinský qui paraît avoir résisté aux investigations des analystes du moment.

(7) Pospíšil [1936]. On trouve dans les archives Fréchet un tiré à part de ce travail au nom de W. Doeblin avec des corrections manuscrites de la main de Doeblin qui vraisemblablement a lu l'article avec attention comme à son habitude. Bedřich Pospíšil (1912–1944) est un élève de Hostinský à Brno, sur lui voir [Čech, 1947] et [Cohn, 1993, pp. 8–9]. Voir plus loin la partie III où l'on apprend que Hostinský a exposé le mémoire de Pospíšil lors de son séjour à Paris pendant l'hiver 1936–1937. Il est possible que Doeblin ait assisté à cet exposé mais qu'il n'en ait pas à ce moment-là vu l'intérêt, l'intégrale de Volterra ne lui disant visiblement rien, voir note (17), ci-dessous.

(8) Le manuscrit de Marbach est coupé ici. Doeblin a sans doute utilisé la suite de son texte pour rédiger le mémoire sur cette question {10} auquel on se reportera. On trouve dans les manuscrits déposés à Marbach une page de calculs rédigée dans le style de cet exposé qui sont reproduits dans {10} et que nous ne rappelons pas ici.

Il est possible que Doeblin ait ensuite évoqué le cas de Feller du mouvement continu sur lequel porte le pli en totalité. On trouve à Marbach divers « brouillons » sur ce thème. Nous ne reproduisons que le plus lisible, en partie III, bien qu'il fasse peut-être partie d'un autre manuscrit plus tardif ou interrompu. En revanche, la partie II, le « cas mixte », semble à peu près complète, il s'agit vraisemblablement d'une suite du I, qui en conserve les notations et le style, nous le reproduisons en entier. Le cas mixte forme le sujet des dernières réflexions de Doeblin sur l'équation de Chapman au printemps 1940. On trouve également dans cette partie une réflexion sur la nature des discontinuités du « cas continu » qui est précisée dans la note {CR9} et dans le pli.

(9) Doeblin détaille ici le § III de la première partie du mémoire de Hostinský [1932/1938], pp. 27–35. Le manuscrit de Doeblin étant parfois illisible, comme d'ailleurs le texte de Hostinský, la restitution des formules n'est pas garantie. La formule donnée par Doeblin correspond à la formule (22), p. 28, de l'article de Hostinský, mais corrigée à sa façon. Elle exprime que l'accroissement $\mathrm{d}X$ est en loi la somme d'un accroissement brownien et d'un accroissement poissonnien, ce qui dut séduire Doeblin. Hostinský découpe l'intervalle de temps s, t en n parties égales et procède par passage à la limite à partir de ladite formule composée n fois. Il retrouve ainsi sa solution sous forme de série, ce que Doeblin conteste. La formule (22) est reprise dans la deuxième partie du mémoire, (1934), pp. 4–5. Ce second mémoire de Hostinský a pour but de corriger quelque peu les démonstrations de la première partie. Il introduit, § 2, la fonction elliptique θ_3, qui est simplement la loi de Gauss enroulée sur le cercle, comme Doeblin le remarque ici. Hostinský a repris en de nombreux endroits sa solution, par exemple dans [Volterra, Hostinský, 1938], dernier chapitre. Ce dernier livre contient en première partie la traduction française des deux grands mémoires de Volterra sur le calcul différentiel et intégral des transformations linéaires publiés en italien en 1887 et 1901. On pourra consulter également le fascicule [Hostinský, 1939a], etc.

On comprend peut être mieux ainsi les différentes sources de Doeblin pour son étude de l'équation de Chapman : la théorie analytique de Kolmogorov précisée par Feller (1936) qui assure la cohérence mathématique de la théorie, l'interprétation physique de Hostinský (1932) qui l'éclaire, la théorie des équations différentielles stochastiques de Bernstein et les méthodes trajectorielles de Doeblin et Lévy qui permettent de dépasser les limitations analytiques et d'exprimer plus largement la vision probabiliste.

([10]) Il s'agit du résultat principal du second mémoire de Hostinský, 1934, § 3, pp. 8–11. La correction qu'apporte ici Doeblin ne paraît pas avoir été publiée, mais constitue sans doute la motivation de la note {CR10} et du théorème d'accessibilité de Doeblin.

([11]) Doeblin quitte ici Hostinský qui ne considère guère le cas d'un domaine infini, pour lui sans intérêt physique. Hostinský reste attaché à l'interprétation physique du problème de Chapman. Il a sous les yeux un tube a, b empli d'un liquide et d'une poussière de corpuscules qui diffusent à l'intérieur. Chacun des corpuscules est animé du mouvement lent de diffusion et du mouvement brusque des chocs. L'évolution des concentrations en un point du tube au cours du temps est alors décrite par une équation de Chapman dont la solution de Hostinský permettrait selon son auteur de suivre le cours (ce que d'ailleurs Doeblin conteste), voir par exemple la troisième partie du mémoire [1932/1938], 1938, chapitre III, pp. 21–25.

([12]) Lévy, [1934] et [1937], n$^\circ$ 51.

([13]) Slutsky, [1937] théorème 3.

([14]) En fait, Slutsky montre que si $Y(t)$ est continue en probabilité, elle est équivalente à une fonction aléatoire $Z(t)$ (pour tout t, $P(Z(t) = Y(t)) = 1$) obtenue comme limite d'une suite d'interpolés linéaires de Y, et donc une fonction de la classe 1.

([15]) Doeblin, thèse, chapitre 4, {5}, pp. 109–113.

([16]) Nous reproduisons ici deux pages manuscrites introduisant un exposé vraisemblablement sur l'équation de Kolmogoroff. Ce pourrait être un autre début de l'exposé du séminaire Hadamard de mars 1938 ou bien un exposé au séminaire Borel un peu plus tardif, disons à la rentrée universitaire 38-39 après qu'il eût résolu certains des problèmes posés par l'équation de Kolmogorov–Feller. On pourrait à partir de ce manuscrit reconstituer les motivations de Doeblin et les problèmes qu'il se pose en 1938. Notons que ce dernier manuscrit annonce un théorème d'unicité non publié que l'on retrouve dans le pli (théorème XIX).

Il existe également à Marbach des calculs non complètement rédigés relatifs aux deux notes {CR9,10}, en particulier une démonstration qui semble complète du théorème d'accessibilité de Doeblin {CR10} retrouvé par Feller [1952, 1954] : « Si $\int_0^1 \exp\left(\int_x^1 a\,\mathrm{d}x\right)$ converge, la probabilité pour que le point mobile atteigne l'origine est > 0, dans le cas contraire elle est nulle ». Sur le « test de Feller »voir [Itô–McKean 1965], [McKean, 1969],... La note {CR10} est également reprise dans un mémoire de Doob [1955a] auquel on se reportera.

([17]) Hostinský se trouvait à Paris à la fin de l'année 1936 et au début de l'année 1937, invité comme conférencier à l'IHP. Pendant sa visite Hostinský a parlé au séminaire Hadamard mais aussi à l'IHP, de sorte que cette indication ne suffit pas à déterminer l'origine du texte reproduit ici. Elle permet toutefois de le dater, un an après la visite de Hostinský, c'est-à-dire au début de l'année 1938. C'est lors de la seconde invitation de Hostinský à Paris que fut organisée une grande réception en l'honneur des trois hôtes de marque de l'IHP, Niels Bohr, Carleman et Hostinský, en présence du Corps diplomatique et des plus hautes personnalités scientifiques et politiques du moment (*Le Temps*, 19 janvier 1937). Hostinský, fait officier de la Légion d'Honneur, est au sommet de sa gloire. Quelques mois plus tard l'Allemagne occupe la Tchécoslovaquie. L'Université Masaryk de Brno redevient l'université allemande de Brünn.

