C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 1059–1102, 2000

Partie II

Sur l'équation de Kolmogoroff

par Wolfgang DOEBLIN

Accepté en la séance du 26 février 1940
enregistré sous le n° 11.668
Signé : A. Lacroix
Pli ouvert le 18 mai 2000 par la Commission des plis cachetés.

Le manuscrit ci-joint a été écrit au cantonnement de novembre 1939 à février 1940. Il n'est pas absolument complet et son extérieur se ressent des conditions matérielles dans lequel il a été écrit.

W. Doeblin

(1)

Recherches sur l'équation de Kolmogoroff ([1])

Définition de l'équation de Kolmogoroff

Considérons une particule mobile se mouvant aléatoirement sur la droite (ou sur un segment de droite). Supposons qu'il existe une probabilité $F(x,y;s,t)$ bien définie pour que la particule se trouvant à l'instant s dans la position x se trouve à l'instant t ($> s$) à gauche de y, probabilité indépendante du mouvement antérieur de la particule. Nous supposerons $F(x,y;s,t)$ mesurable (B) par rapport à x, s et t et solution de l'équation fonctionnelle

$$F(x,y;s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z,y;u,t)\,\mathrm{d}F_z(x,z;s,u).$$

Nous supposons de plus que les limites suivantes existent (sauf pour certains points « singuliers » variant d'une façon continue avec le temps et en nombre fini dans tout intervalle fini)

$$\lim_{t\to s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<1} (y-x)\,\mathrm{d}F(x,y;s,t) = a(x,s) \tag{1}$$

([1]) *cf.* C. R. 1938.

Note de la rédaction : on a préservé la numérotation des pages et des paragraphes telle qu'elle figure dans le manuscrit, les pages sont insérées en encadré et sont indiquées en italique entre parenthèses *(1)*, *(2)*, etc. Bien entendu, les notes de bas de page sont celles de Doeblin.

S0764-4442(01)01847-X/MIS

(2)

(2) $$\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\int_{|y-x|<1}(y-x)^2\,\mathrm{d}F(x,y;s,t)=\sigma^2(x,s),$$

(3) $$\lim_{t\to s}\int_{|y-x|>\eta}\mathrm{d}F(x,y;s,t)=\mathrm{o}(t-s),\quad \text{quel que soit }\ \eta.$$

Si x est un point singulier à l'instant s, on a seulement (3). Nous supposons que les limites (1) et (2) ont lieu uniformément et que $a(x,s)$ et $\sigma^2(x,s)$ sont continues par rapport à x et s en tout intervalle fini ne contenant pas de points singuliers, (3) ayant lieu uniformément par rapport à x. Nous supposons de plus qu'on a

$$\lim_{t\to s}\ \overline{\lim_{x\to\infty}}\ \big[1-F(x,y;s,t)\big](t-s)^{-1}=0$$
$$\lim_{t\to s}\ \overline{\lim_{x\to-\infty}}\ F(x,y;s,t)(t-s)^{-1}=0$$

Si toutes ces conditions sont satisfaites nous disons que le mouvement est régulier. Nous n'envisagerons que des mouvements réguliers.

2) La position de la particule à l'instant s sera dénotée $X(s)$. Soit $Y(s)=X(s)/\big(1+|X(s)|\big)$.

PROPOSITION I. – *La fonction $Y(t)$ est presque-sûrement continue* ($X(t)$ *pas nécessairement*).

Remarque. – L'énoncé doit être compris de la façon suivante : $Y(s)$ étant donné,
$S(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ étant un ensemble

(3)

fini d'instants de (s,t), la probabilité pour qu'il existe un couple d'instants (t_i,t_j) de S avec $|t_i-t_j|<\varepsilon$ et $|Y(t_i)-Y(t_j)|>\varepsilon'$ est $<\eta(\varepsilon,\varepsilon',s,t)$ quelque soit l'ensemble fini S, $\eta(\varepsilon,\varepsilon',s,t)$ tendant vers 0, si $\varepsilon\to 0$. [$\eta(\varepsilon,\varepsilon',Y(s),t)$, $Y(s)$ *rayé*]

Démonstration. – Nous allons prouver qu'on a

$$\Pr\big\{|Y(t)-Y(t')|>\varepsilon/2\big\}<\Delta(t'-t)$$

quel que soit $Y(t)$ si $|t'-t|<\eta$, η pouvant être pris arbitrairement petit si Δ est suffisamment petit, la proposition en découlera en vertu d'un raisonnement bien connu. Or par hypothèse

$$\lim_{t'\to t}\ \overline{\lim_{x\to\infty}}\ \big[1-F(x,y,t,t')\big](t'-t)^{-1}=0$$

et nous supposons que cette limite a lieu uniformément par rapport à t. Prenons

$$1-\frac{y}{1+y}=\frac{\varepsilon}{2}$$

nous pouvons prendre $\overline{x}$ et Δ' tel que si $|t'-t|<\Delta'$ on ait

$$F(-x,-y,t,t')+1-F(x,y,t,t')<\Delta'(t'-t)$$

si $x>\overline{x}$. D'autre part si $0\leqslant x<\overline{x}$, on a si $|t'-t|<\Delta''$

$$\operatorname{Pr}\left\{|X(t)-X(t')|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}<\Delta(t'-t)$$

donc a fortiori

$$\operatorname{Pr}\left\{|Y(t)-Y(t')|>\varepsilon/2\right\}<\Delta(t'-t)$$

Prenons $\eta=\min(\Delta',\Delta'')$ on a bien

$$\operatorname{Pr}\left\{|Y(t)-Y(t')|>\varepsilon/2\right\}<\Delta(t'-t)$$ c. q. f. d.

(4)

Nous allons montrer que $X(t)$ *peut être discontinue.*
Considérons un mouvement ayant lieu sur la demi droite des $x>0$ défini par

$$F(x,y;s,t)=\int_0^y p(x,z,s,t)\,\mathrm{d}z$$

$$p(x,z,s,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2(t-s)}}+\mathrm{e}^{-\frac{(z+x)^2}{2(t-s)}}\right] \tag{1}$$

$$a(x,s)=0,\quad \sigma(x,s)=1\quad \text{(pour } x>0)$$

[*rayé* c'est le mouvement] Si l'on considère une particule soumise au mouvement brownien sur la droite illimitée ($p(x,y,s,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left[-\dfrac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right]$) et si l'on replie la droite sur elle-même à l'origine on obtient le mouvement sur la demi droite définie par (1). [*rayé* Posons $Z(t)=X(t)+1/X(t)$]

$X(t)$ est visiblement continu, mais a une probabilité positive de s'annuler, plus exactement la probabilité pour qu'il y ait un $X(u)<\varepsilon$ dans l'intervalle de temps (s,t) est [*rayé* positive] $>a(X(s),t-s)>0$.
Posons $z=x+1/x$, on obtient un mouvement dans l'intervalle $(1,\infty)$, toujours régi par l'équation de Kolmogoroff et on a

$$Z(t)=X(t)+1/X(t)$$

est discontinu avec probabilité positive. C. q. f. d.

(5)

3) Mouvement gaussien local.

Supposons $X(s)=x$, x étant un point régulier des données à l'instant s, $\sigma(x,s)$ étant $\neq 0$. Envisageons $[X(t)-X(s)]/\sqrt{t-s}$. Nous pouvons écrire

$$X(s+\Delta)-X(s)=\sum_1^n\left(X\left(s+\frac{i}{n}\,\Delta\right)-X\left(s+\frac{i-1}{n}\,\Delta\right)\right)$$

Si Δ est suffisamment petit la probabilité pour qu'il y ait un des $\left|X\left(s+\frac{i}{n}\,\Delta\right)-X(s)\right|>\varepsilon$ est $<\varepsilon/2$ et nous pouvons trouver n tel que la probabilité pour qu'on ait un des $\left|X\left(s+\frac{i}{n}\,\Delta\right)-X\left(s+\frac{i-1}{n}\,\Delta\right)\right|>\varepsilon\Delta$ soit $<\varepsilon$. Posons

$$\Delta_i=X\left(s+\frac{i}{n}\,\Delta\right)-X\left(s+\frac{i-1}{n}\,\Delta\right)$$

Si $\left|X\left(s+\frac{i-1}{n}\,\Delta\right)-X(s)\right|<\Delta$, posons $\overline{\Delta}_i=\Delta_i$ si $|\Delta_i|<\varepsilon\Delta$
$=0$ dans le cas contraire

Si $\left|X\left(s+\frac{i-1}{n}\,\Delta\right)-X(s)\right|>\Delta$, nous prenons pour $\overline{\Delta}_i$ une variable quelconque dont l'espérance mathématique est $a(x,s)\,\frac{\Delta}{n}$, l'écart-type $\sigma(x,s)\sqrt{\frac{\Delta}{n}}$ avec $\mathbb{E}\big|\overline{\Delta}_i^3\big|<\varepsilon\,\frac{\Delta^2}{n}\,\sigma^2$.

On a quel que soit $\pm X\left(s+\frac{i-1}{n}\,\Delta\right)$

$$\mathbb{E}'[\overline{\Delta}_i]=[a(x,s)+\eta]\,\frac{\Delta}{n}$$

$$\mathbb{E}'[\Delta_i^2]=[\sigma^2(x,s)+\eta']\,\frac{\Delta}{n}\cdots$$

$$\mathbb{E}'[\Delta_i^3]<\varepsilon\Delta\,\mathbb{E}[\Delta_i^2]$$

$\mathbb{E}'$ indiquant l'espérance mathématique évaluée si $X\left(s+\frac{i-1}{n}\,\Delta\right)$ est déterminée, η et η' étant extrêmement petits. Il résulte alors facilement ([1]) que la fonction caractéristique de

([1]) (*cf.* p. ex. S. Bernstein : *Math. Ann.*, t 1927)

(6)

$\left[\sum_1^n\overline{\Delta}_i-\Delta a(x,s)\right]\Delta^{-1/2}$ tend si $\Delta\to 0$ vers $\exp\left\{-\sigma^2(x,s)\,\frac{t^2}{2}\right\}$. [*rayé* : la loi de probabilité de]

$\sum_1^n\Delta_i$ ne diffère de $\sum_1^n\overline{\Delta}_i$ que dans des cas de probabilité arbitrairement petite, la loi de probabilité de $\left[\sum_1^n\Delta_i-\Delta a(x,s)\right]\Delta^{-1/2}$ tend donc si $\Delta\to 0$ vers la loi de Gauss avec l'écart-type $\sigma(x,s)$.

On peut dire :

Si $\sigma(X(s), s)$ est différent de 0, le déplacement local ΔX résulte de la superposition d'un déplacement non-aléatoire avec la vitesse $a(x, s)\Delta$ et d'un mouvement aléatoire gaussien dont l'écart-type est $\sigma(x, s)\sqrt{\Delta}$ (nous appellerons $\sigma(x, s)$ l'amplitude du mouvement gaussien) et dont la moyenne est nulle.

Localement le mouvement non aléatoire, étant de l'ordre de Δ, est négligeable par rapport au mouvement gaussien. Il n'en est pas ainsi lorsque Δ cesse d'être infiniment petit. Il est à remarquer que la décomposition du mouvement indiqué ci-dessus n'est pas invariante lorsqu'on fait un changement de variables [*rayé* : $Y = \varphi(X)$, $t' = t$, ou $Y =$], même si celui ci n'a que la forme simple $x' = \varphi(x)$, $y' = \varphi(y)$, $t' = t$, $s' = s$.
Si $\sigma = 0$, $[X(s + \Delta) - X(s)]$ est, en dehors de cas de probabilités $\Xi(\Delta)$, $0(\Delta)$.
[Ξ *que D. dessine comme un rectangle veut dire tend vers zéro sans idée d'ordre*]

[*Pages rayées* 7, 8, 9 ; voir notes]

(10)

3) La particule mobile décrit dans le plan (x, t) une courbe dont l'équation est $x = X(t)$. Étant donné une courbe continue $x = z(t)$, pouvons-nous parler de la probabilité pour que notre particule partant du point (x, s) franchit ([1]) resp. atteigne la courbe $z = z(u)$ avant l'instant t ?

$S = S(t_1, \ldots, t_n)$, ($s < t_1 < t_2 \cdots < t_n < t$), étant un ensemble fini d'instants, soit P_S la probabilité pour qu'il y ait un $X(t_i) > z(t_i)$. Soit $\overline{P}$ la borne supérieure de P_S lorsque l'ensemble fini S varie. Soit $\underline{P}$ la limite inférieure de la probabilité P_S pour les ensembles S lorsque $t_1 - s \to 0$,. . .,$t_i - t_{i-1} \to 0$,. . .,$t - t_n \to 0$. Prouvons que $\overline{P} = \underline{P}$.

Nous pouvons trouver un ensemble $S(t_1, \ldots, t_n)$ tel que $|\overline{P} - P_S| < \eta$. Nous pouvons alors trouver η' tel que la probabilité P'_S pour qu'on ait un $X(t_i) > z(t_i) + \eta'$, satisfasse à $|P'_S - \overline{P}| < 2\eta$.

D'autre part quel que soit η'' nous pouvons prendre S' tel que $|P_{S'} - \underline{P}| < \eta$ et que S' contient des nombres t'_i avec $|t'_i - t_i| < \eta''$. Si η'' est suffisamment petit on aura (n$^{\text{o}}$ 1) en dehors de cas de probabilité $< \eta$, $|Y(t_i) - Y(t'_i)| < \eta'''$ pour tout i. Déterminons η''' de telle sorte que

([1]) $z(s) > X(s)$!

(11)

$X(t_i) > z(t_i) + \eta'$, $|Y(t_i) - Y(t'_i)| < \eta'''$ entraîne $X(t'_i) > z(t'_i)$. La probabilité [*rayé* pour que] $P_{S'}$ est évidemment au moins égale à la probabilité pour qu'il y ait un $X(t'_i) > z(t'_i)$, probabilité que nous appellerons q. On a alors :

$$\underline{P} + \eta \geqslant P_{S'} \geqslant q > P'_S - \eta > \overline{P} - 3\eta$$

ce qui prouve bien que $\overline{P} = \underline{P}$

Nous pouvons donc parler de la probabilité pour que notre particule franchit la courbe continue $z = z(u)$ avant l'instant t et nous la poserons $= \overline{P}$.

$\overline{P}_\varepsilon$ étant la probabilité pour que la particule franchisse la courbe $z' = z(t) - \varepsilon$, la probabilité pour que la particule atteigne $z = z(t)$ sera évidemment la limite de $\overline{P}_\varepsilon$ lorsque ε tend vers zéro.

4) Dans certains cas on a à envisager l'espérance mathématique de $X(t) - X(s)$ ou de $[X(t) - X(s)]^2$ sachant qu'on a p. e. $X(s) = x$ et $|X(t') - x| \leqslant 1$, pour tout t' [*rayé* : inférieur à] compris entre s et t. Appelons H l'hypothèse $|X(t') - x| \leqslant 1$, pour tout t' ($s < t' < t$).

(12)

On peut écrire

$$\int_{|y-x|\leqslant 1} (y-x)^i \, \mathrm{d}_y F(x,y,s,t) = \Pr\{H\} \, \mathbb{E}_H\big[(y-x)^i\big] + \theta\big[1 - \Pr\{H\}\big], \quad -1 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Si $t \to s$: $\Pr\{H\} \to 1$, et

$$\int_{|y-x|\leqslant 1} (y-x) \, \mathrm{d}_y F[x,y,s,t] = a(x,s)(t-s) + \mathrm{o}(t-s)$$
$$\int_{|y-x|\leqslant 1} (y-x)^2 \, \mathrm{d}_y F[x,y,s,t] = \sigma^2(x,s)(t-s) + \mathrm{o}(t-s)$$
$$\frac{1}{t-s} \, \mathbb{E}_H[X(t) - x] \to a(x,s), \quad \frac{1}{t-s} \, \mathbb{E}_H[X(t)-x]^2 \to \sigma^2(x,s)$$

[5) *rayé* voir notes].

