C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 1103–1128, 2000

Notes de lecture du pli cacheté

Bernard BRU

Le pli cacheté est écrit sur un cahier d'écolier de la série « Villes et paysages de France » des « docks ardennais », n° 3308, la page de couverture est ornée d'un cliché défraîchi représentant le « Rocher de Bonnevie » qui domine Murat dans le Cantal. On peut penser que le soldat Doblin l'a acheté à l'épicerie de Sécheval au prix, marqué au verso, de 1F 30. Le pli est écrit au stylo à l'encre noire et bleu-noir alternativement, comme tous les manuscrits de Doeblin. Visiblement Doeblin travaillait sur un second cahier du même type non retrouvé et recopiait ses énoncés et ses démonstrations sur le cahier du Rocher, une fois satisfait du résultat obtenu, ce qui peut expliquer les fautes d'inattention que l'on peut relever ici ou là. Deux pages provenant de ce second cahier sont insérées l'une à la page 33 et l'autre à la fin du pli. On peut même penser que Doeblin avait acheté, à l'épicerie de Sécheval, un troisième cahier « Villes et paysages de France » et qu'il recopiait au propre ses énoncés simultanément sur le cahier du Rocher et sur ce troisième cahier, de façon à avoir un double authentique de son mémoire, comme il le faisait systématiquement pour tous ses travaux importants ({12} et {13} notamment). Ce double a été envoyé à l'Académie par courrier séparé dans la deuxième semaine de mars 1940, il a été enregistré le 13 mars 1940, comme l'indique une note ajoutée à l'encre rouge dans le grand registre des plis cachetés au numéro 11.668. *Il n'a pas été possible de retrouver ce dernier cahier qui aurait permis de contrôler un certain nombre de formules mal écrites ou erronées.* L'envoi d'un double n'est pas prévu par les règlements de l'Académie, il a sans doute été déclassé puis égaré.

Comme indiqué sur l'enveloppe d'envoi, le pli 11.668 a été enregistré lors de la séance de l'Académie des sciences du 26 février 1940. Il est signé par Alfred Lacroix (1863–1948), professeur de Minéralogie au Muséum national d'histoire naturelle, secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences pour les sciences physiques depuis le 8 juin 1914. Le secrétaire perpétuel pour les sciences mathématiques était alors Émile Picard (1856–1941). Membre de la section de géométrie de l'Académie depuis le 11 novembre 1889, Picard a été élu secrétaire perpétuel le 2 avril 1917 en remplacement de Gaston Darboux.

On a préservé la numérotation des pages et des paragraphes telle qu'elle figure dans le manuscrit, les pages sont indiquées en italique entre parenthèses *(1), (2),* etc. Les paragraphes sont numérotés à la façon de Doeblin qui a changé de style à partir de la page 17, les numéros de 1 à 6 sont en chiffres arabes, les numéros de VII à XXV en chiffres romains. Il y a deux numéros 3), l'un page 5, l'autre page 10. Doeblin est passé de la page 58 à la page 57, reculant de deux numéros ; il s'est rendu compte de son erreur à la fin du pli et est alors repassé de la page 65 à la page 68.

Suivant les règlements de l'Académie, le texte de Doeblin n'a pas été corrigé. Nous avons recopié aussi fidèlement que possible les formules du manuscrit. Certaines d'entre elles étaient illisibles, incomplètes ou visiblement erronées, nous l'avons indiqué en note lorsque cela était possible. Le texte comporte des ratures et des pages entières rayées et reprises. Nous avons reproduit en note les passages rayés les plus longs qui auraient gêné la lecture du pli. En revanche, pour ne pas trop alourdir la présentation, nous avons indiqué directement dans le texte du pli les ratures de mots ou de formules isolés. Ces ratures sont indiquées entre crochets avec la mention rayé en italique. Lorsque cela s'est avéré nécessaire nous avons intercalé dans le texte de Doeblin un commentaire entre crochets [ ] et en italique.