Doeblin assista certainement aux conférences de Hostinský à l'IHP pendant l'hiver 1936-1937, dont il ne dut pas penser que du bien, quoiqu'elles abordassent plusieurs thèmes intéressants, par exemple les « chaînes inverses » et la « réversibilité des lois de la physique ». Elles sont reproduites dans les Annales de l'IHP [Hostinský, 1937a].

Après la guerre, Hostinský reprend ses fonctions à l'université Masaryk rebaptisée en 1948 université J.E. Purkinje. Il ne peut plus alors suivre la théorie des processus de Markov, devenue trop mathématique, ni d'ailleurs les théories physiques « allemandes », relativité, mécanique quantique, qu'il a toujours fermement rejetées, mais il n'a pas perdu son enthousiasme pour la science. Il s'intéresse principalement à l'acoustique et aux phénomènes de turbulence. Fréchet, qui a gardé le contact avec lui pendant toute la guerre, l'invite de nouveau en 1950 comme conférencier à l'IHP. Hostinský n'obtiendra pas l'autorisation de sortie du territoire. Il meurt en 1951. Sur lui on verra [Beránek, 1951] qui contient une belle photographie et la bibliographie complète de ses travaux, aussi [Litzman, 1985].

([18]) Il s'agit vraisemblablement du théorème XIX du pli (page 45), que Doeblin démontre par interpolation à la manière de Kolmogorov–Bernstein–Khinchin–Lévy(–Bachelier–Hostinský).

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur l'équation de Kolmogoroff.*
Note de M. **Wolfgang Dœblin**, présentée par M. Jacques Hadamard.

1. *Notations.* — Considérons le mouvement aléatoire d'un point mobile M sur une droite. La position de M à l'instant t sera aussi notée $X(t)$. Supposons qu'il existe une probabilité bien définie $F(x, y; s, t)$ (¹) pour que le point mobile M, se trouvant à l'instant s en x, se trouve à l'instant t ($> s$) à gauche de y, cette probabilité ne dépendant pas du mouvement du point mobile antérieurement à l'instant t. Alors, sous certaines hypothèses de mesurabilité sur F, on aura

$$F(x, y; s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z, y; u, t)\, d_z F(x, z; s, u) \qquad (s < u < t); \tag{1}$$

$$\lim_{y \to -\infty} F(x, y; s, t) = 0, \qquad \lim_{y \to \infty} F(x, y; s, t) = 1; \tag{2}$$

$$F(x, y; s, t) \geq F(x, y'; s, t) \qquad \text{si } y > y'. \tag{3}$$

Nous dirons alors que le mouvement est régi par l'*équation de Chapman-Kolmogoroff*. Supposons que, de plus, les coefficients suivants existent :

$$\lim_{t \to s} \frac{1}{t - s} \int_{|y-x|<1} (y - x)\, d_y F(x, y; s, t) = a(x, s), \tag{4}$$

$$\lim_{t \to s} \frac{1}{t - s} \int_{|y-x|<1} (y - x)^2\, d_y F(x, y; s, t) = \sigma^2(x, s), \tag{5}$$

$$\lim_{t \to s} \frac{1}{t - s} \int_{|y-x|<\eta} d_y F(x, y; s, t) = 0, \qquad \text{quel que soit } \eta, \tag{6}$$

(¹) Cf. Kolmogoroff, *Math. Ann.*, 104, 1931, p. 418-58; Feller, *Math. Ann.*, 113, 1936, p. 113-60.

Note de la rédaction : pour la condition (6), il faut évidemment remplacer $|y - x| < \eta$ par $|y - x| > \eta$.

sauf en certains points isolés, dits singuliers, qui pourront varier avec le temps d'une façon continue et pour lesquels on aura seulement (6). Alors nous dirons que le mouvement est régi par *l'équation de Kolmogoroff*. Nous dirons qu'il est régulier si (6) a lieu uniformément par rapport à x dans tout intervalle borné, que (4) et (5) existent (et que a et σ sont continues) uniformément par rapport à x dans tout intervalle borné ne contenant aucun point singulier et que

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ t \to s}} [1 - F(x, y; s, t)](t-s)^{-1} = 0, \qquad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ t \to s}} F(x, y; s, t)(t-s)^{-1} = 0.$$

Tout ce qui suit s'applique uniquement aux mouvements réguliers.

2. Énoncés. — I. *Presque sûrement*; $X(t)/1 + |X(t)|$ *est une fonction continue de* $t[X(t)$ pas nécessairement$]$. Si $\sigma^2[X(s), s] \neq 0$, $X(t)$ prend presque sûrement une infinité de fois la valeur $X(s)$ et si $\sigma^2[X(s), s] = 0$,

$$\lim_{t \to s} \frac{|X(t) - X(s)|}{\sqrt{(t-s) \log_2 (t-s)^{-1}}} = 0, \quad \text{presque sûrement.}$$

De plus (généralisations de propositions de MM. Khintchine et P. Lévy), si $\sigma[X(s), s] \neq 0$,

$$\overline{\lim_{t \to s}} \frac{|X(t) - X(s)|}{\sqrt{(t-s) \log_2 (t-s)^{-1}}} = \sqrt{2}\sigma[X(s), s], \quad \text{presque sûrement}$$

si a et σ sont bornés, $\sigma < K$ et s'il n'y a pas de points singuliers, il existe presque sûrement un τ tel que $|t - t'| < \tau$ et $0 \leqq t, t' < T$ entraîne

$$|X(t) - X(t')| < K\sqrt{2(t-t') \log (t-t')^{-1}}.$$

II. $t - s$ étant très petit, la loi de $X(t) - X(s)$ est équivalente à une loi de Gauss de moyenne $a[X(s), s](t-s)$ et d'écart-type

$$\sigma[X(s), s]\sqrt{t-s} \qquad (\text{si } \sigma \neq 0).$$

Le mouvement local résulte donc, si $\sigma \neq 0$, *de la superposition par addition d'un déplacement non aléatoire de vitesse* $a(x, s)$ *et d'un mouvement gaussien de moyenne nulle et d'écart-type* $\sigma\sqrt{t-s}$ ($\sigma =$ *amplitude du mouvement gaussien*). Cette décomposition du mouvement local n'est pas invariante dans un changement de variables.

III. *Si* $X(t)$ *est presque sûrement continu quel que soit* $X(s)$ $(t > s)$, *si* F *est une fonction continue de* x, $1 - F(x, y; s, t)$ *est* (y, s, t *restant fixes*) *une fonction de répartition par rapport à* x.

En utilisant le théorème d'existence de M. Feller [1] et I, II, III, on démontre :

IV. *Si l'on se donne arbitrairement des fonctions* $a(x, s)$, $\sigma(x, s)$ *continues et bornées avec* $\sigma > 0$, *il existe une fonction* $F[x, y; s, t \mid a, \sigma]$ *solution de l'équation de Kolmogoroff avec les coefficients* a, σ. *Cette solution est continue par rapport à* x, y, s, t, $(t \neq s)$, *monotone par rapport à* x *(et* y*). Il en est de même si,* a *et* σ *n'étant pas bornées, l'on peut trouver, quel que soit* ε, *des fonctions deux fois dérivables* $\bar{a}$ *et* $\bar{\sigma}$ *avec* $|a - \bar{a}| < \varepsilon$, $|\sigma - \bar{\sigma}| < \varepsilon$ *pour lesquels on peut prouver que* $\Pr\{|X(t)| > k,\ T_1 < t < T_2\} < \eta(k)$ *avec* $\eta(k) \to 0$ *si* $k \to \infty$.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur certains mouvements aléatoires.* Note [1] de M. **Wolfgang Dœblin**, présentée par M. Jacques Hadamard.