5) *Si σ et a sont continues et $\sigma > 0$ pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $0 < t < T$, la probabilité pour qu'on ait un $X(t) > \beta$ pour $t < \Delta$, tend vers 1 si $X(0) \to \beta$.*

Démonstration. On peut trouver une fonction $\varphi(t) \to 0$ si $t \to 0$ telle que la probabilité pour qu'on ait $|X(t) - X(0)| > \varphi(t)$ pour un $t < \Delta$ tend vers zéro si $\Delta \to 0$

(13)

[*Partie rayée* voir notes]

[soit ε très petit], si $|X(0) - \beta| < \varepsilon$. $t_1, t_2, \ldots, t_n$ étant n instants ($0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \Delta$), on peut écrire

$$\begin{aligned}\Pr\big\{X(t_i) > \beta,\ i = 1, \ldots, n\big\} \geqslant \Pr\big\{X(t_1) > \beta\big\} &+ \big[1 - \Pr\big\{X(t_1) > \beta\big\} \\ &- \Pr\big\{X(t_1) < \beta - \varepsilon - \varphi(t_1)\big\}\big] \Pr'\big\{X(t_2) > \beta\big\} \\ &+ \Pr\big\{\beta - \varepsilon - \varphi(t_i) < X(t_i) \leqslant \beta,\ i = 1, 2\big\} \Pr'\big\{X(t_3) > \beta\big\} + \cdots\end{aligned}$$

$\Pr'\big\{X(t_j) > \beta\big\}$ indiquant la probabilité pour que $X(t_j) > \beta$ sous l'hypothèse qu'on a eu $\beta - \varepsilon - \varphi(t_i) < X(t_i) \leqslant \beta$.

Si $0 < t' < t'' < \Delta$, $\beta - \varepsilon - \varphi(t') < X(t') < \beta$ et que Δ et ε sont assez petits, la loi de probabilité de $X(t'') - X(t')/\sigma[\beta, 0]\sqrt{t'' - t'}$ est très voisine de la loi de Gauss et nous pouvons prendre K tel que si $\sqrt{t'' - t'} > K[\varphi(t') + \varepsilon]$ la probabilité pour que $X(t'') > \beta$ soit $> 1/3$.

Prenons alors $\sqrt{t_1} > K\,\varepsilon$, $\sqrt{t_2 - t_1} > K[\varphi(t_1) + \varepsilon]$,..., $\sqrt{t_n - t_{n-1}} > K[\varphi(t_{n-1}) + \varepsilon]$.

(14)

Cela sera possible si Δ restant fixe, ε est pris suffisamment petit.

Soit $P_j = \Pr\left\{X(t_i) < \beta,\ i = 1, \ldots, j\right\}$. On a

$$P_{j+1} \leqslant P_j\,\frac{2}{3} + \Pr\left\{X(t_j) < \beta - \varphi(t_j)\right\} \leqslant P_j\,\frac{2}{3} + \varepsilon$$

$$P_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\varepsilon$$

$$\Pr\left\{X(t) \leqslant \beta,\ t \leqslant \Delta\right\} < \Pr\left\{X(t_i) < \beta,\ i = 1, \ldots, n\right\} < \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\varepsilon \qquad (14.1)$$

Si ε tend vers 0, n peut être pris arbitrairement grand, la formule (14.1) prouve donc la proposition.

On démontre analoguement la

PROPOSITION 5.b. – *Si $\sigma(x,s)$ et $a(x,s)$ sont continues au point x, s et si $\sigma > 0$, presque-sûrement si $X(s) = x$ on a $X(t) = x$ pour une infinité de t tendant vers s.*

6) Considérons le processus suivant ([1]), $Z(t)$ est égal à $X(t) - \int_0^t a[X(u), u]\,\mathrm{d}u$ si l'on a eu $|X(t)| < 1$ pour tout $0 < u < t$. Si $X(u) = \pm 1$, à partir de l'instant u, $Z(t) - Z(t')$ ($t > t' \geqslant u$) est régi par la loi de Gauss de moyenne zéro et d'écart-type $\overline{\sigma}\sqrt{t - t'}$, $\overline{\sigma}$ étant une constante > 0. C'est un processus qui ne satisfait pas à l'équation de Chapman–Kolmogoroff.

([1]) σ et a étant continus et σ étant > 0, $X(0) = 0$.

(15)

[*rayé* Nous allons établir d'abord que $\mathbb{E}[X(t)]$ existe et est $\equiv 0$. Si]

La variable $Z(t)$ ainsi obtenue est presque-sûrement continue. La probabilité pour que $|Z(t)|$ dépasse $At + 1 + x$, A étant le maximum de $a(x,s)$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 < s < t$, x étant > 0, est $< \displaystyle\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\overline{\sigma}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\overline{\sigma}^2 t}}\,\mathrm{d}x$, puisque l'hypothèse $|Z(t)| > At + 1 + x$ implique qu'il y a un u avec $|Z(u)| = 1$. $\mathbb{E}[Z^n(t)]$ existe par conséquent quel que soit $n > 0$.

Nous allons établir maintenant que $\mathbb{E}[Z(t)] \equiv 0$. [*rayé* Nous pouvons écrire]

En admettant qu'on a $\left|Z\left(\frac{i}{n}\,t\right) - Z\left(\frac{i-1}{n}\,t\right)\right| < \varepsilon$ pour tout n, on n'exclut que des mouvements ayant une probabilité totale tendant vers zéro si $n \to \infty$ et on peut même prendre pour ε une suite ε_n tendant vers zéro suffisamment lentement sans que le résultat soit altéré. Supposons donc qu'on a $\left|Z\Big(\dfrac{i}{n}\,t\Big)-Z\Big(\dfrac{i-1}{n}\,t\Big)\right|<\varepsilon$ quelque soit i et évaluons la valeur moyenne $\mathbb{E}'[Z(t)]$ de $Z(t)$ sous cette hypothèse.

$$\mathbb{E}'[Z(t)]=\sum\mathbb{E}'\left[Z\Big(\frac{i}{n}\,t\Big)-Z\Big(\frac{i-1}{n}\,t\Big)\right]$$

Si $X(t_j)$ et $Z(t_j)$ sont connus pour $j<i$, $\mathbb{E}'[\Delta Z]$ devient une fonction $\varphi_i\big[X_1,\dots,X_{j-1},Z(t_1),$ $\dots,Z(t_{j-1})\big]$

(16)

et nous avons donc à étudier la valeur moyenne de

$$\sum_i\varphi_i\big[X(t_1),\dots,X(t_{i-1}),Z(t_1),\dots,Z(t_{i-1})\big].$$

[*rayé* Deux cas sont possibles] Supposons que $X(t_1),\dots,X(t_{i-1})$ sont tous dans l'intervalle $(-1+\varepsilon,+1-\varepsilon)$. Comme [*rayé* nous avons supposé qu'on a en dehors de cas de probabilité négligeable] par hypothèse on a $|X(t')-X(t'')|<\varepsilon$ si $|t'-t''|<1/n$, on a $X(t)<1$ pour $0\leqslant t\leqslant t_i$ et $Z(t_i)-Z(t_{i-1})$ est égal à $X(t_i)-X(t_{i-1})-\displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i}a(X(u),u)\,\mathrm{d}u$.

D'autre part l'espérance mathématique de $X(t_i)-X(t_{i-1})-\displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i}a(X(u),u)\,\mathrm{d}u$ sous l'hypothèse que $|X(t_i)-X(t_{i-1})|<\varepsilon$ pour tout t ($t_i\geqslant t\geqslant t_{i-1}$) est en vertu du numéro 4 [*rayé* précédent] et de la continuité de $a(x,s)$:

$$\frac{1}{n}\,a\big[X(t_{i-1}),t_{i-1}\big]+\mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)-\frac{1}{n}\,a\big[X(t_{i-1}),t_{i-1}\big]+\mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)=\mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

c'est à dire $\varphi_i\big[X(t_1),\dots,X(t_{i-1}),Z(t_1),\dots,Z(t_{i-1})\big]=\mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

Ceci posé, nous pouvons distinguer deux cas

1) On a $|X(t_i)|<1-\varepsilon$ pour $i=1,\dots,n$
2) On a un $|X(t_i)|>1-\varepsilon$, $|X(t_1)|,\dots,|X(t_{i-1})|$ étant $<1-\varepsilon$.

Dans le premier cas $\sum\limits_1^n\varphi_i=\Xi(n)$.

Dans le second cas $\sum\limits_1^n\varphi_j=\Xi(n)+\sum\limits_{j\geqslant i}\varphi_j$.

(17)

D'autre part si $|X(t_i)|>1-\varepsilon$ la probabilité est très voisine de 1, $=1-\Xi(\varepsilon)$, qu'on a $|X(t_i+t)|>1-\varepsilon$ pour un $t<\Delta$. On peut si $\varepsilon_n\to 0$ prendre $\varepsilon=\varepsilon_n$ et $\Delta=\Delta_n\to 0$ tel que la probabilité pour qu'on ait un $|X(t_i+t)|>1$ pour un $t<\Delta_n$ soit $>1-\varepsilon'_n$ [*rayé* D'autre part] et si Δ_n est suffisamment petit $\Delta_n=m/nt$, $|Z(t_i+m/nt)-Z(t_i)|<\Xi[\Delta_n]$, en dehors de cas de probabilité $\Xi[\Delta_n]$. En négligeant donc des mouvements ayant une probabilité totale $\Xi(n)$, on a dans le cas 2

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j = \Xi(n) + \sum_{j=i}^{i+m} \varphi_j + \sum_{j>i+m} \varphi_j$$

$$\sum_{j=i}^{i+m} \varphi_j = \mathbb{E}'\big[Z(t_i + m/nt) - Z(t_i)\big] = \Xi(n)$$

si d'autre part $t_j > t_i + t$, on a, $Z(t_{j+1}) - Z(t_j)$ suivant un processus gaussien, $\mathbb{E}'\big[Z(t_{j+1}) - Z(t_j)\big] = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, donc aussi dans le cas 2

$$\sum_{1}^{n} \varphi_j = \Xi(n)$$

Les mouvements que nous avons exclus ayant une probabilité tendant vers zéro si $n \to \infty$, nous concluons que

$$\mathbb{E}[Z(t)] \equiv 0 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

(18)

VII. Il résulte de la démonstration précédente que l'espérance mathématique de $X(t)$ sous l'hypothèse H′ qu'on a eu $|X(u) - X(s)| < \eta$, pour tout $u < t$, est [*rayé* égal]

$$\mathbb{E}_{H'}\big[X(t) - X(s)\big] = \mathbb{E}_{H'}\left[\int_s^t a(X(u), u)\,\mathrm{d}u\right]$$

on a donc

$$\frac{1}{t-s}\int_{|y-x|\leqslant 1} (y-x)\,\mathrm{d}_y F(x,y,s,t) = \Pr\{H'\}\,\big\{a(X(s),s) + \varepsilon\big\} + \theta(1 - \Pr\{H'\})$$

où $\varepsilon = \max\limits_{\substack{s\leqslant u\leqslant t\\ x-\eta\leqslant y\leqslant x+\eta}} |a(y,u) - a(x,s)|$

et
$$\mathbb{E}_{H'}\big[X(t) - X(s)\big]^2 = \mathbb{E}_{H'}\Big[\sum X(t_i) - X(t_{i-1})\Big]^2$$

$$\approx \mathbb{E}_{H'} \sum \sigma^2[X(t_{i-1}), t_{i-1}](t_i - t_{i-1}) + 2\sum_i \mathbb{E}_{H'}\big[\big(X(t_i) - X(t_{i-1})\big)\big(X(t) - X(t_i)\big)\big]$$

$$\approx \mathbb{E}_{H'}\Big[\int \sigma^2(X(u),u)\,\mathrm{d}u\Big] + 2\mathbb{E}_{H'}\int a[X(u),u]\Big(\int_u^t a[X(u'),u']\,\mathrm{d}u'\Big)\,\mathrm{d}u$$

$$= (t-s)\big[\sigma^2[X(s),s] + A(t-s) + \varepsilon'\big]$$

A étant le maximum de $a(y,u)$ et ε' celui de $|\sigma^2(y,u) - \sigma^2(x,s)|$ pour $s \leqslant u \leqslant t$, $x - \eta \leqslant y \leqslant x + \eta$.

Par conséquent

$$\frac{1}{t-s}\int_{|y-x|<1} (y-x)^2\,\mathrm{d}_y F(x,y,s,t) = \Pr\{H'\}\,\big\{\sigma^2(X(s),s) + \varepsilon' + A(t-s)\big\} + \theta(1 - \Pr\{H'\})$$

(19)

VIII. Soit $\theta(\tau)$ l'instant aléatoire auquel on a dans le processus précédent

$$\int_0^\theta \sigma^2[X(u),u]\,\mathrm{d}u = \tau$$

resp. si on a eu $|X(t)| = 1$ pour la première fois à l'instant u_1 aléatoire et que

$$\int_0^{u_1} \sigma^2[X(u),u]\,\mathrm{d}u < \tau$$

l'instant auquel on a

$$\int_0^{u_1} \sigma^2[X(u),u]\,\mathrm{d}u + \overline{\sigma}^2[\theta(\tau) - u_1] = \tau$$

LEMME. – *Quel que soit $Z[\theta(\Delta)]$ pour $\Delta \leqslant \tau$*

$$\mathbb{E}\left[Z(\theta(\tau')) - Z(\theta(\tau))\right] = 0$$
$$\mathbb{E}\left[Z(\theta(\tau')) - Z(\theta(\tau))\right]^2 = \tau' - \tau$$

Démonstration. – Nous pouvons écrire

$$Z(\theta(\tau)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ Z\left[\frac{i}{n}\right] - Z\left[\frac{i-1}{n}\right] \right\} \varphi_i$$

où $\varphi_i = 1$, si $\theta(\tau) < \dfrac{i-1}{n}$, $= 0$ si $\theta(\tau) \geqslant \dfrac{i-1}{n}$

$$\mathbb{E}\left[Z(\theta(\tau))\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left\{ \left[Z\left[\frac{i}{n}\right] - Z\left[\frac{i-1}{n}\right] \right] \varphi_i \right\}$$

et comme

$$\mathbb{E}\left[Z\left[\frac{i}{n}\right] - Z\left[\frac{i-1}{n}\right] \right] = 0$$

quel que soit $Z(t)$ pour $t \leqslant (i-1)/n$, on a

$$\mathbb{E}\left[Z(\theta(\tau))\right] \equiv 0$$

donc aussi $\mathbb{E}\left[Z(\theta(\tau')) - Z(\theta(\tau))\right] = 0$ et on vérifie sans peine que cette formule reste vraie si l'on connaît les valeurs de

(20)

$Z(\theta(\tau_i))$ ou de $X(\theta(\tau_i))$, quel que soit l'ensemble fini d'instants $\tau_i < \tau'$.
On prouve aussi facilement que

$$\mathbb{E}\left[Z(\theta(\tau)) - Z(\theta(\tau'))\right]^2 = \tau - \tau'.$$

IX LEMME. – *La loi de probabilité de*

$$\left[Z(\theta(\tau)) - Z(\theta(\tau'))\right] / \sqrt{\tau - \tau'}$$

est la loi de Gauss réduite quel que soit $Z[\theta(\tau')]$.