Les notes qui suivent ont simplement pour but d'éclairer un peu le contexte historique et géographique des résultats obtenus par Doeblin. Elles ne prétendent pas en faire une analyse précise et détaillée. Il faudrait

S0764-4442(01)01848-1/MIS

pour cela réécrire dans le cadre actuel l'ensemble du manuscrit. Une telle entreprise a été menée à bien pour la théorie générale des chaînes de Doeblin par K. L. Chung [1964, 1992]. En attendant qu'un travail comparable de transcription et d'analyse fine des « mouvements réguliers de Doeblin » soit disponible, nous avons indiqué sommairement un certain nombre d'ouvrages récents traitant de ces sujets auquel on pourra se reporter dans un premier temps. Comme on le verra, le texte de Doeblin est parfois difficile à suivre, il est donc vraisemblable que nous ayons commis des erreurs de lecture ou d'interprétation. Nous prions le lecteur de bien vouloir nous en excuser et nous en prévenir.

Il n'y a pas d'appel de notes dans le texte de Doeblin de façon à en préserver l'intégrité, on a fait figurer les pages et les thèmes auxquels se rapportent les notes qui suivent. Les renvois de dates et de pages entre crochets et accolades sont relatifs à la bibliographie.

(^{0}) Page *(1)* : Équation de Kolmogoroff.

La terminologie n'est pas fixe. En mars 1938 dans son exposé de séminaire reproduit en annexe, Doeblin appelle équation de Chapman, l'équation fonctionnelle dans le cas général sans conditions (1), (2), (3) ; cette terminologie est adoptée en France depuis les exposés de Hostinský à l'IHP au début de l'année 1930, [Hostinský 1932b]. Dans sa première note sur le sujet [1938d] Doeblin nomme équation de Kolmogoroff, l'équation de Chapman avec conditions de Kolmogoroff–Feller et données a et σ. En avril 1940, sur la suggestion de Fréchet, Doeblin appelle équation (fonctionnelle) de Chapman–Kolmogoroff ce qu'il appelle ici équation de Chapman, et réserve l'appellation d'équation de Kolmogoroff aux équations aux dérivées partielles obtenues par Kolmogorov en 1931. Doeblin, suivant encore Hostinský [1931a, 1932b, 1936], appelle depuis longtemps équation de Smoluchowski, l'équation fonctionnelle de Chapman dans le cas homogène en temps où $F(x, y; s, t)$ ne dépend que de x, y et $t - s$. Lorsque F est homogène en espace, $F(x, y; s, t)$ ne dépend que de $y - x$, s et t, la terminologie est encore plus floue, Kolmogorov [1931] appelle ce cas le « cas de Bachelier » (d'après [Bachelier, 1906, 1912]), Lévy préfère l'appeler le cas « additif ». On comprend aisément les raisons de ces éponymes à géométrie variable, Hostinský souhaitant indiquer qu'il ne doit rien à Kolmogorov, et Lévy signifiant de même qu'il n'a rien lu de Bachelier. Notons que Chapman n'a jamais revendiqué la paternité de son « équation » et qu'il a été surpris d'apprendre qu'il était une référence de première grandeur dans la théorie des processus de Markov, voir à ce sujet [Kendall, 1990, p. 35] et [Chapman, 1928] où l'on trouve effectivement l'équation fonctionnelle dont il s'agit dans le contexte de la théorie physique de la diffusion en milieu inhomogène, mais sans théorie mathématique que le minimum nécessaire pour « dériver » par rapport au temps et obtenir une équation aux dérivées partielles discrétisée à la manière d'Einstein [1905/1926] (le temps ne tend pas vers zéro mais vers une valeur limite en deçà de laquelle l'hypothèse d'indépendance du passé est physiquement déraisonnable : les grains très petits qui diffusent à l'intérieur d'un tube soumis par exemple à des températures variables, oublient très vite ce qu'il leur est arrivé mais pas instantanément). Il est probable que Hostinský soit parti du mémoire de Chapman pour bâtir sa propre théorie des diffusions alors que Kolmogorov est parti de Bachelier et a construit sa théorie mathématique de toute autre façon. Les équations aux dérivées partielles de Kolmogorov ont, quant à elles, une très longue histoire qui remonte au moins à Laplace et qu'il serait trop long de rappeler ici, voir par exemple Jacobsen [1996] et Dynkin [1989, p. 823].