Nous conservons les notations de notre Note précédente [2]. Mais nous allons nous restreindre au cas particulier de Smoluchovsky où $F(x, y; s, t) = G(x, y; t - s)$, donc $a(x, s) = a(x)$, $\sigma(x, s) = \sigma(x)$. Nous nous proposons d'étudier l'allure du mouvement dans différents cas; par exemple : 1° lorsque a et σ (c'est-à-dire la vitesse du déplacement non aléatoire et l'amplitude du mouvement gaussien) s'annulent toutes les deux en un point O, le mouvement de M tend à se ralentir dans le voisinage de O, alors se pose la question de savoir si le point mobile peut atteindre l'origine, s'il tend à séjourner indéfiniment dans le voisinage de O, etc.; 2° lorsqu'il y a un courant non aléatoire très fort tendant à amener le point mobile M à l'infini auquel se superpose un mouvement gaussien dont l'amplitude σ peut aussi tendre vers l'∞ si $x \to \infty$; il s'agit de savoir si le point reste à distance finie dans un intervalle de temps fini.

Il est important de bien spécifier ce que nous entendons par la fonction aléatoire $X(t)$: $X(t)$ est la limite, pour $n \to \infty$, de la ligne brisée dont les sommets sont $X(t_i)$, $t_i = i/2^n$. Cette limite existe presque sûrement et $X(t)/1 + |X(t)|$ est continu.

A. Nous supposons que σ, $1/\sigma$ et a sont 3 fois dérivables si $Y \leqq x < Z$, (Z pouvant être $+\infty$). Dans ces conditions

I. *Pour que l'on ait presque sûrement* $X(t) < Z$ *pour tout* $t > 0$, *si* $X(0) < Z$, *il faut et il suffit que*

$$\int_Y^Z dx \int_x^Z \frac{1}{\sigma^2(x)} e^{-2\int_x^t \frac{a}{\sigma^2} du} dt = \infty. \tag{1}$$

Dans le cas contraire quel que soit T *et* $Y < X(0) < Z$

$$\lim_{L \to Z} \Pr\{X(t) < L,\ 0 < t < T\} < 1.$$

II. *Si*

$$\int_Y^Z \exp\left\{-2\int_Y^x \frac{a}{\sigma^2} du\right\} dx = \infty$$

---

[1] Séance du 9 janvier 1939.

[2] *Comptes rendus*, 207, 1938, p. 705.

presque sûrement, quel que soit $X(0) < Z$, *il y aura une suite infinie* $\{t_i\}$ *telle que* $t_i > t_{i-1} + 1$ *et* $X(t_i) < Y$ *et cette condition est nécessaire si l'on a* $(1) = \infty$.

III. *Si*

$$\int_Y^Z dx \int_Y^x \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp.\left\{ 2 \int_t^x \frac{a}{\sigma^2} du \right\} dt \tag{2}$$

diverge, $X(0) \geqq Z$ *entraîne* $X(t) \geqq Z$ *pour tout* t *et la probabilité pour que,* M *se trouvant en* $X(0)$ *à l'instant initial se trouve à un instant quelconque* $< T$ *à gauche d'un point* P *quelconque* (*fixe*, *avec* $Y \leqq P < Z$) *tend vers zéro si* $X(0) \to Z$.

Si $(1) < \infty$ *et* $(2) = \infty$, *alors* $\lim_{L \to Z} G(x, L, t) < 1$, $Y \leqq x < Z$. *Donc, dans le cas où* $Z = \infty$, *on n'a pas* [*si* $(1) < \infty$ *et* $(2) = \infty$] $G(x, +\infty, t) = 1$ *et, par conséquent, il n'existe alors aucune solution de l'équation de Kolmogoroff* ([3]) *avec ces coefficients* a *et* σ (ces derniers définissent, malgré cela, un mouvement ayant un sens). *Si* (1) *diverge et* (2) *converge il existe des solutions* $G(x, y, t)$ *avec les coefficients* a *et* σ *pour* $Y \leqq x < Z$ *pour lesquels* $G(Z, Y, t) > 0$.

B. *Cas particuliers.* — α. Hyp. : $a(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$, $a'(+0)$ *existe de même que* $\sigma'(+0)$. *Alors le point* M *ne peut ni atteindre l'origine à partir d'une position à droite ni passer de l'origine ou d'une position à gauche de l'origine à droite de cette dernière.*

Remarque. — Nous avons toujours le droit, vu nos hypothèses, de supposer que $X(0) = 0$ entraîne $X(t) = 0$ quel que soit t, mais ce n'est pas nécessairement la seule possibilité compatible avec les valeurs de a et σ.

Si $a'(+0) - 1/2\, \sigma'^2(+0) > 0$ *le point mobile ne peut pas rester indéfiniment dans le voisinage de l'origine (à droite); si* $a'(+0) - 1/2\, \sigma'^2(+0) < 0$ *il a au contraire une assez grande tendance à y séjourner indéfiniment.*

β. Hyp. : $a(0) > 0$, $\sigma(0) = 0$, *ou* $a(x) \to \infty$, *si* $x \to 0 (x > 0)$ σ *restant borné* $\neq 0$; *alors la condition nécessaire et suffisante pour que* $X(t) > 0$ *presque sûrement si* $X(0) > 0$ *peut s'écrire plus simplement*

$$\int_0^1 e^{2\int_x^1 \frac{a}{\sigma^2} du} dx = \infty.$$

([3]) Dans le cas des équations diff. stochast. M. S. Bernstein a déjà indiqué que si $\sigma = \text{const.}$ et $a > |X|^{1+\beta}$, on a $F[x, \infty, s, t] < 1$ (Cf. *Travaux Inst. Stekloff*).

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur l'équation de Kolmogoroff.* Note de M. **Wolfgang Dœblin**, présentée par M. Emile Borel.

Nous continuons dans cette Note les investigations desquelles nous avons rendu compte dans une Note antérieure [1] à laquelle nous renvoyons pour les notations et définitions. Nous supposerons dans tout ce qui suit que les fonctions $a(x, s)$ et $\sigma(x, s)$ sont continues par rapport à (x, s).

Théorème 1 d'existence. — *S'il existe un ensemble d'instants s partout dense dans* $[S, T]$ *pour lesquels* $\sigma(x, s)$ *est* $\neq 0$ *quel que soit* x, *si* (α) a *et* σ *sont bornées pour* $S \leqq s \leqq T$, *ou* (β) *s'il existe une suite de fonctions continues et bornées* a_n *et* σ_n *avec* $a_n \to a$, $\sigma_n \to \sigma$ [*uniformément si* x *est borné*, $S \leqq s \leqq T$] *pour lesquelles il existe des solutions régulières* $F(x, y, s, t \mid a_n, \sigma_n)$ *continues par rapport à* x *satisfaisant à la condition*

$$1 - F(x, y, s, t \mid a_n, \sigma_n) + F(x, -y, s, t \mid a_n, \sigma_n) < \varepsilon(x, y),$$

avec $\lim\limits_{y \to \infty} \varepsilon(x, y) = 0$, *il existe au moins une solution régulière de l'équation de Kolmogoroff avec les données* a *et* σ.

Les théorèmes 2 et 3 permettront de remplacer la condition (β) par des critères assez facilement applicables. Notons qu'*il en résulte en particulier que* (β) *est satisfait si* $\sigma^2(x, s) = O(x^2)$, *et* $a(x, s) < Cx$ *pour* $x > x_0$, $> Cx$ *pour* $x < -x_0$.