Démonstration. – La fonction $Z[\theta(\tau)]$ est une fonction continue de τ, puisque $Z(t)$, $\theta(\tau)$ et $\tau(\theta)$ le sont.
On a en effet

$$A < \frac{|\theta(\tau) - \theta(\tau')|}{\tau - \tau'} < B$$

si $\dfrac{1}{B} < \overline{\sigma}^2$, $\sigma^2(x,s) < \dfrac{1}{A}$. Donc comme $Z(t)$ est p. s. continu, $Z[\theta(\tau)]$ l'est aussi.
Nous pouvons écrire

$$Z(\theta(\tau)) - Z(\theta(\tau')) = \sum_{j=1}^{n} \big\{ Z(\theta(\tau_j)) - Z(\theta(\tau_{j-1})) \big\}$$

où $\tau_n = \tau$, $\tau_0 = \tau'$, $\tau_j - \tau_{j-1} = n^{-1}(\tau - \tau')$.
En dehors de cas de probabilité $< \overline{\varepsilon} = \Xi(n)$, $\big| Z(\theta(\tau_j)) - Z(\theta(\tau_{j-1})) \big|$ sera $< \varepsilon$ pour tout j.
Si nous posons

$$\Delta \overline{Z}_j = \begin{cases} Z(\theta(\tau_j)) - Z(\theta(\tau_{j-1})) & \text{si } \big| Z(\theta(\tau_j)) - Z(\theta(\tau_{j-1})) \big| \leqslant \varepsilon \\ 0 & \text{si } \big| Z(\theta(\tau_j)) - Z(\theta(\tau_{j-1})) \big| > \varepsilon \end{cases}$$

$$\overline{Z} = \sum_{j=1}^{n} \Delta \overline{Z}_j$$

les fonctions $\overline{Z}$ et Z coïncident en dehors de

(21)

cas de probabilité $< \overline{\varepsilon}$. H étant une hypothèse quelconque concernant $Z[\theta(\tau_i)]$, $i \leqslant j-1$, [*rayé* on a

$$\mathbb{E}_H[\Delta \overline{Z}_j] = \mathbb{E}\left[Z(\theta(\tau_j))\right] - \mathbb{E}\left[Z(\theta(\tau_{j-1}))\right]$$
$$\mathbb{E}\left[Z(\theta_j) - Z(\theta_{j-1})\right]$$
$$\mathbb{E}_H\Big\{\left[Z(\theta(\tau_j))\right] - \left[Z(\theta(\tau_{j-1}))\right]\Big\} = 0 = \mathrm{Pr}_H\,\{Z \qquad]$$

il résulte de ce qui a été dit au numéro précédent que

$$\mathbb{E}_H[\Delta \overline{Z}_j] = \mathbb{E}_H\left[Z(\theta(\tau_j)) - Z(\theta(\tau_{j-1}))\right] + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big) = \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

et

$$\mathbb{E}_H[\Delta \overline{Z}_j{}^2] = \frac{\tau - \tau'}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$
$$\mathbb{E}_H[\Delta \overline{Z}_j{}^3] \quad < \varepsilon\, \mathbb{E}_H[\Delta Z_j^2]$$

Nous pouvons alors appliquer une proposition de M. S. Bernstein et nous concluons que la loi de $\sum \Delta Z_j$ tend vers la loi de Gauss si $n \to \infty$, et comme Z et $\overline{Z}$ sont identiques en dehors de cas de probabilité $\Xi(n)$, il résulte le lemme.]

(22)

X Théorème local du logarithme itéré. – *Si x est un point régulier du mouvement à l'instant s et $X(s)=x$, p. s. si $t>s$:*

$$\overline{\lim_{t\to s}}\,\frac{|X(t)-X(s)|}{\sqrt{(t-s)\lg_2(t-s)^{-1}}}=\sqrt{2}\,\sigma(x,s) \tag{22.1}$$

Démonstration. – Supposons d'abord $\sigma\neq 0$. Nous pouvons supposer x et $s=0$. Définissons $Z(\theta(\tau))$ comme aux numéros précédents. $Z(\theta(\tau))$ [*rayé* $-Z[\theta(\tau')]$] suivant un processus brownien il résulte d'un théorème de M. Khintchine que

$$\overline{\lim_{\tau\to 0}}\,\frac{Z(\theta(\tau))}{\sqrt{\tau\lg_2\tau^{-1}}}=\sqrt{2} \tag{22.2}$$

Or si τ est suffisamment petit, en dehors de cas de probabilité $\Xi(\tau)$

$$Z(\theta(\tau))-Z(0)=X(\theta(\tau))-X(0)-\int_0^{\theta(\tau)}a(X(t),t)\,\mathrm{d}t$$

et p. s.

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\theta(\tau)}{\tau}=\frac{1}{\sigma^2}$$

Comme

$$\left|\int_0^{\theta(\tau)}a(X(t),t)\,\mathrm{d}t\right|=\mathrm{O}[\theta(\tau)]=\mathrm{O}(\tau)$$

$$\text{p. s.}\quad \overline{\lim_{\tau\to 0}}\,\frac{Z(\theta(\tau))}{\sqrt{\tau\lg_2\tau^{-1}}}=\overline{\lim_{\theta\to 0}}\,\frac{X(\theta(\tau))}{\sqrt{\tau\lg_2\tau^{-1}}}$$

$\tau=\tau(\theta)$ étant la fonction inverse de $\theta(\tau)$

(23)

$$\text{p. s.}\quad \overline{\lim_{\tau\to 0}}\,\frac{X(\theta(\tau))}{\sqrt{\tau(\theta)\lg_2\tau(\theta)^{-1}}}=\overline{\lim_{\theta\to 0}}\,\frac{X(\theta)}{\sqrt{\sigma^2\theta\lg_2\theta^{-1}}}$$

En abandonnant l'hypothèse $X(s)=0$, $s=0$, [*rayé* on obt on tire la f] (22.2) devient donc (22.1).

c. q. f. d.

Supposons maintenant $\sigma=0$. Posons

$$Z'(t)=Z(t)+Y(t)$$

$Y(t)$ étant une fonction aléatoire à accroissements indépendants, indépendante de $Z(t)$, $\Delta Y(t)/\sqrt{\Delta t}$ suivant une loi de Gauss symétrique avec l'écart-type ε.

Désignons par $\theta(\tau)$ maintenant l'instant aléatoire où

$$\int_0^{\theta(\tau)}\sigma^2(X(s),s)\,\mathrm{d}s+\varepsilon^2\theta(\tau)=\tau$$

resp. si on a eu $|X(u)|=1$ pour la première fois à l'instant u_1, soit $\theta(\tau)$ l'instant où

$$\int_0^{u_1}\sigma^2(X(s),s)\,\mathrm{d}s+\overline{\sigma}^2(\theta(\tau)-u_1)+\varepsilon^2\theta(\tau)=\tau$$

On a, M^2 désignant le maximum de $\sigma^2 + \overline{\sigma}^2 + \varepsilon^2$, pour $|x| \leqslant 1$, $\varepsilon < 1$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} > \frac{\theta(\tau') - \theta(\tau)}{\tau' - \tau} > \frac{1}{M^2}$$

La fonction $Z'[\theta(\tau)]$ suit toujours un processus stochastique gaussien à accroissements indépendants et on a

$$\varlimsup_{t\to 0} \left| \frac{Z'(t) - Z'(0)}{\sqrt{t \lg_2 t^{-1}}} \right| = \sqrt{2}\,\varepsilon$$

(24)

[*rayé* D'autre part supposons que] Si $\varlimsup_{t\to 0} X(t)/\sqrt{t \lg_2 t^{-1}}$ était $> \alpha > 0$ avec probabilité $> \beta > 0$, il y aurait avec cette probabilité un instant t très petit tel que

$$X(t)/\sqrt{t \lg_2 t^{-1}} > \frac{\alpha}{2}.$$

Comme la loi de probabilité de $Y(t)$ est symétrique, la probabilité pour qu'au même instant on ait

$$\left| \frac{Z'(t) - Z'(0)}{\sqrt{t \lg_2 t^{-1}}} \right| > \frac{\alpha}{2}$$

est $> 1/2$. Donc on aurait

$$\Pr \left\{ \varlimsup_{t\to 0} \left| \frac{Z'(t) - Z'(0)}{\sqrt{t \lg_2 t^{-1}}} \right| > \frac{\alpha}{2} \right\} > \frac{\beta}{2}$$

ce qui entraîne $\beta = 0$. Il en résulte le théorème dans le cas $\sigma = 0$. c. q. f. d.

XI La probabilité des grandes valeurs.

Soit p un nombre positif assez grand. Supposons $X(0) = 0$ et $\sigma \neq 0$ pour $0 \leqslant u \leqslant T$. Soit M le maximum de σ pour $|x| \leqslant p$ et $0 \leqslant u \leqslant T$. Posons $Z(t) = X(t) - \int_0^t a[X(u), u]\,\mathrm{d}u$ si l'on a eu $|X(u)| < p$ pour tout $u < t$ ($< T$). Si $|X(u)| = p$ pour t', $t'' > u$, la loi de probabilité de $\dfrac{[Z(t') - Z(t'')]}{\overline{\sigma}\sqrt{t' - t''}}$ est la loi de Gauss réduite. Il en sera de même si t', $t'' \geqslant T$

Soit M le maximum de σ, ($\overline{\sigma} = M$). La loi de probabilité de $Z(\theta(\tau))$ est la loi de Gauss. La probabilité pour qu'on ait un $t < \theta(\tau)$ avec $|Z(t)| > x$ est [*rayé* pour $t < \theta(\tau)$]

$\leqslant \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\frac{x}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$

(25)

D'autre part [*rayé* si] $\theta(\tau)$ est $> \tau/M$, la probabilité pour qu'on ait un $Z(u)$ ($0 < u < t$) avec

$$|Z(u)| > x \quad \text{est donc} \quad < \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{tM}}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$$

[*rayé* D'autre part. Si $|Z(u)| \leqslant x$ et $x + At < p$, $X(u) <$]

Soit A le maximum de $a(x,s)$ pour $|x| < p$, $t < T$, si $|Z(u)| \leqslant x$, $x + At < p$ on a

$$|X(u)| < x + At.$$

La probabilité pour que $|X(t)| < y$ est donc

$$< \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{y-At}{\sqrt{t}M}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u$$

si $y < p$.

Supposons maintenant que σ puisse s'annuler. Considérons la somme

$$Z'(t) = Z(t) + Y(t)$$

où $Y(t)$ indépendant de $Z(t)$ suit un processus brownien gaussien symétrique avec l'écart-type $\varepsilon\sqrt{t}$. $Z(\theta(t))$ suit la loi de Gauss réduite quel que soit ε, donc aussi si $\varepsilon = 0$. Il en résulte :

PROPOSITION. – *Si $\sigma(x,s)$ et $a(x,s)$ sont bornés par M (resp A) la probabilité pour qu'il y ait un u, $s < u < t$, avec $|X(u) - X(s)| > y$ est*

$$< \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{y-At}{\sqrt{t}M}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u$$

(26)

XII THÉORÈME SUR LA CONTINUITÉ DE $X(t)$. (Extension d'un théorème de M. P. Lévy). – *Si $\sigma(x,s)$ et $a(x,s)$ sont bornés pour $S \leqslant s \leqslant T$, $-\infty < x < \infty$, $\overline{\sigma}$ est supérieur à la borne supérieure de $\sigma(x,s)$ dans le même domaine, presque sûrement il y a un τ (aléatoire) tel que*

$$|t - t'| < \tau, \quad S < t, t' < T$$

entraînent

$$|X(t') - X(t)| < \sqrt{2\overline{\sigma}^2 |t' - t| \lg |t - t'|^{-1}}$$

Démonstration. – En partant du théorème connu de M. P. Lévy sur le processus brownien on obtient le théorème ci-dessus en procédant exactement de la même façon que pour déduire le théorème X du théorème de M. A. Khintchine.

(27)

XIII Probabilité des grandes valeurs

Supposons a, σ et $1/\sigma$ bornés. Dans ce cas la fonction $X(t)$ est p. s. continue et par conséquent

$$\int_s^t a(X(u),u)\, \mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \int_s^t \sigma^2(X(u),u)\, \mathrm{d}u$$

existent. Nous pouvons écrire

$$X(t) - X(s) = \int_s^t a(X(u),u)\, \mathrm{d}u + X(t) - X(s) - \int_s^t a(X(u),u)\, \mathrm{d}u$$

L'hypothèse $\left|X(\tau)-X(s)-\int_s^\tau a(X(u),u)\,\mathrm{d}u\right|<K$ pour $s<\tau\leqslant t$ entraîne

$$|X(\tau)-X(s)|<K+\int_s^\tau a(X(u),u)\,\mathrm{d}u$$

Soit $A[x,u,X(s)]$ la borne supérieure de $|a(y,u)|$ pour $|y-X(s)|\leqslant x$

$$U(t)=\int|a(X(u),u)|\,\mathrm{d}u<\int A(K+U(u),u,X(s))\,\mathrm{d}u$$

Soit $U(s,t,K,X(s))$ la solution de l'équation différentielle

$$U'(t)=A[U(t),t,X(s)]$$

se réduisant à K à l'instant $t=s$. On a toujours dans l'hypothèse indiquée

$$|X(\tau)-X(s)|<U(s,t,K,X(s))$$

Soit $\overline{\sigma}[x,u,X(s)]$ le maximum de $\sigma(y,u)$ pour $|y-X(s)|<x$,

$$\Psi[s,t,K,X(s)]=\int_s^t\overline{\sigma}^2\big[U(s,u,K,X(s)),u,X(s)\big]\,\mathrm{d}u$$

Soit t_τ l'instant aléatoire où

$$\int_s^{t_\tau}\sigma^2[X(u),u]\,\mathrm{d}u=\tau$$

La probabilité pour qu'à l'instant t_τ où

(28)

$\tau=\Psi[s,t,K,X(s)]$ on ait $\left|X(\theta)-X(s)-\int_s^\theta a(X(u),u)\,\mathrm{d}u\right|<K$ pour tout $\theta<t_\tau$ est

$$\Phi\left(\frac{K}{\sqrt{\tau}}\right)$$

où $\Phi\left(\frac{K}{\sqrt{\tau}}\right)$ est la probabilité pour que dans le processus brownien normé on ait $\max\limits_{0<u<\tau}|X(u)|<K$.

Nous allons maintenant montrer que sous l'hypothèse H :

$$\left|X(\theta)-X(s)-\int_s^\theta a(X(u),u)\,\mathrm{d}u\right|<K$$

on a

$$\int_s^t\sigma^2(X(u),u)\,\mathrm{d}u<\tau$$

donc $t\leqslant t_\tau$. En effet si on avait $t>t_\tau$ on aurait

$$\tau=\int_s^{t_\tau}\sigma^2[X(u),u]\,\mathrm{d}u\leqslant\Psi[s,t_\tau,K,X(s)]<\Psi[s,t,K,X(s)]$$

ce qui est impossible vu la valeur de τ. On a par conséquent aussi pour tout $s<\theta<t$, avec la probabilité $\Phi\left(\frac{K}{\sqrt{\Psi}}\right)$

$$|X(\theta)-X(s)|<U(s,t,K,X(s))$$

Affranchissons nous maintenant de l'hypothèse que $1/\sigma$ soit borné. Posons

$$X_1(t)=X(t)+Y(t)$$

$Y(t)$ indépendant de $X(t)$ suivant un processus à accroissements indépendants, $Y(s)$ étant $=0$,

(29)

$Y(t_1)-Y(t_2)$ étant régi par une loi de Gauss symétrique à écart-type $\sqrt{t_2-t_1}$. Soit t_τ l'instant où

$$\tau=\varepsilon^2(t_\tau-t)+\int_s^{t_\tau}\sigma^2(X(u),u)\,\mathrm{d}u$$

La loi de probabilité de

$$\left[Y(t_\tau)+X(t_\tau)-X(s)-\int_s^{t_\tau}a(X(u),u)\,\mathrm{d}u\right]\Big/\sqrt{\tau}$$

est la loi de Gauss réduite.