L'habitude d'appeler « diffusions » les processus de Markov à trajectoires continues paraît plus récente, on la rencontre au début des années cinquante avec [Feller, 1953], on la trouve présente dans les années trente chez [Khinchin, 1933a] et [Feller, 1936, p. 113].

Sur la théorie analytique markovienne de Kolmogorov, on verra [Dynkin, 1989], [Kendall, 1990] et [Ventsel, 1994]. Sur les développements de la théorie des processus de Markov après la guerre, on se reportera à la synthèse très complète de Dynkin [1989] ou à l'introduction du livre de Ikeda et Watanabe [1981], et bien sûr aux articles relatifs aux processus de Markov des encyclopédies russe [Encyclopaedia of Mathematics, 1988/1994] et japonaise [Encyclopedic Dictionary of Mathematics, 1993] et de *Development* *of Mathematics 1950–2000* [Pier, 2000], principalement [Meyer, 2000], qui donne une bibliographie étendue sur près d'un siècle.

([1]) Pages *(1)-(2)* : Sur les conditions 1, 2, 3.

Les conditions 1 et 2 non tronquées ont été introduites par Kolmogorov dans son mémoire fondamental [1931]. Leur interprétation est naturelle, on la trouve déjà dans [Bachelier, 1906] : si $X(t)=x$,

$$\mathbb{E}(\Delta X(t)) = a(x,t)\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)$$
$$\mathbb{E}(\Delta X(t))^2 = \sigma^2(x,t)\Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)$$

En supposant l'existence de trois moments et diverses conditions supplémentaires, Kolmogorov en déduit analytiquement les équations aux dérivées partielles paraboliques classiques et l'existence d'une solution de l'équation de Kolmogoroff. Voir aussi la grande conférence de Bernstein au Congrès de Zurich en 1932, [Bernstein, 1932].

C'est en 1933 que Kolmogorov introduit les conditions 1 et 2 tronquées telles qu'elles figurent dans ce manuscrit et remplace la condition de troisième moment par une condition de Lindeberg, [1933a], c'est-à-dire la condition 3 portant sur le second moment de $\Delta X(t)$. Cette méthode est reprise aussitôt par Khinchin [1933a] et Petrowski [1933]. (Sur l'école de Moscou en général, on verra [Tikhomirov, 1998]).

En 1936 Feller remplace la condition de Lindeberg–Kolmogorov par la condition notée 3 dans le manuscrit ([Feller, 1936, p. 118, note 8], [1937a]) qu'il appelle également « condition de Lindeberg » (*e. g.* [Feller 1954a, p. 9, note 9]) et, sous des conditions additionnelles fortes portant sur a et σ, notamment a bornée ainsi que sa dérivée partielle en x, laquelle est supposée vérifier une condition de Lipschitz [Feller, 1936], conditions A, pp. 128–129, il en déduit, dans un cadre analytique, celui de Hadamard–Gevrey, un théorème d'existence et d'unicité des solutions de l'équation de Kolmogoroff, [Feller, 1936, pp. 143–144] qui va au-delà du théorème d'unicité de Kolmogorov [1933a, §3].

Dans les années cinquante Feller remplace sa condition de Lindeberg par la condition équivalente pour le semi-groupe d'opérateurs associé dans le cas homogène (dans le temps), qu'il nomme « local character condition », et montre dans ce cadre son rôle fondamental, *e. g.* [Feller, 1954b, p. 422], voir aussi [Neveu 1955a,b]. L'idée d'associer à un schéma markovien une famille d'opérateurs est ancienne, elle se trouve déjà dans [Hostinský, 1928]. Dans le cas continu, elle est exposée dans [Kolmogorov, 1935] mais elle s'enrichit dans les années d'après-guerre de la théorie analytique des semi-groupes, [Hille, 1942, 1948], [Yosida, 1948, 1949].

C'est également dans les années cinquante, à la suite des travaux sur la propriété forte de Markov (voir note 21) que Dynkin introduit les caractéristiques locales en espace plutôt qu'en temps ; on verra [Dynkin, 1965] pour un exposé de ce point de vue.