Soit $\Phi(\tau)$ la probabilité pour que dans un processus stochastique homogène à accroissements indépendants où la loi de $(X(t') - X(t))/\sqrt{t'-t}$ est la loi de Laplace-Gauss réduite on ait

$$\max_{1 > t > 0} |X(t) - X(0)| < \tau, \quad \Phi(\tau) > 1 - \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_\tau^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Théorème 2. — *Soient* $\overline{A}[x_1, x_2, u] = \max\limits_{x_1 \leqq y \leqq x_2} a(y, u)$,

$$\underline{A}[x_1, x_2, u] = \min_{x_1 \leqq y \leqq x_2} a(y, u), \ \bar{\sigma}^2(x_1, x_2, u) = \max_{x_1 \leqq y \leqq x_2} \sigma^2(y, u).$$

Soient $U_1(s, t, X(s), K)$, $U_2(s, t, X(s), K)$ *les solutions du système*

$$U'_1(t) = \underline{A}[U_1(t), U_2(t), t],$$
$$U'_2(t) = \overline{A}[U_1(t), U_2(t), t]$$

(1) *Comptes rendus*, 207, 1938, p. 705.

avec les conditions initiales

$$U_1(s) = X(s) - K, \qquad U_2(s) = X(s) + K.$$

Soit

$$\psi_1\big(s, t, X(s), K\big) = \int_s^t \overline{\sigma}^2\big(U_1(u), U_2(u), u\big)\,du.$$

Si $U_1(t)$ *et* $U_2(t)$ *sont finis, la probabilité pour que l'on ait pour tout* τ *compris entre* s *et* t,

$$U_1\big(s, \tau, X(s), K\big) \leqq X(\tau) \leqq U_2\big(s, \tau, X(s), K\big)$$

est $\Phi\Big(K/\sqrt{\psi_1\big(s, t, X(s), K\big)}\Big)$.

Théorème 3. — *Soient*

$$A^{(+)}(x_1, x_2, u) = \max\big(O, \overline{A}(x_1, x_2, u)\big), \qquad A^{(-)}(x_1, x_2, u) = \min\{\underline{A}(x_1, x_2, u), o\},$$

Soit $U^{(+)}\big(s, t, X(s), K\big)\big[U^{(-)}\big(s, t, X(s), K\big)\big]$ *la solution de l'équation*

$$U'(t) = A^{(+)}\big(X(s), U(t), t\big)\;\big[U'(t) = A^{(-)}\big(U(t), X(s), t\big)\big]$$

prenant la valeur $X(s) + 2K\,[X(s) - 2K]$ *pour* $t = s$. *Soit*

$$\psi_2\big(s, t, X(s), K\big) = \int_s^t \sigma^2[U^{(-)}(u), U^{(+)}(u), u]\,du.$$

Si $U^{(-)}\big(s, t, X(s), K\big)$, $U^{(+)}\big(s, t, X(s), K\big)$ *sont finis, la probabilité pour que l'on ait*

$$U^{(-)}\big(s, \tau, X(s), K\big) \leqq X(\tau) \leqq U^{(+)}\big(s, \tau, X(s), K\big)$$

pour tout $s < \tau \leqq t$ *est* $\geqq \Phi\Big(K/\sqrt{\psi_2\big(s, t, X(s), K\big)}\Big)$.

Corollaire. — *La condition* β *du théorème 1 est vérifiée si l'on a*

$$(\beta') \qquad U_1(S, T, O, K), \quad U_2(S, T, O, K)$$

sont finis quel que soit K *et*

$$\lim_{k \to \infty} \Psi_1(S, T, O, K)K^{-2} = o,$$

ou

$$(\beta'') \qquad U^{(-)}(S, T, O, K), \quad U^{(+)}(S, T, O, K)$$

sont finis quel que soit K *et*

$$\lim_{k \to \infty} \Psi_2(S, T, O, K)K^{-2} = o.$$

THÉORÈME 4. — *Toute solution régulière* $F(x, y, s, t \mid a, \sigma)$ *de l'équation de Kolmogoroff est continue par rapport à* y *et* t *en chaque point où* $\sigma(y, t) > 0$. *Si* a_n *et* σ_n *sont bornées (et* $\sigma_n > 0$*), il existe des solutions régulières*

$$F(x, y, s, t \mid a_n, \sigma_n)$$

continues par rapport à x. *Si* a_n *et* σ_n *convergent vers des fonctions continues et bornées* a *et* σ *avec* $\sigma > 0$, *il existe une suite d'entiers* n_j *telle que*

$$F(x, y, s, t \mid a_{n_j} \mid \sigma_{n_j}) \to F(x, y, s, t \mid a, \sigma) \quad F(x, y, s, t \mid a, \sigma)$$

étant une solution régulière de l'équation de Kolmogoroff avec les coefficients a *et* σ, *continue par rapport à* x, y, s, t. *Soit* $\sigma(y, x, t, s) = 1 - F(x, y, s, t \mid a, \sigma)$, σ *satisfait à l'équation fonctionnelle suivante*

$$\sigma(y, x, t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(z, x, u, s)\, d_z\sigma(y, z, t, u) \qquad (t > u > s).$$

Note de la rédaction : les corrections typographiques suivantes doivent être faites :

– dans les trois dernières lignes, lire G au lieu de σ ;

– dans les énoncés du Théorème 3 et du Corollaire, O et o désignent tous les deux le réel zéro ;

– dans le Corollaire, en (β''), remplacer (t) par $(+)$.

Sur les plis cachetés, par Bernard BRU

Des plis cachetés en général et du pli 11.668 en particulier

La procédure des plis cachetés est très ancienne, elle remonte aux origines même de l'*Académie des sciences*. L'un des premiers exemples connus est celui du dépôt par Jean Bernoulli, le 1er février 1701, d'un « paquet cacheté contenant les problèmes des *Isopérimètres* afin qu'il soit gardé et ne soit ouvert que quand les solutions des mêmes problèmes de Mr Bernoulli de Basle, son frère, paraîtront » ([Brian, Demeulenaere-Douyère 1996, p. 73]). La querelle des Isopérimètres est trop longue pour être racontée toute entière, on verra [Montucla 1802, pp. 317–328]. Elle oppose Jean Bernoulli (1667–1748) à son frère aîné, Jacques Bernoulli (1654–1705), professeur à Bâle, l'auteur de l'*Ars conjectandi* et du « théorème de Bernoulli ». Ce dernier, en effet, excédé des prétentions et de l'arrogance de son jeune frère qu'il a pourtant « introduit dans la carrière de la géométrie », l'a mis au défi en mai 1697 de résoudre complètement le problème dit des *Isopérimètres* qu'il a inventé tout exprès à cette occasion : « déterminer les fonctions positives f de périmètre donné sur un intervalle de base a, b, telles que l'intégrale d'une puissance de f sur cet intervalle soit maximum », problème remarquable de calcul des variations qui a exercé la sagacité des plus grands géomètres, Euler et Lagrange bien sûr mais aussi Weierstrass, Hilbert, Lebesgue et beaucoup d'autres ([Goldstine, 1980]). Il est possible toutefois que Jean Bernoulli, en utilisant la procédure du dépôt d'un paquet scellé à l'Académie parisienne, ait cherché surtout à marquer un point supplémentaire contre son frère qui, en réalité, avait déjà publié la première partie de sa solution en juin 1700 dans les *Acta eruditorum* de Leipzig. En feignant de ne pas en avoir connaissance, Jean Bernoulli pouvait s'en inspirer plus à son aise le moment venu, sous couvert d'un dépôt cacheté ; procédé efficace mais qui manque un peu de finesse, tant il paraît difficile d'admettre que Jean ait pu ignorer en février 1701 l'article de Jacques publié en juin 1700. À moins qu'il ne s'agisse d'une ruse au second degré, l'énormité même du mensonge lui ôtant toute vraisemblance et plaidant d'autant mieux pour la bonne foi de son auteur dont le génie mathématique est d'ailleurs hors de doute, comme celui de son frère Jacques, de son fils Daniel ou de son neveu Nicolas.