Supposons ε très petit, alors en dehors de cas de probabilité ε' on a $|Y(t)|\leqslant\eta$ pour $s<u<t$. $U(s,t,K,X(s))$ et Ψ ayant la même signification que tout à l'heure, prenons

$$\tau=\Psi(s,t,K+\eta,X(s))$$

La probabilité pour qu'on ait, pour tout $\theta<t_\tau$,

$$\left|X_1(\theta)-X_1(s)-\int_s^{\theta}a(X(u),u)\,\mathrm{d}u\right|<K$$

est

$$=\Phi\left[K\Big/\sqrt{\Psi(s,t,K+\eta,X(s))}\right]$$

En dehors de cas de probabilité $\varepsilon+1-\Phi$ on a pour $s<\theta<\min[t,t_\tau]$

$$\left|X(\theta)-X(s)-\int_s^{\theta}a(X(u),u)\,\mathrm{d}u\right|<K+\eta$$

Je dis que sous l'hypothèse indiquée

$$t\leqslant t_\tau$$

En effet si on avait $t>t_\tau$ dans cette hypothèse, on aurait

$$\tau=\int_s^{t_\tau}\sigma^2(X(u),u)\,\mathrm{d}u+\varepsilon^2(t_\tau-s)<\varepsilon^2(t-s)+\Psi(s,t,K+\eta,X(s))=\tau$$

(30)

ceci est impossible, on a donc dans des cas de probabilité $\Phi\left[K\big/\left[\Psi(s,t,K+\eta,X(s))+\varepsilon^2(t-s)\right]^{1/2}\right]\varepsilon'$

$$\max_{s \leqslant \theta \leqslant t} |X(\theta) - X(s)| \leqslant \eta + U(s, t, K + \eta, X(s))$$

En faisant tendre ε vers zéro on voit que la probabilité pour que

$$\max_{s \leqslant \theta \leqslant t} |X(\theta) - X(s)| > U(s, t, K, X(s))$$

est $\leqslant 1 - \Phi\big[K/\sqrt{\Psi(s, t, K, X(s))}\big]$ (1)
On se débarrasse facilement comme au n° XI de la restriction a et σ bornés (nous supposons toujours que a et σ sont bornés à distance finie) et on obtient en définitive le :

THÉORÈME. – *Supposons a et σ continues par rapport à (x, s). Soit $A[x, u, X(s)]$ (resp. $\overline{\sigma}[x, y, X(s)]$) le maximum de $|a(y, u)|$ (resp. $\sigma(y, u)$) si*

$$y < X(s) < x$$

Soit $U(s, t, K, X(s))$ la solution de l'équation différentielle

$$U'(t) = A[U(t), t, X(s)]$$

$= K$ *pour* $t = s$.

Soit

$$\Psi(s, t, K, X(s)) = \int_s^t \overline{\sigma}^2(U(u), u, X(s))$$

La probabilité pour qu'on ait

(1) car $U(s, t, K + \eta, X(s)) \to U(s, t, K, X(s))$.

(31)

$$\max_{s \leqslant \theta \leqslant t} |X(\theta) - X(s)| \leqslant U(s, \theta, K, X(s))$$

pour tout $\theta \leqslant t$ est

$$\geqslant \Phi\left[K/\sqrt{\Psi(s, t, K, X(s))}\right]$$

Remarque. – Si U est infini l'énoncé est évidemment trivial. Il est à remarquer que sous nos hypothèses Ψ est $< \infty$ si U l'est. Seulement il est possible que $\lim\limits_{K \to \infty} \dfrac{K}{\sqrt{\Psi(s, t, K, X(s))}} \neq \infty$.

COROLLAIRE. – *Si quels que soient K, $X(s)$, s et t, on a*

$$U(s, t, K, X(s)) < \infty$$

et

$$\lim_{K \to \infty} \frac{\Psi(s, t, K, X(s))}{K^2} = 0$$

la fonction $X(s)$ est p. s. continue. Il en sera ainsi en particulier si σ est [rayée *bornée*] $= \mathrm{O}(x^2)$ *et* $|a(x, u)| < \alpha |x|$ [*rayé* $\alpha < 1$].

(32)

XIV THÉORÈME. – *La probabilité pour qu'il y ait un $\tau > 0$ inférieur à Δ avec $|X(s+\tau) - X(s)| > K\sqrt{\Delta}\,\sigma(X(s), s))$ tend, quand $\sigma(X(s), s)) \neq 0$, vers*

$$1 - \Phi(K)$$

si $\Delta \to 0$.

Démonstration. – Supposons d'abord σ, a et $1/\sigma$ bornés.
En dehors de cas de probabilité $< \varepsilon$, on a $|X(t) - X(s)| < \varepsilon$, pour $s < t < s + \Delta$, donc

$$\sigma^2[X(s), s]\Delta(1 - \varepsilon_2) \leqslant \int_s^{s+\Delta} \sigma^2[X(u), u]\,\mathrm{d}u$$

et

$$\left| \int_s^{s+t} a(X(u), u)\,\mathrm{d}u \right| < A\Delta$$

A étant une constante. Soit $s + \theta(v)$ l'instant pour lequel

$$v = \int_s^{s+\theta(v)} \sigma^2[X(u), u]\,\mathrm{d}u$$

Prenons $v = \sigma^2[X(s), s]\Delta(1 - \varepsilon_2)$. En dehors de cas de probabilité ε, on a $\theta(v) < t$. Avec une probabilité $1 - \Phi\left(K + \dfrac{A\Delta}{\sqrt{v}}\right)$ [*rayé* il y a un]

$$\max_{s<u<s+\theta(v)} \left[X(u) - X(s) - \int_s^{s+u} a(X(u), u)\,\mathrm{d}u\right] > \sqrt{v}\left(K + \frac{A\Delta}{\sqrt{v}}\right)$$

Donc dans des cas de probabilité

$$> 1 - \Phi\left(K + \frac{A\Delta}{\sqrt{v}}\right) - \varepsilon$$

il y a un t inférieur à $s + \Delta$ pour lequel

$$|X(t) - X(s)| > K\sqrt{v} = K'\sqrt{1 - \varepsilon_2}\,\sigma(X(s), s)$$

On voit de même facilement que la probabilité pour qu'il y ait un t ($s < t < s + \Delta$) avec

(33)

$$|X(t) - X(s)| < K\sqrt{1 + \varepsilon_2}\,\sigma(X(s), s)$$

est

$$< 1 - \Phi\left(K - \frac{A\Delta}{\sigma(1 - \varepsilon)}\right) + \varepsilon$$

ε et ε_2 pouvant être pris arbitrairement petit si $\Delta \to 0$ et comme on peut supprimer facilement l'hypothèse que σ, a et $1/\sigma$ sont bornés il en résulte le théorème.

On démontre aussi

Si $\sigma(X(s), s) \neq 0$, la probabilité pour que $\max\limits_{s\leqslant u\leqslant s+\Delta} X(t) - X(s) > K\sqrt{\Delta}$ tend, si $\Delta \to 0$, vers

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_K^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

De plus on a la

PROPOSITION. – *Si $a(u,y)$ et σ sont continues pour $|y-x|<\alpha$, $s<u<s+\beta$, si $A = \max\limits_{\substack{|y-x|<\alpha \\ s<u<s+\beta}} |a(u,y)|$, $B = \max\limits_{\substack{|y-x|<\alpha \\ s<u<s+\beta}} |\sigma^2(u,y)|$, $X(s)=x$, $\gamma<\alpha$,*

$$\Pr\left\{\max_{s<u<t<s+\beta} |X(u)-x|>\gamma\right\} < (t-s)\,\varphi_{A,B}(t-s)$$

où

$$\lim_{t-s\to 0} \varphi_{A,B}(t-s) = 0$$

Remarque. – Supposons $\Pr\{X(t) \leq x-a\} < b$, [*rayé* pour tout s' compris entre] si $x-\varepsilon \leqslant X(s') \leqslant x$ pour tout s' compris entre s et t. Supposons $X(s)$ quelconque $> x$. $X(u)/1+|X(u)|$
[*page intercalée non numérotée*]
étant p. s. continu, si $X(t) < x-a$, il y a nécessairement un $X(s')$ compris entre $x-\varepsilon$ et x (quel que petit que soit ε) et la probabilité sous cette hypothèse pour que $X(t) < x-a$ est $< b$.
Il en résulte

$$\Pr\{X(t) < x-a\} < b$$

si $x-\varepsilon \leqslant X(s)$. Appliquons cela dans notre cas.
Supposons a et σ continus pour $|y-x|<\alpha$, $s<u<s+\beta$, si $A = \max\limits_{\substack{|y-x|<\alpha \\ s<u<s+\beta}} |a(u,y)|$,
$B = \max\limits_{\substack{|y-x|<\alpha \\ s<u<s+\beta}} \sigma^2(u,y)$, $X(s) \geqslant x$, $\gamma<\alpha$,

$$\Pr\left\{\min_{s<u<t<s+\beta} X(u)-x<-\gamma\right\} < (t-s)\,\varphi_{A,B}(t-s)$$

où $\lim\limits_{t-s\to 0} \varphi_{A,B}(t-s) = 0$

(34)

XV Changements de variables

Soit $\varphi[x,t]$ une fonction croissante de x continue par rapport à (x,t). Posons $Y(t) = \varphi[X(t),t]$. Soit $G(x,y,s,t)$ la probabilité pour qu'on ait $Y(t) < y$, si à l'instant s on a eu $Y(s) = y$. $G(x,y,s,t)$ est égale à la probabilité pour que $X(t) < y'$ lorsqu'on a eu $X(s) = x'$.
On vérifie facilement que $G(x,y,s,t)$ vérifie l'équation de Chapman, x variant entre $\varphi(-\infty,s)$ et $\varphi(+\infty,s)$. Mais pour que G vérifie l'équation de Kolmogoroff, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires sur φ. Nous supposons que φ'_x, φ''_x et φ'_t existent et que φ'_x et φ''_x sont continues par rapport à t et x.
Appliquons la formule des accroissements finis

$$\begin{aligned} Y(t+\Delta)-Y(t) &= \varphi\big[X(t+\Delta),t+\Delta\big] - \varphi\big[X(t),t+\Delta\big] + \varphi\big[X(t),t+\Delta\big] - \varphi\big[X(t),t\big] \\ &= \varphi'_x\big[X(t),t+\Delta\big]\big(X(t+\Delta)-X(t)\big) + \frac{1}{2}\,\varphi''_x(X',t+\Delta)\big(X(t+\Delta)-X(t)\big)^2 \\ &\qquad + \varphi[X(t),t+\Delta] - \varphi[X(t),t], \end{aligned}$$

X' étant compris entre $X(t)$ et $X(t+\Delta)$. Donc

$$\int_{|y-x|>\varepsilon} \mathrm{d}G(x,y,s,t) = \mathrm{o}(\Delta)$$

uniformément dans toute région du plan (y,t) image par la transformation $y=\varphi[x,t]$ d'une région du plan (x,t) ne contenant pas de points singuliers et dans laquelle φ'_x et φ''_x sont bornées.

(35)

De même [*rayé* également uniformément]

$$A = \frac{1}{\Delta}\int_{|z-Y|<\varepsilon} [z-Y(t)]\,\mathrm{d}_z G(Y(t),z,t,t+\Delta)$$
$$= \varphi'[X(t),t]\,a(X(t),t) + \varphi'_t[X(t),t] + \frac{1}{2}\,\varphi''[X(t),t]\,\sigma^2 + \Xi(\Delta)$$
$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{\Delta}\int_{|z-Y|<\varepsilon} [z-Y(t)]^2\,\mathrm{d}_z G(Y(t),z,t,t+\Delta) = \varphi'^2_x[X(t),t]\,\sigma^2[X(t),t] + \Xi(\Delta)$$

Les [*rayé* limites] expressions $\Xi(\Delta)$ des formules précédentes tendent vers 0 uniformément dans toute région ne contenant pas de points singuliers dans laquelle φ'_x, φ''_x et φ'_t sont bornées et φ'_x, φ''_x continues par rapport à t.

Cas particulier important. – Soit

$$Y(t) = \varphi[X(t),t] = \int_0^{X(t)} \frac{\mathrm{d}x}{\sigma(x,t)}$$

Supposons que σ'_t existe ainsi que σ'_x et que σ'_x soit continu par rapport à t. On a alors

$$\begin{cases} A = \dfrac{a(x,t)}{\sigma} - \displaystyle\int_0^x \frac{\sigma'_t}{\sigma^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\,\sigma'_x \\[2ex] \overline{\sigma}^2 = 1 \end{cases}$$

Remarque. – On peut envisager des changements de variables plus compliqués en introduisant au lieu de t et x des fonctions $\varphi(t,x)$, etc. Nous n'en aurons pas besoin.

(36)

[*page rayée*
XVI Proposition. – *Si $y(t)$ satisfait une condition de Lipschitz, si $a(x,t)$, σ et $1/\sigma$ sont continus dans une bande positive entourant la courbe $y=y(t)$, la probabilité pour que la particule mobile franchisse la courbe $y=y(t)$ avant l'instant $s+\Delta$ tend vers 1 si $X(s)\to y(s)$*.]

(37)

§ 2

XVI Soient $y_1 = y_1(t)$ et $y_2 = y_2(t)$ deux fonctions de t à dérivées bornées avec $y_1 < y_2$, définies pour $S \leqslant t \leqslant T$. Considérons une particule mobile qui ne se meut qu'aux instants $t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}$, la probabilité pour que la particule, étant à l'instant $t_i^{(n)}$ en x, se trouve à l'instant $t_j^{(n)}$ à gauche de y, ne dépendant pas de la position de la particule avant l'instant $t_i^{(n)}$, est

$$F_n\big[x, y, t_i^{(n)}, t_j^{(n)}\big]$$

Supposons que $\max t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)} \to 0$ et que si $t_i^{(n)} \to s$

$$\frac{1}{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}} \int_{|y-x|<1} (y-x) \mathrm{d}_y F_n\big[x, y, t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}\big] \longrightarrow a(x,s)$$

$$\frac{1}{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}} \int_{|y-x|<1} (y-x)^2 \mathrm{d}_y F_n\big[x, y, t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}\big] \longrightarrow \sigma^2(x,s)$$

$$\frac{1}{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}} \int_{|y-x|>\eta} \mathrm{d}_y F_n\big[x, y, t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}\big] \longrightarrow 0$$

quel que petit que soit η, les 3 limites existant uniformément par rapport à x si (x,s) se trouve à l'intérieur de la région

$$y_1(s) - \varepsilon < x < y_2(s) + \varepsilon, \quad S < s < T$$

(38)

PROPOSITION. – *Si, $\varepsilon > 0$ étant donné arbitrairement petit,* [rayé *la probabilité*] *si n est suffisamment grand et la distance du point $(x, t_i^{(n)})$ à la courbe $y(t)$ suffisamment petite $< \varepsilon'$, la probabilité pour qu'à un des instants $t_j^{(n)}$* [rayé $(j > i)$] *compris entre $t_i^{(n)}$ et $t_i^{(n)} + \Delta$ on ait*

$$\Big(X\big(t_j^{(n)}\big) - y\big(t_j^{(n)}\big)\Big)\Big(X\big(t_i^{(n)}\big) - y\big(t_i^{(n)}\big)\Big) < 0$$

est $> 1 - \varepsilon$.

La démonstration est [*rayé* du me] fondée sur le même raisonnement que celle du n$^{\text{o}}$ 5.

XVII THÉORÈME. – *S'il existe une solution $v(x,s)$ de l'équation aux dérivées partielles*

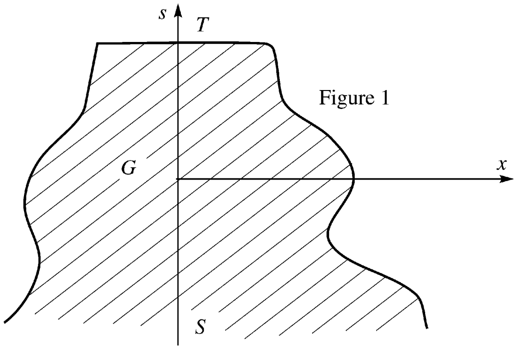
$$-\frac{\partial v}{\partial s} = a\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

tendant vers 1 si $(x,s) \to (y_1(s), s)$, $(s < t)$ ou si $s \to t$, $x < y$, vers 0 si $(x,s) \to (y_2(s), s)$ pour $s < t$ ou si $s \to t$, $x > y$ régulière dans le domaine G (voir *figure* 1)*;*

si $n \to \infty$, $t_0^{(n)} \to s$, $t_m^{(n)} \to t$, la fonction

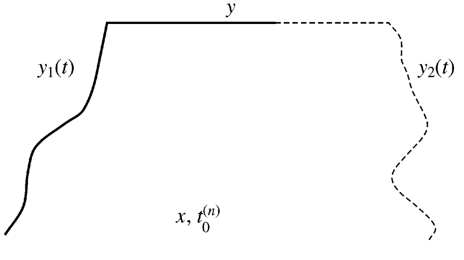
$$H_n\big(x, y, t_0^{(n)}, t_m^{(n)}\big)$$

somme de la probabilité pour qu'on ait, $X\big(t_0^{(n)}\big)$ étant $= x$,



(39)

$X\big(t_m^{(n)}\big) < y$ et $y_1\big(t_i^{(n)}\big) < X\big(t_i^{(n)}\big) < y_2\big(t_i^{(n)}\big)$, ($i = 1, \ldots, m$) et la probabilité pour qu'on ait pour un i $X\big(t_i^{(n)}\big) \leqslant y_1\big(t_i^{(n)}\big)$ et $X\big(t_1^{(n)}\big) < y_2\big(t_1^{(n)}\big)$,..., $X\big(t_{i-1}^{(n)}\big) < y_2\big(t_{i-1}^{(n)}\big)$, [1] *tend vers $v(x, s)$.*



Démonstration. – Nous pouvons prendre t' inférieur à t assez voisin de t pour qu'on ait $v(x, s) < \varepsilon$ si $x > y + \varepsilon$, $> 1 - \varepsilon$ si $x < y - \varepsilon$, et $t' \leqslant s < t$. D'autre part si ε' est suffisamment petit on a $v(x, s) > 1 - \varepsilon$ si (x, s) se trouve dans la bande I ($y_1(s) \leqslant x \leqslant y_1(s) + \varepsilon'$, $S < s < t'$) et aussi $v(x, s) < \varepsilon$ si (x, s) se trouve dans la bande II ($y_2(s) - \varepsilon' \leqslant x \leqslant y_2(s)$). Si (x, s) se trouve dans la zone III ($y_1(s) + \varepsilon' < x < y_2(s) - \varepsilon'$, $S < s \leqslant t'$), $\left|\dfrac{\partial v}{\partial x}\right| < K$, $\left|\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| < K$, $\left|\dfrac{\partial v}{\partial s}\right| < K$, et $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ y sont uniformément continues.