Indiquons en passant que, dès le début du XX^e^ siècle, les processus de diffusion sont étudiés de façon intensive et le plus souvent indépendamment des travaux mathématiques, par les physiciens et les biologistes mathématiciens, on pourra se reporter à la bibliographie, en particulier à [Einstein, 1905/1926], [Chapman 1928] ou [Ornstein, Uhlenbeck, 1930] pour les travaux de l'école de Lorentz et à [Fisher, 1930] pour ceux relatifs à la théorie de l'évolution de Haldane, Wright et Fisher, dont Feller s'inspirera [1951], mais aussi Kolmogorov, [Kolmogorov, Petrowski, Piskunov, 1937]. Doeblin paraît s'être intéressé marginalement à la biologie mathématique, on en trouve quelques traces dans les brouillons de Marbach, peut-être à la suite de discussions avec Vladimir Kostitzin qui développe alors à l'IHP la théorie de Lotka–Volterra, *e. g.* [1937], ou bien avec Gustave Malécot qui soutient en 1939 sa thèse sur la théorie mathématique de l'hérédité mendélienne sous la direction de Georges Darmois et qui a travaillé avec Fisher, [Malécot, 1939, 1944], mais nous n'avons aucune indication positive sur ce point. D'autre part la théorie de Hostinský, qui se rattache essentiellement à la tradition physique, a influencé fortement Doeblin (voir annexe 1).

Rappelons également que le cas « additif » de l'équation de Chapman, exploré dès le début du siècle par Bachelier [1906, 1912], a été l'objet de travaux importants à partir de 1929, notamment ceux de Bruno de Finetti [1929], Kolmogorov [1931, 1932], Lévy [1934, 1937a], Cramér [1935], [Feller, 1937b] et Khinchin [1937], au point de vue de la théorie des lois indéfiniment divisibles.

Le problème général de l'existence et de l'unicité des solutions de l'équation fonctionnelle de Chapman (Kolmogorov), pour des conditions locales données, avait été très clairement posé par Bernstein dans son compte rendu du mémoire de Kolmogorov [Bernstein, 1931], voir aussi [Bernstein, 1932], et la théorie des équations différentielles stochastiques de Bernstein [1938] est motivée pour l'essentiel par la résolution de cette très difficile question. On le sait, Bernstein procède par interpolation et n'envisage pas directement les propriétés des « courbes » décrites par le mouvement, ce dernier restant une image physique commode que l'on ne géométrise pas vraiment. Les hypothèses de Bernstein restent fortes de façon à assurer l'existence d'un mouvement presque sûrement fini en chaque temps. Toutefois Bernstein aborde très nettement dès 1933 la question des grandes valeurs et des explosions dont on verra l'influence chez Doeblin.

La construction des solutions de l'équation de Chapman a été longuement discutée dans les années trente par le physicien mathématicien tchèque B. Hostinský qui utilise l'intégrale multiplicative de Volterra (voir annexe 1 où l'on discute sommairement de l'influence de Hostinský sur les travaux de Doeblin). C'est l'un de ses élèves, B. Pospíšil, qui a proposé la première condition suffisante d'existence et d'unicité d'une solution dans le cas purement discontinu des processus de sauts [Pospíšil, 1936]. Peu après Doeblin sous une condition plus faible, donnera une solution probabiliste élégante du même problème, {10}, solution reprise notamment dans le livre de Doob [1953].