En dépit de ce mauvais exemple originel, la procédure des plis cachetés, depuis ce temps-là, sert à établir une antériorité dans la découverte d'un résultat scientifique, lorsque son auteur est momentanément empêché de le publier dans son intégralité et sans que personne ne puisse exercer à son encontre un contrôle quelconque ni en revendiquer la paternité. Elle a subsisté après la création en 1835 des *Comptes rendus de l'Académie des sciences* qui jouent un rôle comparable mais qui sont soumis dans une certaine mesure au jugement des académiciens du temps et ne permettent pas en général l'exposition des méthodes et des démonstrations. Elle est encore en usage actuellement et se trouve régie par le règlement de 1990 qui stipule qu'avant un délai de cent ans, un pli ne peut être ouvert qu'à la demande expresse de son auteur ou de ses ayant droit. Ce délai dépassé, une commission spéciale de l'Académie procède à l'ouverture du pli dans l'ordre de son enregistrement et décide s'il y a lieu de le publier. Un pli ouvert par l'Académie est classé dans la pochette des séances de la date d'enregistrement ou bien, depuis 1995, remis à sa place dans les cartons prévus à cet effet. Les dépôts cachetés sont numérotés en plusieurs séries. La série en cours a commencé le 2 janvier 1837 ; elle en est, au 10 octobre 2000, au numéro 17.492 et s'augmente chaque année régulièrement d'un nombre de plis compris entre 60 et 80, en diminution assez nette par rapport à la moyenne des années trente qui se situait autour de 120. La très grande majorité des plis ne sont pas ouverts par leurs auteurs et encore moins par les héritiers des déposants. Ils sont le plus souvent sans grand intérêt, mais il y a des exceptions notables. On trouve, à côté d'inventeurs incompris, obsessionnels et solitaires, quelques noms célèbres, Jean Bernoulli ou Henri Poincaré, par exemple (voir aussi Costabel [1984] et Berthon [1986]).

On peut s'interroger sur les raisons qui ont poussé Wolfgang Doeblin à recourir à la procédure des plis cachetés dans le cas de l'équation de Kolmogoroff. On est en février 1940, le printemps approche et avec lui l'offensive allemande prévisible. Doeblin n'a pas le temps de terminer la rédaction de ses résultats. Il ne peut envoyer son mémoire en l'état, il manque les références, il faudrait relire l'ensemble et compléter les démonstrations, peut-être un mois de travail au rythme que Doeblin peut fournir. D'autre part, il n'a encore rien publié sur le cas général de l'équation de Chapman qu'il a étudié dès 1938. Il décide d'arrêter là le cahier commencé en novembre 1939 et de se concentrer sur la rédaction de notes annonçant ses résultats du cas général. Que faire du cahier ? Il pourrait l'envoyer à Fréchet ou à Lévy, mais ni l'un ni l'autre ne sont tout à fait fiables. En 1938, Lévy a gardé dans ses tiroirs pendant plus d'un an le manuscrit du mémoire {11} sur la théorie métrique des fractions continues, que Doeblin lui demandait de présenter à la revue hollandaise *Compositio Mathematica* (voir [Cohn, p. 39]). Fréchet, surchargé de tâches diverses, a également tendance à oublier. D'ailleurs, il oubliera dans ses papiers, à son tour, les deux dernières notes rédigées par Doeblin sur l'équation de Chapman, qui ne seront publiées qu'en 1993 dans le volume de Blaubeuren. Et puis Doeblin le sait, le sujet de l'équation de Kolmogoroff est à la mode et depuis toujours il craint d'être devancé ou plagié par l'un ou l'autre (*e.g.* [Cohn, pp. 14–15, 57–58]). Il pourrait évidemment tronquer son manuscrit et envoyer la partie complètement rédigée à une revue et le brouillon du reste à son frère aux États-Unis, comme il l'a fait pour son étude de l'ensemble des puissances ({13}, 1940). Mais au fond la procédure des plis cachetés est la plus simple et la plus rapide ; le temps presse. Déjà pendant l'été 1938, alors que Hitler fait monter la tension internationale pour rafler la mise tchécoslovaque au risque d'une nouvelle guerre mondiale, Doeblin, qui a conseillé à ses parents de partir pour Trégastel en Bretagne ([Huguet, 1968, 1984]), cherche à mettre à l'abri ses travaux non encore publiés. Dans le registre des plis de l'Académie, on peut lire que, le 25 juillet 1938, avant de partir marcher dans le Jura et les Alpes, Wolfgang Doeblin a déposé deux plis cachetés (numéros 11.445, 11.446) qu'il est venu retirer fermés le 28 septembre, la veille de la signature des accords de Munich ([1]).

Le cas de Doeblin n'est pas unique ; d'autres savants ont utilisé la même procédure pendant la période incertaine des années 38–40. Par exemple, les travaux de Dedebant, Wehrlé et Kampé de Fériet sur la théorie statistique de la turbulence ont fait l'objet de quatre dépôts cachetés à l'Académie en 1938 et 1939, (voir l'exposé de ces travaux par Kampé de Fériet dans [Blanc-Lapierre Fortet, 1953]), ou encore la théorie de la fission nucléaire de Joliot, Halban et Kowarski a été déposée de la même façon en plusieurs fois entre 1939 et 1940. De sorte que certains des secrets atomiques les mieux gardés pendant la guerre se trouvaient rangés dans les greniers de l'Institut aux côtés de quelques démonstrations ingénieuses de la quadrature du cercle, les plans de diverses machines à mouvement perpétuel et l'équation de Kolmogoroff (sur les travaux du laboratoire Joliot à la fin des années trente, voir par exemple [Weart, 1979]). Le cas de dépôts provenant de secteurs postaux aux armées est plus exceptionnel. Outre le pli 11.668, deux autres envois seulement émanent de chercheurs mobilisés. Un pli de René Marconnet, adjudant au 103^e^ RALA, pli non ouvert ni retiré dont nous ne savons rien encore, déposé le 3 janvier 1940 et un autre de René de Possel, sous-lieutenant au 402^e^ RADCA (12^e^ groupe, 35^e^ batterie) déposé le 15 janvier 1940. Le registre précise que ce pli a été « rendu fermé à l'auteur le 22 août 1947 ». René de Possel, nommé professeur de Mécanique à Alger en 1941, a dû profiter des vacances pour venir le récupérer. Nous en ignorons également le contenu et il est difficile de l'imaginer. René de Possel (1905–1974), l'un des fondateurs de Bourbaki avec Henri Cartan et André Weil, s'intéressait, à l'époque, à la dérivation abstraite, à la théorie de la représentation conforme, au calcul des variations, à la théorie des jeux, mais aussi à divers problèmes de mécanique théorique et appliquée. Il n'est pas invraisemblable qu'il ait profité de sa mobilisation dans le tir contre avion pour mettre au point par exemple un nouveau système d'attelage des canons de 75 (modèle 1916) dont sa batterie était équipée (qui se révélèrent remarquablement inefficaces, les bombardiers allemands volant plus haut que leur portée maximale).