Comme $y_1(u)$ et $y_2(u)$ sont [*rayé* uniformément] dérivables il résulte de la proposition 16 que, ε' étant suffisamment petit, si $\big(x, t_i^{(n)}\big)$ se trouve dans

[1] c'est à dire la probabilité de toutes les trajectoires partant de x et atteignant une partie de la frontière de G dessinée en trait ininterrompu avant d'atteindre la frontière représentée en hachures

(40)

I, on a $H_n\big(x,y,t_i^{(n)},t_m^{(n)}\big) > 1-\varepsilon$, si $\big(x,t_i^{(n)}\big)$ se trouve dans II, on a $H_n\big(x,y,t_i^{(n)},t_m^{(n)}\big) < \varepsilon$, si n est suffisamment grand.

v étant régulière dans G on a si $\big(x,t_i^{(n)}\big)$ appartient à III

$$(\ )\quad v\big(x,t_i^{(n)}\big)-v\big(x,t_{i+1}^{(n)}\big)-a\big(x,t_i^{(n)}\big)\,\frac{\partial}{\partial x}\,v\big(x,t_{i+1}^{(n)}\big)-\frac{1}{2}\,\sigma^2(x,s)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\big(x,t_{i+1}^{(n)}\big)=\mathrm{o}\big(t_{i+1}^{(n)}-t_i^{(n)}\big)$$

et $0 \leqslant v \leqslant 1$. [*rayé* Nous pouvons prendre $v=1$ pour $x<y(t)$, $=0$ pour $x>y(t)$]
Ceci étant posé, envisageons la différence

$$v\big(x,t_i^{(n)}\big)-\int_{y_1(t_{i+1}^{(n)})}^{y_2(t_{i+1}^{(n)})} v\big(z,t_{i+1}^{(n)}\big)\,\mathrm{d}_z G\big(x,z,t_i^{(n)},t_{i+1}^{(n)}\big)\quad [\textit{les bornes de l'intégrale sont rayées}]$$

Supposons $\big(x,t_i^{(n)}\big)$ dans III, $\eta<\varepsilon'$, on peut écrire $\displaystyle\int v\,\mathrm{d}G=\int_{|z-x|<\eta}\ +\int_{|z-x|\geqslant\eta}$
et par hypothèse

$$\int_{|z-x|\geqslant\eta} v\,\mathrm{d}_z G=\mathrm{o}\big(t_{i+1}^{(n)}-t_i^{(n)}\big)$$

$$\begin{aligned}\int_{|z-x|<\eta} v\big(z,t_i^{(n)}\big)\,\mathrm{d}_z G= &\\ \int_{|z-x|<\eta}\Bigg\{ & v\big(x,t_{i+1}^{(n)}\big)+(z-x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\Big[v\big(x,t_{i+1}^{(n)}\big)\Big]\\ & +\frac{1}{2}\,(z-x)^2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\,\big(u,t_{i+1}^{(n)}\big)\right]_{u=x'}\Bigg\}\,\mathrm{d}_z G\big(x,z,t_i^{(n)},t_{i+1}^{(n)}\big)\end{aligned}$$

x' étant compris entre $x-\eta$ et $x+\eta$. Nous pouvons prendre $\eta<\varepsilon'$ suffisamment petit pour que, pour tout (x,s) de III, on ait

(41)

$$\left|\left[\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\,\big(u,t_{i+1}^{(n)}\big)\right]_{u=x'}-\left[\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\,\big(u,t_{i+1}^{(n)}\big)\right]_{u=x}\right|<\varepsilon'$$

On a alors si $(x,s)\in$ III

$$v\big(x,t_i^{(n)}\big)-\int v\big(z,t_{i+1}^{(n)}\big)\,\mathrm{d}_z G=$$

$$v\big(x,t_i^{(n)}\big)-v\big(x,t_{i+1}^{(n)}\big)-\frac{\partial}{\partial x}\,\Big[v\big(x,t_{i+1}^{(n)}\big)\Big]\,a\big(x,t_i^{(n)}\big)-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,\big(x,t_{i+1}^{(n)}\big)\,\sigma^2\big(x,t_i^{(n)}\big)+R'$$

ou encore en utilisant ( )

$$v\big(x,t_{i+1}^{(n)}\big)-\int v\big(z,t_{i+1}^{(n)}\big)\,\mathrm{d}_z G=R''$$

R' et R'' pouvant être pris arbitrairement petit uniformément dans III si $t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)} \to 0$.

(x,s) étant à l'intérieur de G si ε' est suffisamment petit et, si $t_0^{(n)} \to s$, $\big(x, t_0^{(n)}\big)$ se trouvera pour $n > N_0$ à l'intérieur de III. Dès lors nous aurons

$$v\big(x, t_0^{(n)}\big) - \int_{y_1(t_1^{(n)})}^{y_2(t_1^{(n)})} v\big(z_1, t_1^{(n)}\big)\,\mathrm{d}_{z_1} G\big(x, z_1, t_1^{(n)}, t_0^{(n)}\big) = \mathrm{o}\big(t_1^{(n)} - t_0^{(n)}\big)$$

[*rayé* remplaçons $v\big(z, t_1^{(n)}\big)$ par la valeur ( ) si $z \in \mathrm{III}'$, il vient]

$$\int_{y_1(t_1^{(n)})}^{y_2(t_1^{(n)})} v\big(z_1, t_1^{(n)}\big)\,\mathrm{d}_{z_1} G = \int_{y_1(t_1^{(n)})}^{y_1(t_1^{(n)})+\varepsilon'} v\,\mathrm{d}_{z_1} G + \int_{y_2(t_1^{(n)})-\varepsilon'}^{y_2(t_1^{(n)})} v\,\mathrm{d}_{z_1} G + \int_{y_1(t_1^{(n)})+\varepsilon'}^{y_2(t_1^{(n)})-\varepsilon'} v\,\mathrm{d}_{z_1} G$$

(42)

Si z_1 appartient à III nous remplacerons $v\big(z_1, t_1^{(n)}\big)$ par la valeur ( ) si z [*rayé* $\in$ III] est $< y\big(t_2^{(n)}\big) + \varepsilon$, on a $v\big(z_1, t_1^{(n)}\big) > 1 - \varepsilon$, si z_1 est $> y\big(t_1^{(n)}\big) - \varepsilon$.
Donc

$$\int v\big(z_1, t_1^{(n)}\big)\,\mathrm{d}_{z_1} G = \int\limits_{-\infty < z_2 < \infty} \int\limits_{z_1 \in \mathrm{III}} v\big(z_2, t_2^{(n)}\big)\,\mathrm{d}_{z_1} G\big(x, z_1, t_0^{(n)}, t_1^{(n)}\big)\,\mathrm{d}_{z_2} G\big(z_1, z_2, t_1^{(n)}, t_2^{(n)}\big)$$

$$+ \Pr\Big\{X_1\big(t_1^{(n)}\big) < y_1\big(t_1^{(n)}\big) + \varepsilon\Big\}\,(1 - \theta\varepsilon) + \theta \Pr\Big\{X\big(t_1^{(n)}\big) > y_2\big(t_1^{(n)}\big) - \varepsilon\Big\}\,\varepsilon + \theta\varepsilon''\big(t_1^{(n)} - t_0^{(n)}\big)$$

et finalement

$$v\big(x, t_0^{(n)}\big) = \int\limits_{-\infty < z_m < \infty} \int\limits_{z_1, \ldots, z_{m-1} \in \mathrm{III}} v\big(z_m, t_m^{(n)}\big)\,\mathrm{d}_{z_1} G\big(x, z_1, t_0^{(n)}, t_1^{(n)}\big)\,\mathrm{d}_{z_2} G\big(z_1, z_2, t_1^{(n)}, t_2^{(n)}\big)$$

$$\cdots \mathrm{d}_{z_m} G\big(z_{m-1}, z_m, t_{m-1}^{(n)}, t_m^{(n)}\big)$$

$$+ \theta\varepsilon''(t - s) + (1 - \theta\varepsilon)\,P_n(\varepsilon', t') + \theta\varepsilon\,Q_n(\varepsilon', t')$$

$P_n(\varepsilon', t')$ (Q_n) étant la probabilité pour que la particule franchisse la ligne

$$y = y_1(t) + \varepsilon' \quad (y = y_2(t) - \varepsilon)$$

avant l'instant t' et avant d'avoir atteint la ligne

$$y = y_2(t) - \varepsilon' \quad (y = y_1(t) + \varepsilon')$$

Supposons que $t_m^{(n)} \to t'$ que $n \to \infty$, ε', t' restant fixe

$$v\big(x, t_0^{(n)}\big) = v(x, s) + \Xi(n) < P_n(\varepsilon', t') + R_n(\varepsilon', t')$$

$$+ \int_{y_1(t_m^{(n)}) < z_m < y + \varepsilon} \mathrm{d}_{z_1} G\big(x, z_1, t_0^{(n)}, t_1^{(n)}\big) \cdots \mathrm{d}_{z_m} G\big(z_{m-1}, z_m, t_{m-1}^{(n)}, t_m^{(n)}\big)$$

(43)

et $v\big(x, t_0^{(n)}\big) > \displaystyle\int_{y_1(t_m^{(n)})<z_m<y-\varepsilon} \iint \cdots + P + R'_n(\varepsilon', t', \varepsilon)$

R' et R'' tendant vers zéro si t' et $\varepsilon' \to 0$ quel que soit ε et $n > N(t', \varepsilon')$.

Il est facile de voir que pour la probabilité $H_n\big(x, y, t_0^{(n)}, t_m^{(n)}\big)$ on a une expression analogue.
On en déduit le théorème.

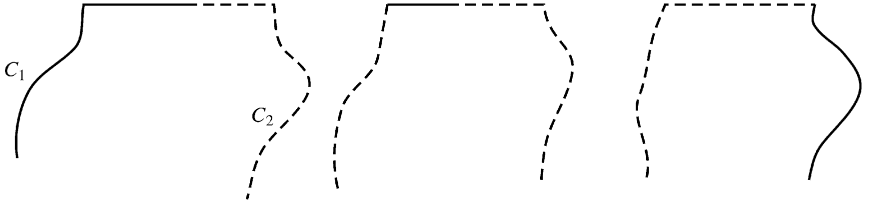
XVIII COROLLAIRE. – *Considérons une particule mobile dont le mouvement est régi par la solution régulière de l'équation de Kolmogoroff $F(x, y, s, t \mid a, \sigma)$ à coefficients continus et avec σ non nul. La probabilité des trajectoires partant de (x, s) et atteignant la partie C_1 du contour dessinée en trait ininterrompu avant d'atteindre la partie C_2 du contour représentée en pointillé est $v(x, s)$, solution régulière dans G de l'équation aux dérivées partielles*

$$-\frac{\partial v}{\partial s} = a\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

prenant la valeur 1 *sur* [rayé *la partie noire*] C_1

(44)

la valeur 0 *sur* C_2. *Ceci est vrai dans les* 3 *cas ci-dessous*



Cf. A. Khintchine pour ce §.

(45)

XIX THÉORÈME. – *S'il existe une solution de l'équation de Kolmogoroff $F(x, y, s, t \mid a, \sigma)$ tendant vers zéro si $x \to \infty$, vers 1 si $x \to -\infty$, uniformément par rapport à s, $[S_1 < s, t < S_2]$ avec des dérivées partielles $\partial F/\partial x$, $\partial^2 F/\partial x^2$ continues et bornées à distance finie lorsque $t - s$ est borné inférieurement, si a, σ et $1/\sigma$ sont continues.*

1) *Cette solution est la seule solution régulière avec les coefficients a et σ*

2) *elle satisfait à l'équation*

$$-\frac{\partial F}{\partial s} = a(x, s)\,\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\sigma^2(x, s)\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

3) *Si a_n et σ_n tendent vers a et σ uniformément par rapport à (x,s) à distance bornée*

$$F_n[x,y,s,t \mid a_n,\sigma_n] \to F[x,y,s,t \mid a,\sigma]$$

en tout y point de continuité de F, F_n désignant une solution quelconque de l'équation de Kolmogoroff avec les coefficients a_n et σ_n.

4) *Si $n\to\infty$, $t_0^{(n)}\to s$, $t_m^{(n)}\to t$, la fonction $G_n\big(x,y,t_0^{(n)},t_m^{(n)}\big)$* [voir *n*° XVI] *tend vers $F(x,y,s,t \mid a,\sigma)$*

Démonstration. – La proposition (2) est bien connue (*cf.* Kolmogoroff et Feller). En ce qui concerne les propositions (1), (3), (4) on confrontera avec

(46)

Kolmogoroff Übertragungssatz et Khintchine *Ergebnisse*.

Nous allons démontrer 4 ; 3 et 1 étant des corollaires de 4 se trouveront ainsi également établis.

La démonstration de 4 sera absolument analogue à celle du théorème précédent. Le rôle de v sera joué par F, $y_1(t)$ sera remplacé par $-K$, $y_2(t)$ par $+K$.