Pour le cas continu de Kolmogorov, c'est principalement à partir du mémoire de Feller [1936] que Doeblin a travaillé. Plutôt que de chercher des conditions supplémentaires pour dériver les équations paraboliques de Kolmogorov et déterminer analytiquement leurs solutions, Doeblin commence par postuler l'existence d'une solution : « Considérons un mouvement ... », c'est-à-dire des probabilités $F(x, y, s, t)$ « bien définies ». Il impose des conditions naturelles d'uniformité sur les limites dans 1, 2, 3 et deux conditions à l'infini qui lui semblent propres et dont nous n'avons pas pu retracer la postérité ; les conditions d'uniformité sont nécessaires pour aborder les difficultés du cas général de l'équation de Chapman pour lequel la loi de l'accroissement de X à partir d'une valeur x au temps t dépend précisément de x et de t (voir à ce sujet [Lévy, 1948, p. 77]), quant aux conditions à l'infini (pas de sauts à l'infini), elles permettent de réduire la probabilité des grandes valeurs et de maintenir une continuité suffisante à l'infini. Doeblin en déduit directement les propriétés locales de ces mouvements « réguliers » et l'étude de leurs « grandes valeurs » (Notons que l'adjectif « régulier » est déjà utilisé dans la théorie de Bernstein mais aussi dans la théorie des équations paraboliques, voir Gevrey, Feller ou Doetsch [1936], etc.). Doeblin montre plusieurs résultats importants sur les « variations » des lois des mouvements réguliers lorsque leurs conditions locales changent quelque peu : continuité uniforme, monotonie,... Ces propriétés établies, Doeblin revient en arrière et démontre l'existence de solutions régulières de l'équation fonctionnelle de Kolmogorov dans le cas inhomogène, sous des conditions (a et σ continues vérifiant une certaine propriété de croissance, voir p. 31 et 72) beaucoup plus générales que celles envisagées jusque là, résultat qui était encore considéré dans les années cinquante comme sans équivalent, *e. g.* [Blanc-Lapierre, Fortet, 1953, p. 305]. Doeblin procède par approximation en loi à partir du théorème de Feller à l'aide du résultat de continuité uniforme qu'il a établi auparavant en employant notamment une technique originale de couplage (voir partie II du pli et les notes ci dessous).

Les travaux de Doeblin sont intéressants en ce qu'ils proposent, dès 1938 et dans un cadre très général qui dépasse celui de Feller et de Bernstein, une analyse directe des propriétés fines du mouvement associé. Même s'il s'oblige à travailler à partir de la loi temporelle, il utilise de fait des méthodes purement trajectorielles telles que compensation, couplage ou changement d'horloge qui lui permettent de se ramener localement à des mouvements browniens dont l'étude trajectorielle commence à se répandre, notamment, et de façon très riche, chez Lévy, à partir de 1938. Cette idée qu'on puisse traiter rigoureusement de cas très généraux est loin d'être reçue et le seul précédent, à bien peu près, est la célèbre étude des processus à accroissements indépendants entreprise par Lévy [1934, 1937a, 1948] qui donne une démonstration probabiliste de la forme générale des lois indéfiniment divisibles, démonstration dont les « analystes » contesteront parfois la rigueur et qui ne sera véritablement acceptée (après remise aux normes) et intégrée à la théorie des processus qu'après la seconde guerre mondiale. Doeblin est ainsi très en avance sur son temps ; les méthodes trajectorielles générales ne seront comprises et développées que dans les années cinquante et parfois beaucoup plus tard encore, voir *e. g.* [Doob, 1953, 1971, 1993], [Itô McKean, 1965]. Toutefois Fortet, [1941, 1943], en supposant $\sigma = 1$ et en restant sous les hypothèses de Feller, fait une analyse des propriétés des trajectoires assez proche de certains des résultats de Doeblin dont il connaissait l'existence par les notes publiées {CR9,10,12} et peut-être par une conférence faite par ce dernier au séminaire Hadamard en mars 1938 (voir annexe 1). Nous aurons l'occasion de citer souvent le mémoire [1943] de Fortet, sans doute le plus proche en esprit du pli de Doeblin. C'est en référence à ce mémoire de Fortet que Lamperti ([19], §25, p. 129 ; [19], §5, p. 133) date la fin de la « période classique » de la théorie de la diffusion. Rappelons que Robert Fortet (1912–1998) est un élève de Maurice Fréchet (1878–1973), comme Doeblin, Loève et Ville. Il a collaboré en 1937 avec Doeblin ({CR4}, {3}) et soutenu en 1939 une thèse sur la théorie spectrale des opérateurs quasi compacts appliquée aux chaînes de Markov. Ses travaux après la guerre sont consacrés à la théorie des processus et leurs applications ; c'est notamment lui qui a mis en évidence dès 1950 l'importance de la notion de fonctionnelle additive dans la théorie des processus de Markov, voir [Blanc-Lapierre–Fortet, 1953, pp. 321–340] et, par exemple, [Darling, 1959] et [Dynkin, 1965]. En 1958, Fortet a succédé à Georges Darmois (1888–1960) dans la Chaire de Calcul des probabilités et Physique mathématique de la Faculté des sciences de Paris. Il a longtemps dirigé le Laboratoire de probabilités de l'Université Paris-6.