Doeblin décide donc, vers le milieu du mois de février 1940, de recourir de nouveau à la procédure des plis cachetés. Il a, plus que jamais, l'angoisse de mourir sans avoir pu faire connaître les résultats de ses recherches. Aussi prend-il deux précautions supplémentaires : il prévient Fréchet de son envoi dans une lettre du 12 mars 1940 [Cohn, p. 30], et fait parvenir à l'Académie un duplicata de son mémoire par courrier séparé enregistré le 13 mars 1940. La guerre sera de courte durée, pense-t-il, il pourra récupérer bientôt son manuscrit, comme à la fin de l'été 38, ou bien Fréchet s'en chargera. Tout semble prévu, sauf ce qui va arriver.

Doeblin meurt le 21 juin 1940. Ses manuscrits sont dispersés en plusieurs endroits : à Philadelphie chez son frère aîné Peter, le second manuscrit complet sur l'ensemble de puissances {13} et le brouillon de la démonstration du théorème de caractérisation. À Zurich, chez le docteur Sigmund Pollag, le brouillon de la théorie générale des chaînes {12}. À Paris, dans les caves de la Sorbonne, avec les papiers de son père, d'autres brouillons et ses papiers personnels [Huguet, 1968]. Chez Fréchet, rue Émile-Faguet, deux projets de notes aux *Comptes rendus*. Et finalement à l'Académie, le pli cacheté 11.668.

Mais la guerre a duré cinq ans. Lévy a dû se cacher sous un nom d'emprunt. Il a eu, lui aussi, recours à la procédure des plis cachetés [1943], pour d'autres raisons, que l'Académie n'avait pas prévues, les interdictions raciales. La vie à la Libération est difficile, Fréchet, qui vient de perdre sa femme renversée par un camion militaire américain, se préoccupe surtout de nourrir ses petits enfants. Il a visiblement oublié le pli et les notes de Doeblin dont le décès n'est connu officiellement qu'au printemps 1944. Il ne s'intéresse plus à la théorie des événements en chaîne ni à l'équation de Chapman, domaine désormais réservé à Lévy qui prépare un livre important sur le sujet [1948]. Il n'oublie pas pour autant Doeblin. Au Congrès de la Victoire de l'AFAS, réuni à Paris fin octobre 1945, c'est Fréchet, titulaire de la Chaire parisienne de calcul des probabilités et physique mathématique, qui présente l'ensemble des travaux probabilistes et statistiques français sous l'Occupation. Il commence son exposé par un hommage « ému » à la mémoire de Wolfgang Doeblin « d'origine allemande mais naturalisé français avant la guerre » : « De toute son âme, écrit-il, il a voulu, quand la guerre a éclaté, témoigner sa reconnaissance envers sa patrie d'adoption en se battant fougueusement pour elle. C'est l'impression que m'avaient laissée mes conversations avec lui... Mais dans cette lutte ardente il a trouvé la mort le 22 juin 1940 (sic). Il faut espérer qu'il sera possible de retrouver les papiers mathématiques envoyés par lui à ses parents d'Amérique et, en tout cas, de faire un exposé d'ensemble de la riche suite des travaux qu'il a publiés en l'espace de quelques années ». [Fréchet, 1947, p. 107], voir aussi [Denjoy, 1947, p. 9]. En note Fréchet a ajouté que depuis la conférence, il a eu la satisfaction de recevoir les papiers dont il s'agit de la main des parents de Wolfgang Doeblin et qu'il s'occupe de leur publication. En fait, nous l'avons dit, les papiers d'Amérique consistent en la seconde copie du mémoire sur les ensembles de puissances déjà publié en 1940 dans la revue *Studia Mathematica* ({13}, 1940), augmenté d'un paragraphe supplémentaire (§ 20, théorèmes XII et XIII de {13}, 1947) et du brouillon de la seconde partie de ce mémoire rédigé à Givet, qui doit contenir le théorème de caractérisation des domaines d'attraction partielle. Fréchet a aussitôt fait republier dans les *Annales de l'ENS* toute la première partie du mémoire de Givet, en indiquant, en note introductive, que le manuscrit a été relu par Loève et Fortet et « surtout un ami anonyme de l'auteur qui a introduit avec discrétion de nombreuses améliorations de détail, mais qui a dû, de crainte de trahir la pensée de l'auteur, se résigner à laisser subsister quelques lacunes et quelques obscurités ». Cet « ami anonyme » n'est autre que Paul Lévy qui avait conservé les épreuves corrigées de sa main du mémoire de Doeblin, épreuves qui se trouvent avec toutes les archives scientifiques de Lévy à la bibliothèque de Mathématiques-recherche des Universités Paris-6 et Paris-7. Fréchet annonçait également que la « suite du mémoire, en ce moment à la révision, paraîtra plus tard si son état d'achèvement très imparfait le permet ». Cette suite ne paraîtra jamais, elle est d'ailleurs volontairement illisible. Sur les conseils de Lévy, elle est déposée aux Archives de l'Académie des sciences (dossier Doeblin).

Fréchet et Lévy se sont donc occupés activement de publier les derniers manuscrits de Doeblin ; on ne peut les accuser de négligence, de désintérêt ou de malveillance à cet égard. Il paraît évident qu'ils auraient édité de la même façon le mémoire sur l'équation de Kolmogoroff, s'ils en avaient eu connaissance, tout indiquant qu'il deviendrait un classique de la théorie. Dans son exposé sur l'état du calcul des probabilités en France [1947], Fréchet évoque bien les deux notes {CR9,10} mais de telle façon qu'on peut penser qu'il n'en a pas retenu grand chose et qu'il n'a plus aucun souvenir de la correspondance de Doeblin à ce sujet, ni par conséquent du mémoire déposé cacheté ou des notes sur ce thème. Quant à Lévy, dans son étude de l'œuvre de Doeblin [1955], il rappelle simplement le théorème local du logarithme itéré pour les mouvements réguliers de la note {CR9} et conclut : « La mort prématurée de l'auteur l'a empêché de développer cette note. Malgré les quelques pages consacrées à ces questions par P. Lévy ([1948], pp. 75–78), cette note et celles qui l'ont suivie devraient sans doute inspirer de nouvelles recherches » [1955, p. 111].

Dans le courant de l'année 1947, Erna Döblin, la mère de Wolfgang, parvient à regrouper tous les manuscrits de son fils, à l'exception bien sûr du pli et des notes reçues par Fréchet dont elle ignore l'existence. Elle est liée d'amitié avec Denise Piron, l'une des filles de Paul Lévy, et reprend contact avec ce dernier pour décider ce qu'il y a lieu de faire de cet ensemble de textes, dans le plus grand désordre, certains illisibles, d'autres déjà publiés. Lévy, malgré sa bonne volonté manifeste, ne sait trop que dire. Il faudrait sans doute en joindre une partie au dossier Doeblin de l'Académie. C'est une procédure qui a déjà servi pour les papiers personnels de René Gateaux, mort pour la France en octobre 1914, dont Lévy a édité les derniers mémoires posthumes sur l'intégration à une infinité de variables [Gateaux, 1919]. Mais les choses en restent là. Dix ans plus tard, alors que certains probabilistes, américains pour une part, découvrent l’œuvre étonnante de Doeblin sans plus savoir de qui il s’agit, Lévy, répondant ainsi aux voeux formulés par Fréchet en 1945, publie la première biographie scientifique de Wolfgang Doeblin et tente de reprendre l’étude de son œuvre manuscrite mais il ne paraît pas avoir progressé sensiblement [Lévy, 1955, 1956]. On ne parle plus de Doeblin à Paris, d’ailleurs on ne parle plus de la guerre, de la débâcle, de l’occupation. Les silences seuls parlent encore de ces années noires.