Nous aurons encore si $t_{m'}^{(n)}\to t'<t$, $t_0^{(n)}\to s$

$$\begin{aligned}F(x,y,s,t \mid a,\sigma) = \int_{-K}^{K}\cdots\int_{-K}^{K} F\big[z_{m'},y,t_{m'}^{(n)},t\big]\,\mathrm{d}_{z_1}G\big(x,z_1,t_0^{(n)},t_1^{(n)}\big)\\ \cdots \mathrm{d}_{z_m}G\big(z_{m'-1},z_m,t_{m'-1}^{(n)},t_m^{(n)}\big)\\ +(1-\eta)P_n(x,t')+\eta\,Q_n(x,t')+\Xi(1/n)\end{aligned}$$

où $\eta\to 0$ si $K\to\infty$ (car $1-F(-K,y,s,t)\to 0$ si $K\to\infty$ et $F(K,y,s,t)\to 0$ si $K\to\infty$). D'autre part

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} F\big[z,y,t_{m'}^{(n)},t\big]\,\mathrm{d}G\big(x,z,t_0^{(n)},t_{m'}^{(n)}]\big)\\ &= \int_{-K}^{K}\cdots\int_{-K}^{K} F\big[z_m,y,t_m^{(n)},t\big]\,\mathrm{d}_{z_1}G\big(x,z_1,t_0^{(n)},t_1^{(n)}\big)\cdots \mathrm{d}_{z_m}G\big(z_{m-1},z_m,t_{m'-1}^{(n)},t_{m'}^{(n)}\big)\\ &\qquad + p\,P_n(x,t')+q\,Q_n(x,t')\end{aligned}$$

p resp. q étant les probabilités pour que $X(t)<y$ sous les hypothèses dont les probabilités sont resp. P_n et Q_n. Donc

(47)

(47.1) $$F[x,y,s,t \mid a,\sigma] = \int_{-\infty}^{\infty} F\big[z,y,t_m^{(n)},t\big]\,\mathrm{d}G\big(x,z,t_0^{(n)},t_{m'}^{(n)}\big)+\Xi(n)+2(P_n+Q_n)$$

Soit K' un nombre suffisamment grand pour que

$$F[x,K',s,t]-F[x,-K',s,t]>1-\varepsilon$$

Prenons $K>K'$ suffisamment grand pour qu'on ait

$$\begin{aligned} F[-K,\pm K',u,t]>1-\varepsilon &\quad \text{quelque soit } s<u<t \\ F[K,\pm K',u,t]<\varepsilon &\quad\quad\quad '' \quad\quad\quad '' \end{aligned}$$

On a alors en appliquant la formule (47.1)

$$1-\varepsilon<\int_{-K}^{K}\cdots\int_{-K}^{K}\mathrm{d}_{z_1}G\cdots\mathrm{d}_{z_m}G+P_n+Q_n\varepsilon-P_n(1-\varepsilon)+\Xi(1/n)$$

c'est à dire

$$\int_{-K}^{K}\cdots\int_{-K}^{K}\mathrm{d}_{z_1}G\cdots\mathrm{d}_{z_m}G=1-(P_n+Q_n)>1-3\varepsilon+\Xi(1/n)$$

$$P_n+Q_n<3\varepsilon+\Xi(1/n) \text{ (}^1\text{)}$$

Donc

$$\left|F(x,y,s,t\mid a,\sigma)-\int_{-\infty}^{\infty}F\big[z,y,t_m^{(n)},t\big]\,\mathrm{d}G_n\big(x,z,t_0^{(n)},t_m^{(n)}\big)\right|<3\varepsilon+\Xi(1/n)$$

Si $t_m^{(n)}$ est suffisamment voisin de t, on aura

$$F(x,y,s,t\mid a,\sigma)<G_n\big(x,y+\varepsilon',t_0^{(n)},t_m^{(n)}\big)+3\varepsilon+\Xi(1/n)+\Xi\big(t-t_m^{(n)}\big)$$

([1]) L'expression $\Xi(1/n)$ de la formule tend vers zéro si K reste fixe et $\big(t-t_m^{(n)}\big)$ borné inférieurement.

(48)

et

(48.1) $$F(x,y,s,t\mid a,\sigma)>G_n\big(x,y-\varepsilon',t_0^{(n)},t_m^{(n)}\big)-3\varepsilon+\Xi(1/n)+\Xi\big(t-t_m^{(n)}\big)$$

ε' restant fixe, nous pouvons prendre $\big(t-t_m^{(n)}\big)$ suffisamment petit compris entre ε_1 et $1/2\varepsilon_1$ pour que les expressions $\Xi\big(t-t_m^{(n)}\big)$ des formules (47.1) et (48.1) soient $<\varepsilon$ en valeur absolue, [*rayé* prenons alors] et n assez grand pour que les expressions $\Xi(1/n)$ soient $<\varepsilon$. ε' étant arbitraire, il en résulte 4.

C. q. f. d.

(49)

§

XX *Toute solution régulière $F[x, y, s, t]$ de l'équation de Kolmogoroff est continue par rapport à t et y en tout point (y_1, t_1) où a, σ et $1/\sigma$ sont continues.*

Démonstration. – Occupons nous d'abord de la continuité par rapport à y. Posons $\sigma(y_1, t_1) = \sigma_1$. ε étant donné si $|v - y_1| < \varepsilon_1(\varepsilon)$ et $|u - t_1| < \varepsilon_1(\varepsilon)$ on a $|\sigma(v, u) - \sigma(y_1, t_1)| < \varepsilon$ et $|a(v, u)| < K$, K étant p. ex. $|a(y_1, t_1)| + 1$. Il résulte du théorème du n° 13 que ε_2 étant donné arbitrairement petit, on peut trouver u_1 tel que si $|X(u) - y_1| < \varepsilon_1/2$, $u_1 \leqslant u \leqslant t$, la probabilité pour que $\max\limits_{u \leqslant t' \leqslant t} |X(t') - y_1| > \dfrac{3}{4}\varepsilon_1$ est $< \varepsilon_2$ et qu'on ait aussi

$$\Pr\left\{|X(t) - y_1| \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2$$

si $|X(u) - y_1| > \varepsilon_1/2$, ([1])
Si $|z - y_1| \leqslant \varepsilon_1/2$ on a ($u_1 \leqslant u \leqslant t$)

$$F[z, y, u, t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(t - u_1)}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left\{-\frac{(y - z)^2}{\sigma_1^2(t - u)}\right\} \mathrm{d}y + \Xi\left[\frac{K\sqrt{t - u}}{\sigma_1} + \frac{\varepsilon}{\sigma_1^2 - \varepsilon} + \varepsilon_2\right]$$

[*rayé* Nous pouvo Si $|z - y_1| > {}^1\!/_2\,\varepsilon_1$, on a $\displaystyle\int_{|y - y_1| \leqslant \varepsilon_1} \mathrm{d}_y F(z, y, y_1, t_1) < \varepsilon_2$]

([1]) La différence $t - u_1$ est fonction de K, de σ_1, de ε, de ε_1 et de ε_2.

(50)

Si $z \leqslant y_1 - \varepsilon_1/2$, on a $F[z, y, u_1, t_1] > 1 - \varepsilon_2$ quand $y \geqslant y_1 - \varepsilon_1/4$. Si $z \geqslant y_1 + \varepsilon_1/2$, on a $F[z, y, u_1, t_1] < \varepsilon_2$ quand $y \leqslant y_1 + \varepsilon_1/4$.
[*rayé* Envisageons] Supposons $|y - y_1| < \varepsilon_1/4$ alors

$$\begin{aligned} F[x, y, s, t_1] &= \int_{-\infty}^{\infty} F[z, y, u_1, t_1]\, \mathrm{d}_z F[x, z, s, u_1] \\ &= \int_{|z - y_1| \leqslant \varepsilon_1/2} + \int_{|z - y_1| > \varepsilon_1/2} \\ &= F[x, y_1 - \varepsilon_1/2, s, u_1] + \int_{y_1 - \varepsilon_1/2}^{y_1 + \varepsilon_1/2} F[z, y, u_1, t_1]\, \mathrm{d}_z F[x, z, s, u_1] + \theta\varepsilon_2 \end{aligned}$$

$\overline{\varepsilon}$ étant un nombre arbitrairement petit > 0, prenons ε_1, ε_2, ε et u_1 tels que l'expression

$$\Xi\left[\frac{K\sqrt{t - u}}{\sigma_1} + \frac{\varepsilon}{\sigma_1^2 - \varepsilon} + \varepsilon_2\right]$$

de la formule (page *(49)*) soit $< \overline{\varepsilon}/4$, que $\varepsilon_2 < \overline{\varepsilon}/4$. Nous pouvons alors prendre η' assez petit pour que

$$\bigl|F[z, y, u_1, t_1] - F[z, y_1, u_1, t_1]\bigr| < \overline{\varepsilon}/2$$

si $|y-y_1| \leqslant \eta'$.
Si $|y-y_1| \leqslant \eta'$, on aura donc

$$\big|F[x,y,s,t_1]-F[x,y_1,s,t_1]\big| < \overline{\varepsilon}.$$

(51)

Nous avons ainsi prouvé la continuité de $F[x,y,s,t_1]$ par rapport à y pour $y=y_1$.

$|y-y_1|$ étant $< \eta'/2$ envisageons la différence $F[x,y,s,t]-F[x,y_1,s,t_1]$, t étant très voisin de t_1. [*rayé* Supposons d'abord $t>t_1$]
Alors si $|t-t_1|<\varepsilon_4$, il résulte du corollaire à la proposition du n° XIV qu'on a si $z>y_1+\eta'$

$$F\Big[z,y_1+\frac{\eta'}{2},t,t_1\Big] \quad \text{(resp.} \quad F\Big[z,y_1+\frac{\eta'}{2},t_1,t\Big]) < \overline{\varepsilon}$$

et si $z \leqslant y_1-\eta'$

$$F\Big[z,y_1-\frac{\eta'}{2},t,t_1\Big] \quad \text{(resp.} \quad F\Big[z,y_1-\frac{\eta'}{2},t_1,t\Big]) > 1-\overline{\varepsilon}.$$

Il résulte alors facilement de l'équation de Chapman

$$\overline{\varepsilon}+F[x,y_1+\eta',s,t_1] \geqslant F\Big[x,y_1+\frac{\eta'}{2},s,t\Big] \geqslant F\Big[z,y_1-\frac{\eta'}{2},s,t\Big] \geqslant F[x,y_1-\eta',s,t]-\overline{\varepsilon}$$

Or $\big|F[x,y_1\pm\eta',s,t_1]-F[x,y_1,s,t_1]\big|<\overline{\varepsilon}$.
Donc si $s<u_1$, $|y-y_1|<\eta'/2$, $|t-t_1|<\varepsilon_4$

$$\big|F[x,y,s,t]-F[x,y_1,s,t_1]\big| < 2\overline{\varepsilon}$$

c. q. f. d.

(52)

En revoyant les calculs on voit qu'on a le

THÉORÈME. – *Soit $\eta(\varepsilon)$ une fonction positive $\to 0$ si $\varepsilon \to 0$. Si $|\sigma(v,u)-\sigma(y_1,t_1)|<\eta(\varepsilon)$ si $|v-y_1|+|u-t_1|<\varepsilon$ pour $\varepsilon<\varepsilon_0$, et $\sigma^{-1}(y_1,t_1)<K$, $\sigma(y_1,t_1)<K$, $|a(v,u)|<K$ pour $|v-y_1|+|u-t_1|<\varepsilon_0$, il existe $\varphi(\varepsilon)=\varphi_{K,h}(\varepsilon'\,/\,\eta(\varepsilon),\varepsilon_0)$ tendant vers zéro si $\varepsilon'\to 0$, telle que pour $t_1-s>h$*

$$\big|F[x,y,s,t]-F[x,y,s_1,t_1]\big| < \varphi(\varepsilon)$$

si $|s-s_1|+|t-t_1|<\varepsilon$.

55

on ~~obtient~~ prouve que
$$\psi[\;\; X_1(\tau)-X_2(\tau_1)] = 1+O[X_1(\tau)-X_2(\tau_1)]$$

b)

Supposons $X_1(\tau_1) < X_2(\tau_1)$, soit $Z(t)=X_1(t)-X_2(t)$
Si on a pour un t $Z(t)>0$ ~~on a en pour un t' $(\tau_1<t'<t)$ X~~ les 2 particules se sont rencontrées avant l'instant t. La loi de probabilité de ~~$X_1(\tau_1)-X_2(\tau_1)$~~
$Z(t)-Z(\tau_1)$ est, si $t-\tau_1$ est très petit $\alpha'<X_1(\tau_1)<X_2(\tau_1)<\beta'$, ~~très voi~~ $X_1(\tau_1)-X_2(\tau_1)$ $<\varepsilon$ très voisin d'une loi de Gauss. On démontre alors 21 d'une façon bien analogue à 5 et on vérifie que la prob. pour que les particules se rencontrent ~~tend~~ avant l'instant $\tau>\tau_1$ tend vers 1 uniformément par rapport à $X_1(\tau_1)$ et $X_2(\tau_1)$ $(\alpha'<X_1(\tau_1)<X_2(\tau_1)<\beta')$ si $X_1(\tau_1)-X_2(\tau_1)\to 0$. Dans le cas où on peut prendre α et $\beta=\infty$ une méthode différente permet de prouver que la prob. en question est ~~de~~ la forme $1+O[X_1(\tau_1)-X_2(\tau_1)]$ ce qui s'étend probablement au cas général.

(53)

XXI *Supposons a, σ et $1/\sigma$ continues pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $\tau_1 \leqslant s \leqslant \tau_2$. Considérons 2 particules mobiles dont le mouvement aléatoire est régi par la même loi $\{F(x,y,s,t)\}$, les deux particules se mouvant indépendamment l'une de l'autre. Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ les positions des deux particules à l'instant t. Si on a $\alpha < \alpha' < X_1(\tau_1) < X_2(\tau_1) < \beta' < \beta$ la probabilité pour que les 2 particules se rencontrent avant l'instant τ_2 tend vers 1 si $X_1(\tau_1) - X_2(\tau_1) \to 0$.*

Démonstration. – [*début rayé, voir note* 20]

(54)
[*page rayée, voir note* 20]

(55)

Supposons $X_1(\tau_1) < X_2(\tau_1)$, soit $Z(t) = X_1(t) - X_2(t)$. Si on a pour un t, $Z(t) > 0$, [*rayé* on a eu pour un t' ($\tau_1 < t' < t$)] les 2 particules se sont rencontrées avant l'instant t. La loi de probabilité de [*rayé* $X_1(\tau_1) - X_2(\tau_1)$] $Z(t) - Z(\tau_1)$ est, si $t - \tau_1$ est très petit, $\alpha' < X_1(\tau_1) < X_2(\tau_1) < \beta'$, [*rayé* très voi] $X_1(\tau_1) - X_2(\tau_1) < \varepsilon$, très voisine d'une loi de Gauss. On démontre alors 21 d'une façon bien analogue au n° 5 et on vérifie que la probabilité pour que les particules se rencontrent [*rayé* tend] avant l'instant $\tau > \tau_1$ tend vers 1 uniformément par rapport à $X_1(\tau_1)$ et $X_2(\tau_1)$ ($\alpha' < X_1(\tau_1) < X_2(\tau_1) < \beta'$) si $X_1(\tau_1) - X_2(\tau_1) \to 0$. Dans le cas où on peut prendre α et $\beta = \infty$ une méthode différente permet de prouver que la probabilité de la question est de la forme $1 + \mathrm{O}\big[X_1(\tau_1) - X_2(\tau_1)\big]$, ce qui s'étend probablement au cas général.

(56)

XXII Proposition. – *L'ensemble des fonctions $F(x,y,s,t)$ continues par rapport à x pour $\alpha < x < \beta$, $\tau_1 \leqslant s \leqslant \tau_2$, correspondant à des a et σ continues par rapport à x, s avec $|a(x,s)| < A$, $B_1 < \sigma^2(x,s) < B_2$ pour $\alpha < x < \beta$, $\tau_1 < s < \tau_2$ est uniformément continu comme fonctions de x, s par rapport à a et σ.*

Démonstration. – 1) Montrons d'abord que la continuité par rapport à x entraîne celle par rapport à s.
En effet si $s' < s$

[*rayé* $F(x,y,s',t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{y+\varepsilon} F(z,y,s,t)\,\mathrm{d}_z F(x,z,s',s) + \int_{y+\varepsilon}^{\infty} F(z,y,s,t)\,\mathrm{d}_z F(x,z,s',s)$]

$$F(x,y,s',t) < F(x+\theta\varepsilon,y,s,t) + \theta' \int_{|y-x|>\varepsilon} \mathrm{d}_y F(x,y,s',s) \tag{56.1}$$

et si $\alpha + \varepsilon < x < \beta - \varepsilon$, $\tau_1 < s' < s < \tau_2$, en vertu du théorème 13 le dernier terme tend vers zéro uniformément par rapport à x et s' ($s' < \tau_2 - \varepsilon'$) et a et σ [*rayé* dans le] de l'ensemble quand $s' - s \to 0$. Si $F(x,y,s,t)$ est donc continu, on aura $|F(x+\theta\varepsilon,y,s,t) - F(x,y,s,t)| < \eta(\varepsilon,x,y,s,t)$, η tendant vers zéro indépendamment de a et σ de l'ensemble si $\varepsilon \to 0$. Nous prouverons qu'on peut [*rayé* prendre] remplacer $\eta(\varepsilon,x,y,s,t)$

(57)

par $\eta(\varepsilon,h)$, η tendant vers zéro si $\varepsilon \to 0$, si $\alpha < \alpha' < x < \beta' < \beta$, $\tau_1 \leqslant s < \tau_2' < \tau_2$, $t - s > h$. Il en résultera la continuité uniforme de F en fonction de s par application de la formule (56.1).