En 1957, à quelques mois d’intervalle, Alfred puis Erna Döblin meurent. Avant son suicide, Erna Döblin a confié aux Archives littéraires allemandes de Marbach, tous les manuscrits de son mari dont l’œuvre est alors presque oubliée. Elle n’a gardé que les papiers personnels de Wolfgang, son fils adoré, et divers brouillons (dont le manuscrit du séminaire Hadamard publié en annexe). Cet ensemble de manuscrits est sauvé par Claude Doblin, le frère cadet de Wolfgang, qui les conserve à son domicile de Nice ; il les laissera en dépôt à Marbach vers la fin des années 80.

Cinquante ans ont passé, à l’initiative de K.L. Chung et H. Cohn, avec le concours de A. Blanc-Lapierre, J. Gani, H. Hering et M. Iosifescu, une conférence à la mémoire de Doeblin, présidée par J.L. Doob, est organisée à l’Institut Heinrich Fabri de Blaubeuren en Allemagne, du 2 au 7 novembre 1991, voilà qui constitue un événement propice à une relecture de l’œuvre inachevée de W. Doeblin, et un retour sur les manuscrits non publiés (voir [Cohn, 1993]).

Il se trouve que les archives de Maurice Fréchet ont été déposées à l’Académie des sciences par sa famille. Fréchet a tout gardé, ses cahiers de cours lorsqu’il était élève, les manuscrits de ses publications, tous les tirés à part qu’on lui envoie du monde entier sur tous les sujets, les textes de ses conférences, ses notes de cours universitaires à Strasbourg et à Paris et bien sûr toutes les lettres qu’il a reçues au cours de sa très longue vie scientifique, des dizaines de correspondants, toute l’école de Moscou, celles de Pologne, de Roumanie, de Bulgarie, de Tchécoslovaquie, de Grèce, des États-Unis, les principaux analystes du XX^e siècle, mais aussi les statisticiens, Fisher, Neyman, Pearson père et fils, et tous les Français, en particulier Lévy (dont la correspondance, très riche, est éditée par B. Locker dans sa thèse [2001]), et bien sûr Doeblin. Parmi la vingtaine de lettres de Doeblin à Fréchet, se trouve la lettre du 12 mars 1940 annonçant l’envoi du pli cacheté sur l’équation de Kolmogoroff. Il était alors facile de vérifier que le pli n’avait jamais été ouvert, qu’il était toujours aux Archives de l’Académie des sciences.

Entre temps, l’œuvre importante d’Alfred Döblin, longtemps négligée ([2]), a connu un regain d’intérêt. La publication de ses œuvres complètes est entreprise ; c’est l’occasion, comme souvent, de négociations difficiles et de règlements complexes. Divers contretemps en ont résulté, différant la demande d’ouverture du pli. Grâce notamment aux efforts de Pierre Dugac, membre de la Commission des plis cachetés, Claude Doblin a finalement pu présenter cette demande à l’Académie en mai 2000 et la Commission, conformément au règlement de 1990, a procédé, lors de sa séance du 18 mai 2000, à l’ouverture du pli 11.668, enregistré le 26 février 1940. Le pli de Doeblin a été confié à l’examen scientifique de J.-P. Kahane et M. Yor. La longue nuit du dernier manuscrit de Wolfgang Doeblin prend fin.

([1]) Une lettre adressée à Sigmund Pollag, datée du 23 septembre 1938, indique assez bien l’état d’esprit de Doeblin au moment de la crise tchécoslovaque, alors qu’il sait qu’il va être incorporé en octobre 1938. Nous la reproduisons ci-dessous en allemand puis en traduction française rapide. Doeblin est alors à Paris et fait le point de ses travaux avant son départ au Service militaire. Il est persuadé que la guerre va éclater et que Paris sera bombardé.

Sehr geehrter Herr Pollag,

Ich möchte Sie, wenn Sie es gestatten, um einen Dienst bitten, nämlich um die Aufbewahrung eines Manuskriptes. Ich werde im Oktober oder früher zum Regiment einrücken. Ich gestehe dass ich für meine Person keine grosse Angst habe, Mangel an Vorstellungsvermögen sehr wohl aber für meine wissenschaftlichen Arbeiten. Im Falle eines Krieges würden selbstverständlich meine im Laufe befindlichen oder noch nicht redigierten Arbeiten verloren gehen, damit habe ich mich abgefunden. Mehr ärgert mich dass bisher nur meine 1936 gefunden Resultate veröffentlicht sind, und dass von meinen 6 augenblicklich im Druck befindlichen oder auf Druck wartenden Memoiren, 3 in Frankreich sind, in der Tchechoslowakei gedruckt werden, und zum Teil Mitte 1939 erscheinen werden. Darunter befindet sich meine beste Arbeit von der nur ein sehr kurzes Résumé in den Comptes Rendus de l'Académie des sciences erschienen ist und die wahrscheinlich noch bis Ende dieses Jahres in einem Bureau de l'Institut de France warten wird. Während ich glaube die meisten meiner anderen Sachen im Falle einer Vernichtung der Manuskripte wiederherstellen zu können, weiss ich nicht ob es mir bei dieser Arbeit so leicht gelingen würde. Ich würde daher gern einem Brouillon meines Manuskriptes in relative Sicherheit bringen. Wenn es Ihnen nichts ausmacht und Sie es gestatten, würde es mich sehr beruhigen wenn ich Ihnen eine Enveloppe schicken könnte, die etwa 30 jedem anderen als mir völlig unverständliche Manuskriptseiten enthält.

Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mitteilen würden, ob Sie mir gestatten können Ihnen diese Enveloppe zu senden.

Im übrigen habe ich meine Ferien im Jura und in der Haute Savoie verbraucht, mir auch zu Fuss ein Stück Schweiz angesehen : les Montagnes Franches, les Gorges du Taubenloch, Chasseral, la Chaux de Fonds, Saut du Doubs, Lausanne, St-Cergue, la vallée de la Joux, etc.

Meinen Eltern geht es gut.

Viele Grüsse
W. Doeblin

(Très cher Monsieur Pollag,

Je voudrais, si vous le permettez, vous demander un service, c'est de garder un manuscrit. En octobre ou peut-être plus tôt, je partirai au Régiment. J'avoue que, pour ma personne, je n'ai pas peur, par manque d'imagination, par contre, j'ai peur pour mes travaux scientifiques. En cas de guerre, il est certain que mes travaux non encore terminés et rédigés se perdraient ; je me suis fait à cette idée. Ce qui m'énerve davantage est le fait qu'à ce jour seuls mes résultats obtenus en 1936 ont été publiés et que, de mes 6 mémoires actuellement en attente d'impression, 3 se trouvent en France, sont imprimés en Tchécoslovaquie et paraîtront en partie au milieu de l'année 1939. Parmi ces documents se trouve mon meilleur travail dont seulement un résumé très court a été publié dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences et qui attendra probablement jusqu'à la fin de cette année dans un Bureau de l'Institut de France. Alors que je crois pouvoir reconstituer la plupart de mes autres résultats en cas de destruction des manuscrits, je ne sais pas si j'y arriverai si facilement en ce qui concerne ce travail... Je serais beaucoup plus tranquille si je pouvais vous envoyer une enveloppe qui contiendra environ 30 pages manuscrites complètement incompréhensibles pour quiconque en dehors de moi.

Je vous serais reconnaissant si vous pouviez me dire si vous acceptez que je vous envoie cette enveloppe etc.)