2) Prouvons maintenant cette continuité uniforme de F par rapport à x. Il résulte du numéro XXI que la probabilité pour que $X_1(h)$ et $X_2(h)$ se rencontrent avant l'instant t, lorsque $|X_1(s) - X_2(s)| < \varepsilon$, $\tau_1 \leqslant s < \tau_2' < \tau_2$, $t - s > h$, $\alpha' < |X_1(s)| < X_2(s) < \beta'$, [*rayé* tend vers 1] est $> 1 - \eta(\varepsilon,h)$.

Nous pouvons prendre un nombre fini d'instants $t_1,\dots,t_n$ de l'intervalle ouvert (s,t) tel que en dehors de cas de probabilité $\eta(\varepsilon,h) + \varepsilon'$ (ε' arbitrairement petit) on a au moins un t_i avec $|X_1(t_i) - X_2(t_i)| < \varepsilon''$ et $\alpha < X_1(t_i) < \beta$, $\alpha < X_2(t_i) < \beta$.

Appelons $G_1(x_1,x_2,z)$ la probabilité pour qu'on ait à l'instant t_i pour la première fois $|X_1(t_i) - X_2(t_i)| < \varepsilon''$ et que $X_1(t_i)$ soit $< z$ (mais $> \alpha$). Nous pouvons écrire

$$F(x_1,y,s,t) = \sum \int_\alpha^\beta F(x,y,t_i,t)\,\mathrm{d}G_1(x_1,x_2,z) + R'$$

où $R' < \varphi(\varepsilon,h) + \varepsilon'$. D'autre part si

(58)

$$\big|X_1(t_i) - X_2(t_i)\big| < \varepsilon'' \quad \text{et} \quad \alpha < X_1(t_i) \leqslant z < \beta$$

on a

$$F\big[X_2(t_i),y,t_i,t\big] = F[z,y,t_i,t] + \theta\varepsilon'''$$

donc

$$F(x_2,y,s,t) = \sum \int_\alpha^\beta F(z,y,t_i,t)\,\mathrm{d}G_1(x_1,x_2,z) + \theta(\varepsilon' + \varphi(\varepsilon,h) + \varepsilon''')$$

ε' et ε''' pouvant être rendus arbitrairement petits, [*rayé* si ε' et ε''' tend] il en résulte le théorème.

(59) raturée (57)

XXIII Théorème. – *Si $F(x,y,s,t)$ est continu par rapport à x pour tout y quel que soit s, t de $[S,T]$, si $X(t)$ est p. s. continu pour $S \leqslant t \leqslant T$ quel que soit $X(s)$, $F(x,y,s,t)$ est monotone par rapport à x.*

Démonstration. – [*rayé* Soit $X_1 < X_2$] Considérons de nouveau 2 particules mobiles dont le mouvement aléatoire est régi par la même loi $F(x,y,s,t)$, les 2 particules se mouvant

indépendamment l'une de l'autre. Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ les positions des deux particules à l'instant t. Supposons $X_1(s) < X_2(s)$. La probabilité $F(x, y-0, s, t)$ est la probabilité pour que $X_1(t)$ soit $< y$, $X_1(s)$ étant $= x$, $F(X_2(s), y-0, s, t)$ est celle pour que $X_2(t) < y$. $X(u)$ étant p. s. continu, 3 cas sont seuls possibles ([1]).
1[er] cas : on a $X_1(u) \leqslant X_2(u)$ pour tout u compris entre s et t.
2[ième] cas : on a pour un $u < t$, $X_1(u) = X_2(u)$.
3[ième] cas : on a $X_1(u) < X_2(u)$ pour tout $u < t$ mais $X_1(t) = X_2(t)$.

Dans le premier et le troisième cas si $X_2(u)$ est $< y$, [*rayé* on a aussi] $X_1(u)$ est a fortiori $< y$. La probabilité pour que $X_i(u) < y$ dans le

([1]) en dehors de mouvements ayant une probabilité totale nulle.

(58) (seconde page (58))

cas où les courbes $X_1(u)$ et $X_2(u)$ se rencontrent est – compte-tenu du fait que la probabilité pour qu'on ait $\max\limits_{s\leqslant u\leqslant t} |X_1(u)|$ ou $\max\limits_{s\leqslant u\leqslant t} |X_2(u)| > K$ tend vers zéro si $K \to \infty$ et que $F(x, y, s, t)$ est continu par hypothèse par rapport à x – la même pour $X_1(u)$ et $X_2(u)$.
Il en résulte que

$$F(x, y-0, s, t)$$

est monotone par rapport à x. Il en est de même de $F(x, y+0, s, t)$ et par hypothèse

$$F(x, y, s, t) = F(x, y+0, s, t)$$

ce qui finit la démonstration du théorème.

XXIV THÉORÈME. – *Si $F(x, y, s, t)$ est continu par rapport à x pour tout y quel que soit (s, t) de $[S, T]$, si $X(t)$ est p. s. continu pour $S \leqslant t \leqslant T$ quel que soit $X(s)$, si $F(-\infty, y, s, t) = 1$, $F(+\infty, y, s, t) = 0$ la fonction*

$$G[x, y, t, s] = 1 - F[y, x, s, t]$$

satisfait à l'équation fonctionnelle

$$G(y, x, t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(z, x, u, s)\,\mathrm{d}_z G(y, z, t, u) \quad (t > u > s) \tag{58.1}$$

(59) (seconde page (59))

qui devient l'équation de Chapman en posant $t' = -t$, $s' = -s$.

Démonstration. – $F(x, y, s, t)$ étant monotone par rapport à x

$$F(x, y, s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z, y, u, t)\,\mathrm{d}_z F(x, z, s, u)$$

$$= F(\infty, y, u, t)\, F(x, \infty, s, u) - F(-\infty, y, u, t)\, F(x, -\infty, s, u) - \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, z, s, u)\, \mathrm{d}_z F(z, y, u, t)$$

(59.1) $$F(x, y, s, t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, z, s, u)\, \mathrm{d}_z F(z, y, u, t)$$

Posons $G[x, y, t, s] = 1 - F[y, x, s, t]$
la formule (59.1) se transforme en (58.1). c. q. f. d.

[*rayé* XXV]

COROLLAIRE. – *Sous les hypothèses du théorème de la page* 57*, la probabilité pour que le point mobile rencontre la courbe continue* $X_1(\tau) < X_2(\tau)$ *avant de rencontrer* $X_2(\tau)$ *et avant l'instant* t *est une fonction non croissante de* x*. Il en est de même de la probabilité pour que le point mobile rencontre* $X_1(\tau)$ *avant l'instant* t *ou se trouve à gauche de* x *à l'instant* t *sans avoir rencontré* $X_2(\tau)$ *auparavant.*

(Par conséquent $v(x, s)$ étant la fonction du n° 17, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ est < 0)

(60)

XXV

§ Théorèmes d'existence.

1ER THÉORÈME. – *Les fonctions* $a(x, s)$*,* $\sigma(x, s)$ *étant données d'avance continues et bornées de même que* $1/\sigma$*, il existe une fonction* $F(x, y, s, t)$ *solution de l'équation de Kolmogoroff avec les coefficients* a *et* σ*.*

Démonstration. – Soient a_n et σ_n une suite de fonctions 4 ou 5 fois dérivables par rapport à x, s avec $|a - a_n| < 1/n$, $|\sigma - \sigma_n| < 1/n$. D'après le théorème de Feller ([1]) à a_n et σ_n correspond une solution bien définie de l'équation de Kolmogoroff que nous noterons F_n. Montrons que de la suite des fonctions F_n on peut extraire une suite partielle F_{n_j} convergeant vers une limite.

Il est d'abord possible d'extraire de la suite F_n une suite F_{n_j} telle que

$$\lim_{n_j \to \infty} F_{n_j}(x_i, y_i, s_i, t_i)$$

existe [*rayé* $= \overline{F}(x_i, y_i, s_i, t_i)$] si les « points » (x_i, y_i, s_i, t_i) sont en infinité dénombrable.
Il résulte des propositions [xx] qu'on a

$$|F_n(x', y', s', t') - F_n(x, y, s, t)| < \varepsilon$$

si $|x - x'| + |y - y'| + |s - s'| + |t - t'| < \varepsilon'$ et $t - s > h$, $\varepsilon = \varepsilon_h(\varepsilon')$ pouvant être

([1]) Math. Ann. (?) 1936 ou 1937

(61)

pris arbitrairement petit si ε' tend vers zéro.

[*rayé* On a donc] Prenons pour l'ensemble (x_i, y_i, s_i, t_i) l'ensemble des « points » (x, y, s, t) pour lesquels x, y, s, t sont rationnels. Il résulte de la continuité uniforme des fonctions F_{n_j} que

$$\lim_{n_j \to \infty} F_{n_j}(x, y, s, t)$$

existe pour tout x, y, s, t. Soit $F(x, y, s, t)$ cette limite. $F(x, y, s, t)$ est continu par rapport à x, y, s, t, monotone par rapport à x et y avec $F(x, \infty, s, t) = 1$, $F(x, -\infty, s, t) = 0$, $F(-\infty, x, s, t) = 1$, $F(+\infty, x, s, t) = 0$, de plus F est lipschitzien par rapport à x.
Montrons que la fonction F est solution de l'équation de [*rayé* Chap] Kolmogoroff. On a

(61.1) $$F_{n_j}(x, y, s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{n_j}(z, y, u, t)\,\mathrm{d}_z F_{n_j}(x, z, s, u)$$

$F_{n_j}(z, y, u, t) \to F(z, y, u, t)$ uniformément et est une fonction continue de z. Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{n_j}(z, y, u, t)\,\mathrm{d}_z F_{n_j}(x, z, s, u) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} F(z, y, u, t)\,\mathrm{d}_z F(x, z, s, u)$$

et l'équation [*rayé* de Chapman] (61.1) devient l'équation de Chapman–Kolmogoroff pour F.
On a si $|t - s| < \varepsilon$

(62)

$$\frac{1}{t-s} \int_{|y-x|>\eta} \mathrm{d}_y F_{n_j}(x, y, s, t) < \varepsilon'(\varepsilon, \eta)$$

où $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon'(\varepsilon, \eta) = 0$ en vertu de la proposition
Donc

$$\lim_{t \to s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|>\eta} \mathrm{d}_y F(x, y, s, t) = 0$$

et, $i = 1, 2$

$$\int_{|y-x|<1} (y-x)^i\,\mathrm{d}_y F_{n_j}(x, y, s, t) \longrightarrow \int_{|y-x|<1} (y-x)^i\,\mathrm{d}_y F(x, y, s, t)$$

il en résulte que

$$\frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<1} (y-x)\,\mathrm{d}_y F(x, y, s, t) \longrightarrow a(x, s)$$
$$\frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<1} (y-x)^2\,\mathrm{d}_y F(x, y, s, t) \longrightarrow \sigma^2(x, s)$$

uniformément par rapport à x et s à distance finie.
Ceci finit la démonstration du théorème.

Première extension. – *Supposons a, σ et $1/\sigma$ continues par rapport à (x, s), mais non bornées pour $|x| \to \infty$. Supposons qu'il existe une suite de fonctions $F(x, y, s, t \mid a_n, \sigma_n)$ les fonctions a_n et σ_n*

(63)

et σ_n^{-1} étant continues et bornées, a_n et σ_n tendant vers a et σ, les solutions $F(x,y,s,t \mid a_n,\sigma_n)$ satisfaisant à

$$F(x,-y,s,t \mid a_n,\sigma_n)+1-F(x,y,s,t \mid a_n,\sigma_n) < \varepsilon(x,y,s,t)$$

avec $\lim\limits_{y\to\infty} \varepsilon(x,y,s,t)=0$.

Sous l'hypothèse indiquée les raisonnements d'existence précédents restent valables, avec de très légers changements, celui-ci s'étend à ce cas.

2E THÉORÈME D'EXISTENCE. – *Si les fonctions a et σ sont continues par rapport à (x,s), si σ ne s'annule que pour un nombre fini de valeurs de s et si* a) *σ est borné ou* b) *si on peut trouver une suite de fonctions a_n et σ_n convergeant vers a et σ pour lesquelles a_n, σ_n et $1/\sigma_n$ sont bornées et*

$$F(x,-y,s,t \mid a_n,\sigma_n)+1-F(x,y,s,t \mid a_n,\sigma_n) < \varepsilon(x,y,s,t)$$
$$\lim_{y\to\infty} \varepsilon(x,y,s,t)=0$$

il existe une solution régulière $F(x,y,s,t \mid a,\sigma)$ de l'équation de Kolmogoroff, [rayé *monotone par rapport à x, continue par rapport à y, t en tout point (y_1,t_1) où $\sigma(y_1,t_1)\neq 0$, continue par rapport à x, s*]

(64)

avec les données a et σ, monotone par rapport à x pour tout x, s avec $\sigma(x,s)>0$.

Démonstration. – Nous pouvons supposer que σ ne s'annule que pour la valeur t_1 de s.
D'après un théorème d'existence antérieur il existe une solution $F(x,y,s,t \mid a,\sigma)$ régulière et continue par rapport à x, définie pour $t<t_1$ ou $s>t_1$. Soient

$$\overline{F}(x,y,t_1,t)=\overline{\lim_{s\to t_1}}\, F(x,y,s,t) \quad (s>t_1>t)$$
$$\underline{F}(x,y,t_1,t)=\underline{\lim}_{s\to t_1}\, F(x,y,s,t)$$

Les fonctions $\overline{F}$ et $\underline{F}$ sont évidemment des fonctions monotones non croissantes. Supposons s' quelconque entre t_1 et $t_1+\eta$, si η est suffisamment petit, a et σ étant bornées supérieurement et continues pour x borné, on a

$$F(x,x+\varepsilon,s',t_1+\eta)-F(x,x-\varepsilon,s',t_1+\eta)>1-\varepsilon$$

On a donc, en appliquant l'équation de Chapman

$$\begin{aligned} F(x,y,s,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(z,y,t_1+\eta,t)\,\mathrm{d}_z F(x,z,s,t_1+\eta) \\ &< F(x-\varepsilon,y,t_1+\eta,t)+\varepsilon \end{aligned}$$

[*rayé* D'autre part si] Prenons η tel que

$$F(x-\varepsilon,y,t_1+\eta,t) < \underline{F}(x-\varepsilon,y,t_1,t)+\varepsilon$$

(65)

On obtient

$$\underline{F}(x,y,t_1,t) \leqslant \overline{F}(x,y,t_1,t) < \underline{F}(x-\varepsilon,y,t_1,t)+\varepsilon$$

ε pouvant être pris arbitrairement petit, il résulte

$$\underline{F}(x,y,t_1,t) \leqslant \overline{F}(x,y,t_1,t) < \underline{F}(x-0,y,t_1,t)$$

Les fonctions $\underline{F}$ et $\overline{F}(x,y,s,t)$ coïncident donc en tout point de continuité de $\underline{F}$. Posons

$$F(x,y,t_1,t) = \overline{F}(x-0,y,t_1,t).$$

Soit u un instant pour lequel $\sigma(z,u)$ est $\neq 0$, alors $F(z,y,u,t)$ est continu par rapport à z. L'ensemble des points x pour lesquels

$$\overline{F}(x,z,t_1,u) \neq F(x,z,t_1,u)$$

est dénombrable au plus pour chaque x, prenons un ensemble dénombrable E de points partout dense sur la droite, l'ensemble [*rayé* dénombrable] G des points x pour lesquels il y a z de E avec

$$\overline{F}(x,z,t_1,u) \neq \underline{F}(x,z,t_1,u)$$

est dénombrable aussi. Prenons un point x qui n'appartient pas à G. Pour cet x on a

$$\overline{F}(x,z,t_1,u) = \underline{F}(x,z,t_1,u)$$

pour tout z de E. $\overline{F}$ et $\underline{F}$ étant monotones par rapport à z, l'égalité $\overline{F} = \underline{F}$ subsistera pour cet x en tout z point de continuité de $\overline{F}$ ou $\underline{F}$ et

$$\int F(z,y,u,t)\,\mathrm{d}_z\overline{F} = \int F(z,y,u,t)\,\mathrm{d}_z\underline{F}$$

(68)

[*rayé* Nous pouvons prendre un point x n'appartenant pas à G avec $\overline{F}(x,y,t_0,t) = \underline{F}(x,y,t_0,t)$]
Si $x \notin G$ on pourra trouver une suite $(s_i) \to t_1$ ($s_i > t_1$) telle que

$$F(x,z,s_i,u) \to \underline{F}(x,z,t_1,u) = \overline{F}(x,z,t_1,u)$$

pour presque tout z et que de plus

$$F(x,y,s_i,t) \to \overline{F}(x,y,t_1,t)$$

[*rayé* On a donc la f] Par suite

$$F(x,y,s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z,y,u,t)\,\mathrm{d}_z F(x,z,s_i,t) \to \int_{-\infty}^{+\infty} F(z,y,u,t)\,\mathrm{d}_z\overline{F}(x,z,t_1,t)$$

On a donc la formule

$$\overline{F}(x,y,t_1,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F[z,y,u,t]\,\mathrm{d}_z\overline{F}(x,z,t_1,u)$$

valable pour presque tout x. Si x_1 tend vers x par valeurs $> x$, $\overline{F}(x_1, z, t_1, u)$ tend vers $F(x, z, t_1, u)$ et $\overline{F}(x_1, y, t_1, t)$ vers $F(x, y, t_1, t)$, $F[z, y, u, t]$ étant continu par rapport à z, on obtient pour $F(x, y, t_1, t) = \overline{F}(x + 0, y, t_1, t)$ la formule

$$F(x, y, t_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F[z, y, u, t] \, \mathrm{d}_z F(x, z, t_1, u)$$

Il en résulte l'équation de Chapman pour F si $s \geqslant t_1$.

Nous pouvons trouver une fonction $F(x, y, s, t)$

(69)

solution régulière de l'équation de Kolmogoroff avec les coefficients a et σ pour $t < t_1$. Soit

$$\overline{F}[x, y, s, t_1] = \overline{\lim_{t_1' \to t_1}} \; F[x, y, s, t_1'] \quad (t_1' < t_1)$$
$$\underline{F}[x, y, s, t_1] = \underline{\lim_{t_1' \to t_1}} \; F[x, y, s, t_1'] \quad (t_1' < t_1)$$

On prouve facilement que les 2 fonctions coïncident en tout y point de continuité de $\overline{F}$. Posons

$$F(x, y, s, t_1) = \overline{F}[x, y + 0, s, t_1]$$

La fonction $F(x, y, s, t)$ satisfait comme on voit facilement pour $t \leqslant t_1$ à l'équation de Chapman et pour $t < t_1$ à l'équation de Kolmogoroff. Posons pour $s < t_1 < t$

$$F(x, y, s, t) = F(x, y, s, t_1) * F(x, y, t_1, t)$$

On vérifie sans peine que la fonction F ainsi définie est solution de l'équation de Kolmogoroff avec les données a et σ.

c. q. f. d.

On étend ce théorème d'existence de la manière suivante qui est la plus générale qui puisse être envisagée avec nos méthodes.

THÉORÈME D'EXISTENCE. – *Si les fonctions $a(x, s)$ et $\sigma(x, s)$ sont continues par rapport à (x, s), s'il existe un ensemble partout dense d'instants s pour lesquels $\sigma(x, s)$ est différent de 0 quel que soit x*

(70)

[*Début rayé, voir note* 25]

si enfin il existe une suite de fonctions continues et bornées a_n et σ_n avec $a_n \to a$ et $\sigma_n \to \sigma$, pour *lesquelles un $F(x,y,s,t\mid a_n,\sigma_n)$ satisfait à la condition*

$$F(x,-y,s,t\mid a_n,\sigma_n)+1-F(x,y,s,t\mid a_n,\sigma_n)<\varepsilon(y,s,t)$$

avec

$$\lim_{y\to\infty}\varepsilon(y,s,t)=0$$

il existe au moins une solution régulière de l'équation de Kolmogoroff avec les coefficients a et σ.

(71)

XIII′ Suite de XIII ([1]) Probabilité des grandes valeurs.

[*rayé* Si nous avons $\max\limits_{s<t'<t}\left|X(t')-X(s)-\int_s^{t'}a[X(u),u]\,\mathrm{d}u\right|<K$, nous avons en désignant par $A^+(y,u)$ le maximum de $a(y,u)$ par]

Les limitations obtenues au n° 13 peuvent être remplacées par d'autres qui dans certains cas sont plus précises.

Supposons d'abord a, σ bornées et $X(t)$ continu (ce qui est presque sûr) et qu'on a

$$\left|X(\tau)-X(s)-\int_s^{\tau}a(X(u),u)\,\mathrm{d}u\right|<K \tag{71.1}$$

Si $X(t)$ est $>X(s)$ il y a un instant $t_1\geqslant s$ où $X(t_1)=X(s)$ tel que $X(t')>X(s)$ pour $t>t'>t_1$.
On a en vertu de (71.1)

$$\left|\int_s^{t_1}a(X(u),u)\,\mathrm{d}u\right|<K$$

donc

$$X(\tau)<X(s)+2K+\int_{t_1}^{t}a(X(u),u)\,\mathrm{d}u$$

et si nous appelons $A^{(+)}(x_1,x_2,u)$ le maximum de $\max\{0,a(y,u)\}$ pour $x_1\leqslant u\leqslant x_2$ (si $x_1<x_2$)

$$=0\ \text{ si }\ x_1>x_2,\ \text{ on a}$$

$$X(\tau)<X(s)+2K+\int_s^{t}A^+[(X(s),X(u),u]\,\mathrm{d}u$$

On obtient exactement de la même façon qu'au n° 13 le

THÉORÈME. – *Supposons a et σ continues. Soit $A^+[x_1,x_2,u]=0$, si $x_1>x_2$, $=\max\limits_{x_1\leqslant y\leqslant x_2}\big\{\max\{a(y,u),0\}\big\}$ Soit*

([1]) Devra être intercalé entre XIII et XIV

(72)

$A^{(-)}[x_1, x_2, u] = 0$ *si* $x_1 \geqslant x_2$, $= \min\limits_{x_1 \leqslant y \leqslant x_2} \left\{ \min\left(a(y,u), 0\right) \right\}$ *pour* $x_1 < x_2$. *Soit*

$$\overline{\sigma}[x_1, x_2, u] = \max_{x_1 \leqslant y \leqslant x_2} \sigma(y,u)$$

Soit $U^{(+)}(s,t,K,X(s))$ *la solution de l'équation différentielle*

$$U'(t) = A^{(+)}[X(s), U(t), t]$$

$= X(s) + 2K$ *pour* $t = s$
Soit $U^{(-)}(s,t,K,X(s))$ *la solution de l'équation différentielle*

$$U'(t) = A^{(-)}[U(t), X(s), t]$$

se réduisant à $X(s) - 2K$ *pour* $t = s$.
Soit

$$\Psi(s,t,K,X(s)) = \int_s^t \overline{\sigma}^2[U^-(u), U^+(u), u]\,\mathrm{d}u$$

où $U^-(u) = U^{(-)}(s,t,K,X(s))$, $U^+(u) = U^{(+)}(s,t,K,X(s))$.
Si $U^{(+)}(s,t,K,X(s))$ *et* $U^{(-)}(s,t,K,X(s))$ *sont finis, la probabilité pour qu'on ait*

$$U^{(-)}(s,\tau,K,X(s)) < X(\tau) < U^{(+)}(s,\tau,K,X(s))$$

pour tout $s < \tau < t$ *est*

$$> \Phi\left(K/\sqrt{\Psi(s,t,K,X(s))}\right)$$

On démontre aussi la proposition suivante plus générale et plus précise que XIII

THÉORÈME. – *Soient* $\overline{A}[x_1, x_2, u]$ *le maximum de* $a(y,u)$ *pour* $x_1 \leqslant y \leqslant x_2$, $A[x_1, x_2, u]$ *le*

(73)

minimum de $a(y,u)$ *pour* $x_1 \leqslant y \leqslant x_2$, $\overline{\sigma}^2(x_1, x_2, u)$ *le minimum de* $\sigma^2(y,u)$ *pour* $x_1 \leqslant y \leqslant x_2$.
Soient $U_1(s,t,X(s),K)$, $U_2(s,t,X(s),K)$ *les solutions du système*

$$U_1'(t) = \underline{A}[U_1(t), U_2(t), t]$$
$$U_2'(t) = \overline{A}[U_1(t), U_2(t), t]$$

avec les condition initiales

$$U_1(s) = X(s) - K, \quad U_2(s) = X(s) + K$$

Soit $\Psi(s,t,X(s),K)=\int_s^t \overline{\sigma}^2[U_1(u),U_2(u),u]\,\mathrm{d}u$.
Si $U_1(t)$ *et* $U_2(t)$ *sont finis, la probabilité pour qu'on ait pour tout* τ *compris entre* s *et* t

$$U_1(s,\tau,X(s),K)\leqslant X(\tau)\leqslant U_2(s,\tau,X(s),K)$$

est $\geqslant \Phi\left(K/\sqrt{\Psi(s,t,X(s),K)}\right)$.

(74)

La monotonie par rapport à $a(x,s)$

Soient $y_1(t)$, $y_2(t)$ deux fonctions dérivables de t avec $y_1(t)<y_2(t)$. S'il existe une solution $v(x,s)$ de l'équation aux dérivées partielles

$$-\frac{\partial v}{\partial s}=a\,\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\,\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

tendant vers 1 si $(x,s)\to(y_1(s),s)$ [$s<t$], ou si $s\to t$ $x<y$, vers 0 si $(x,s)\to(y_2(s),s)$ pour $s<t$ ou si $s\to t$ $x>y$, régulière dans le domaine G (voir figure 1), la probabilité $H(x,y,s,t\mid a,\sigma)$ qu'un point mobile dont la loi du mouvement est déterminée par $F(x,y,s,t\mid a,\sigma$) [*rayé* se trouve à l'instant t à gauche de y ou ait rencontré la courbe $y_1(u)$ avant l'instant t mais n'a pas rencontré avant l'instant t avant d'avoir rencontré] [*ait*] des trajectoires partant du point (x,s) qui rencontrent la partie du contour à laquelle correspond la valeur 1 avant de rencontrer le reste du contour est comme on sait $v(x,s)$.

Soit $a'(x,s)\leqslant a(x,s)$, *montrons qu'on a pour tout mouvement régulier avec les coefficients* a' *et* σ

$$H(x,y,s,t\mid a',\sigma)\geqslant H(x,y,s,t\mid a,\sigma)=v(x,s)$$

(75)

(cela est évident si la probabilité $H(x,y,s,t\mid a',\sigma)$ est aussi deux fois dérivable par rapport à x, mais nous n'allons pas faire cette hypothèse).

Démonstration. – Adoptons les notations du n° 17. Nous pouvons choisir les bandes I et II assez étroites pour qu'on ait aussi si $(x,s)\in$ I : $H(x,y,s,t\mid a',\sigma)>1-\varepsilon$, $H(x,y,s,t\mid a',\sigma)<\varepsilon$ si $(x,s)\in$ II.
Si $(x,s)\in$ III on a maintenant

$$\begin{aligned}\int v(z,s+\Delta)\ \mathrm{d}_z F(x,z,s,s+\Delta\mid a',\sigma)\\ &=v(x,s+\Delta)+\Delta\left[a'(x,s)\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,s)+\frac{1}{2}\,\sigma^2(x,s)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]+\mathrm{o}(\Delta)\\ &=v(x,s)+(a'-a)\,\frac{\partial v}{\partial x}\Delta+\mathrm{o}(\Delta)\end{aligned}$$

Or v étant monotone par rapport à x, on a toujours $\dfrac{\partial v}{\partial x} < 0$, donc

$$v(x,s) < \int v(z, s+\Delta)\,\mathrm{d}_z F(x,z,s,s+\Delta \mid a',\sigma) + \varepsilon\Delta$$

si Δ est suffisamment petit. En raisonnant alors exactement comme au n° 17 on obtient, cette fois ε pouvant être pris arbitrairement petit

$$H(x,y,s,t \mid a,\sigma) = v(x,s) \leqslant H(x,y,s,t \mid a',\sigma)$$

c. q. f. d.

(76, 77)

[*pages rayées, voir notes.*]

(*Page non numérotée*)

THÉORÈME. – *Sous les hypothèses du n°* 17 *on a si* $a'(x,s) < a(x,s) < a''(x,s)$, *si* $F(x,y,s,t \mid a',\sigma)$ *et* $F(x,y,s,t \mid a'',\sigma)$ *sont deux solutions régulières de l'équation de Kolmogoroff avec les données* a *et* σ *satisfaisant à* $F(x,y,s,t \mid a',\sigma) > 1-\varepsilon$ *si* $z < -K(\varepsilon)$ *et* $F(x,y,s,t \mid a'',\sigma) < \varepsilon$ *si* $z > K(\varepsilon)$ *on a*

$$F(x,y,s,t \mid a',\sigma) \geqslant F(x,y,s,t \mid a,\sigma) \geqslant F(x,y,s,t \mid a'',\sigma)$$

Démonstration. – Désignons par $X_1(t)$, $X(t)$, $X_2(t)$ trois particules mobiles dont le mouvement est régi par $F(x,y,s,t \mid a',\sigma)$, resp. $F(x,y,s,t \mid a,\sigma)$ et $F(x,y,s,t \mid a'',\sigma)$ et dont la position à l'instant s est x.

$$F(x,y,s,t \mid a',\sigma) = \Pr\{X_1(t) < y\}$$
$$F(x,y,s,t \mid a'',\sigma) = \Pr\{X_2(t) < y\}$$
$$F(x,y,s,t \mid a,\sigma) = \Pr\{X(t) < y\}$$

Or on peut écrire

$$\Pr\{$$

(*Manuscrit interrompu, suivent deux pages de calculs non rédigés sur une feuille volante*).

$F(x, y,$

$\int_{-K}^{K}$

$$F(x, y, s, t) < \int_{-K}^{K} F(z, y, s+\Delta, t)\, d_z G + \varepsilon\Delta$$

$$+ \Pr\{|X_1(t)| > K\} F$$

$$< \int_{-K}^{K}\int_{-K}^{K} F(z_2, y, s+2\Delta, t)\, d_z G\, d z_2 G$$

$$+ \Pr\{X_1(t) > \varepsilon\} F$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(z, y, \cancel{s+n\Delta}\, t', t$$

$$\int_{-\infty<z<\infty} \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}} \int\cdots\int_{\cancel{-K,\dots}\ -K\le z_i\le K} F(z, y, t, t)\, d_z G$$

$$+ \varepsilon(t-s)$$

$$+ P_\Delta f + Q_\Delta f'$$

P_Δ étant la probabilité pour qu'il y ait un i ~~avec $x' < \Delta$~~ $X(s+i\Delta) < -K$, Q_Δ celle pour qu'il y ait un $X(s+i\Delta) > K$. f une moyenne de de F pour $x < -K$, f' une " " $x > K$ donc

$$\int_{-\infty<z<\infty} \int\cdots\int \qquad + \varepsilon(t-s) + P_\Delta(1-\dots) + Q_K$$

$F(x,$

$H(x, y, s, t)$

$X_1(t)$

Supposons que $\lim P_n^{(1)}$ est $\neq 0$. La prob. pour que X

$\lim P_n^{(1)} \neq 0$

$X(t)$ atteigne y

le point mobile a

$X(t)$ atteint $-K_1$ et ~~repasse~~ atteint $-K_2$

$X(t)$ atteint $-K_1$

$-K$ et repasse à y sans avoir dé passé $-K_2$

$X(t)$ atteint $-K$ puis $-K_2$ puis $-K$ puis ~~atteint~~ se trouve

à un instant quelconque $< t$

$> y - \xi$ ~~avant d'atteindre~~ mais ne repasse plus à droite

de K_2. $X(t)$ atteint $-K$ puis $-K_1$ puis $-K$

pas atteint de nouveau ~~$X(t)$~~ ~~est~~ $-K_2$ puis $-K$

$X(t)$ atteint $-K$ fait ensuite n fois la navette

entre $-K$ et $-K_2$ et atteint finalement.

La probabilité est donc une somme de la forme

$\sum_{i=0}^{\infty} P_i$ où P_i est la prob. pour que le

point mobile passe

$F(x, y+h, s, t_1) > F(x, y+\frac{h}{2}, s, t)$