Le « meilleur travail » dont parle Doeblin est le mémoire {12} sur la théorie générale des chaînes. C'est un travail effectué au printemps 1937 qui a fait l'objet d'une note aux Comptes rendus en juillet 1937 {CR5}. Doeblin a dû parachever la rédaction du mémoire correspondant pendant l'hiver 1937-1938. Il a été accepté par les *Annales de l'ENS* en mars 1938 et déposé à l'Institut auprès de P. Gauja chargé des publications, le 21 juillet 1938, après que Fréchet l'ait relu. Il ne sera publié qu'en 1940 après divers retards dus peut-être à la crise tchécoslovaque. Doeblin a donc raison de s'inquiéter. Ce mémoire, très impressionnant, est analysé en détails dans [Chung, 1964, 1992], voir aussi [Lindvall, 1991, p. 930]. Le brouillon dont il est question est vraisemblablement l'un des plis cachetés déposés à l'Académie en juillet 1938 et retiré fermé le 28 septembre de la même anée. Il a été adressé au docteur Pollag à Zurich fin septembre 1938, dans une enveloppe (cachetée) portant la mention : « Dans le cas où je ne serai pas en mesure de réclamer ces démonstrations, prière de les donner à G. Pólya, professeur ETH », voir [Cohn, pp. 8, 41]. L'enveloppe a été récupérée par Erna Döblin en 1947 et se trouve actuellement aux Archives de Marbach.

([2]) L'oubli est partagé entre la France et l'Allemagne et d'ailleurs une part importante de la communauté internationale. L'œuvre d'Alfred Döblin n'a été longtemps appréciée en France que des seuls germanistes, Ernest Tonnelat et Robert Minder notamment. Certes, *Berlin Alexanderplatz* a été traduit en français en 1933 mais aucune de ses œuvres ultérieures ne sera accessible au lecteur français avant les années 80. Il est vrai que Döblin, l'un des pionniers de l'idée européenne, ne fait aucune concession aux chauvinismes franco-allemands ; par exemple, dans sa tétralogie *Novembre 1918*, [1990], il s'intéresse au mouvement indépendantiste alsacien et ses essais de démystification de la guerre et de l'héroïsme ne plaisent pas à tout le monde. De leur côté les Allemands n'ont pas pardonné à Alfred Döblin, antinazi de la première heure, d'être rentré dans son pays vaincu, en 1945, avec les troupes d'occupation françaises et d'avoir censuré, en uniforme de colonel français, les écrivains allemands. Juif territorialiste puis antiterritorialiste et antisioniste, converti en 1940 à un catholicisme mystique peu orthodoxe, brouillé avec la plupart des écrivains allemands de son temps, peu apprécié aux États-Unis où ses ambiguïtés révolutionnaires effraient les éditeurs et où il a vivoté pendant la guerre, Alfred Döblin qui est revenu habiter Paris en 1953, est isolé, oublié. Son dernier roman, achevé en 1946 à Baden-Baden, ne sera publié en allemand qu'en 1956 (par un éditeur de l'Est) et en français seulement en 1989. Destin tragique des Franco-Allemands que Wolfgang Doeblin partage d'une certaine façon. Le soldat Doblin, qui se bat pour débarrasser l'Europe du national-socialisme, est un traître pour l'Allemagne et un héros encombrant ou méconnu pour la France : dérision, incompréhension et héroïsme mêlés, autant de thèmes dübliniens avec cette vision esthétique et poétique dont le pli conserve la trace et que Wolgang Doeblin voulait sans doute offrir lui aussi à « tous ceux qui logent dans une peau d'homme et qui attendent de la vie autre chose qu'une tartine de beurre » (A. Döblin , dédicace de *Berlin Alexanderplatz*), (on pourra également lire [Huguet, 1968], [Hombourger, 1976], [Heller, 1981, p. 198], [Neumann, 1987], [Schwartz, 1997, p. 313], [Badia, 2000], etc.).

PLIS CACHETÉS

– Extrait des Statuts en vigueur –

Article 87 – L'Académie des sciences accepte, dans une forme et sous des conditions qui sont communiquées à tout demandeur, le dépôt de plis cachetés. Ceux-ci ont pour but de donner une date certaine aux découvertes qu'ils sont supposés contenir sans avoir recours à une publication.

Article 88 – Le dépôt d'un pli cacheté ne confère pas les prérogatives légales d'un brevet et ne peut y suppléer.

Article 89 – Les plis sont ouverts à la demande du dépositaire ou de ses héritiers. À défaut, l'Académie se réserve le droit, cent ans après le dépôt, d'ouvrir les plis et d'en publier, conserver ou détruire ce qu'elle juge à propos.

- *RÈGLEMENT INTÉRIEUR (18/6/1990)* –

87-1 – L'Académie des sciences accepte le dépôt des plis cachetés dans ses Archives, dans le but de donner une date certaine aux découvertes qu'ils sont supposés contenir sans avoir recours à leur publication. Ce dépôt ne confère pas les prérogatives légales d'un brevet et ne peut y suppléer.
Le nom et l'adresse de l'auteur doivent être inscrits lisiblement sur le pli, dont les dimensions ne doivent pas dépasser 38 cm × 25 cm × 1,5 cm. Les plis ne seront pas obligatoirement scellés à la cire, mais l'emploi de bandes adhésives n'est pas accepté. L'indication du titre du document contenu dans le pli est facultative.
Le pli, ainsi préparé, est adressé, sous une deuxième enveloppe, aux Secrétaires perpétuels de l'Académie, avec une lettre demandant l'acception du dépôt.
Le nombre de plis cachetés pouvant être déposés par un même auteur, en une année est limité à deux.
La date d'acceptation du dépôt et un numéro d'ordre sont inscrits sur le pli, sur un registre spécial et sur l'accusé de réception, qui est envoyé à l'auteur, par les soins du secrétariat.

87-2 – L'auteur d'un pli déposé peut en demander le retrait. La demande, écrite et signée par lui, doit être accompagnée de l'accusé de réception. La date du retrait est inscrite sur le pli et sur le registre spécial.
Le pli est rendu fermé à l'auteur.

87-3 – L'auteur d'un pli déposé peut en demander l'ouverture. Cette demande doit être écrite et signée par lui et accompagnée du reçu. Le pli est ouvert en séance par le Bureau qui, après avoir pris connaissance de son contenu et l'avoir soumis, s'il y a lieu à l'examen d'une Commission, propose à l'Académie l'insertion dans ses publications de tout ou partie du document ou simplement son classement dans les Archives. Mention en est faite au procès-verbal de la séance et au registre spécial.
Sauf circonstance exceptionnelle que le Bureau apprécierait, l'ouverture d'un pli cacheté ne peut être faite qu'un an après le dépôt.

87-4 – Lorsque l'auteur d'un pli déposé est décédé, l'Académie tient à lui assurer la priorité de la découverte dont il est possible que la science lui soit redevable : en conséquence, ses héritiers peuvent demander l'ouverture du pli, mais non son retrait. La demande doit être accompagnée des pièces notariées établissant le décès de l'auteur et la qualité des requérants. Une commission, nommée à cet effet par l'Académie, procède à l'ouverture du pli en présence, s'ils le désirent, des héritiers et après vérification des pièces susmentionnées. La commission, après avoir pris connaissance du contenu du pli, propose à l'Académie, si elle le juge à propos, l'insertion dans ses publications de tout ou partie du document ou décide simplement son classement dans les Archives. Les héritiers sont alors autorisés à en faire prendre copie au secrétariat.

87-5 – Lorsque le pli a été déposé par plusieurs auteurs : tant qu'ils sont vivants, la demande de retrait ou d'ouverture doit être signée par tous ; si certains sont morts, l'ouverture pourra – mais non le retrait – être demandée, conjointement, par les survivants et les héritiers qualifiés des morts.

87-6 – L'Académie se réserve le droit, cent ans après le dépôt, d'ouvrir les plis et d'en publier, conserver ou détruire ce qu'elle juge à propos.