En résumé, dès 1936, on sait qu'une diffusion raisonnablement générale, c'est-à-dire un mouvement continu non héréditaire, doit vérifier au minimum les conditions 1, 2 et 3 et des conditions additionnelles plus ou moins restrictives suivant les auteurs. Le manuscrit de Doeblin en propose de très générales et en déduit par des méthodes probabilistes des propriétés très importantes du mouvement, dont certaines n'ont été retrouvées sous des hypothèses généralement plus fortes, que quinze ou vingt ans plus tard. Doeblin, on le verra, utilise tout l'arsenal des méthodes mises au point notamment par Bernstein, Kolmogorov, Khinchin, Lévy et lui même dans l'étude des sommes de variables aléatoires : variables corrigées, régularisation, compensation, tension des lois, localisation, normalités asymptotiques sous des hypothèses de dépendance faible, martingales, ou encore interpolation à la Bernstein et bien sûr couplage à la Doeblin,... Dans ce manuscrit comme dans ses travaux précédents Doeblin fait preuve d'une étonnante capacité à aller au bout de raisonnements directs difficiles ; il contrôle en probabilité, sous des hypothèses aériennes, simultanément, le temps, les petites et les grandes valeurs de ses mouvements et ses epsilon agrémentés de primes et d'indices variés donnent le tournis.

On peut naturellement regretter que Doeblin n'ait pas profité de son étude de l'équation de Kolmogoroff pour développer une théorie de l'intégrale stochastique, permettant d'intégrer directement $\mathrm{d}X$ et d'obtenir un théorème d'existence encore plus « stochastique », en considérant la loi du processus X ainsi représenté. Ce type de méthode a été mis en œuvre par les physiciens de façon non mathématique dès le début du XX$^{\text{e}}$ siècle à la suite de Langevin (voir *e. g.* [Ornstein–Uhlenbeck, 1930] pour une abondante bibliographie et [Doob, 1942b] qui en fait la théorie). Paley et Wiener déjà ont utilisé des intégrales stochastiques dans leurs travaux d'analyse harmonique généralisée (voir [Paley, Wiener, 1934] et [McKean, 1969]). On connaît aussi l'intégrale stochastique de Lévy [1939b, 1941] (voir la thèse de Bernard Locker qui est consacrée pour une part à cette question). Dès la parution du mémoire de Kolmogorov [1931], Serge Bernstein a développé une méthode intermédiaire, consistant à discrétiser l'équation différentielle stochastique du mouvement et à passer à la limite en loi des solutions des équations aux différences stochastiques ainsi obtenues, sous des conditions assez fortes sur a et σ. Ces travaux importants ont été exposés dans un mémoire célèbre d'ailleurs édité par Doeblin ([Bernstein, 1938], voir aussi notes ([10]) et ([12]) ci-dessous). C'est à cette occasion que Doeblin, peu satisfait des résultats de Bernstein, a manifesté son intention d'étudier les techniques d'intégration stochastique, il n'en a visiblement rien fait. Ce sera l'un des grands apports de Itô pendant la guerre [1942a, 1946, 1951] et de Gihman un peu après et différemment [1947, 1950], voir à ce sujet les introductions de Stroock, Varadhan et Itô aux Œuvres de Itô, [Ikeda, Watanabe, 1981], [Dynkin, 1989], [Ikeda et al., 1996], etc... On sait combien les méthodes du calcul stochastique auront de difficulté à s'établir vraiment. Il faudra qu'au point de vue pratique le calcul de Itô fasse la preuve de sa simplicité et de son efficacité, il faudra aussi qu'il accède à une position théorique suffisante, et pour cela que les rapports entre intégrale de Itô et théorie des martingales soient aperçus progressivement et que ces deux domaines s'enrichissent mutuellement grâce aux travaux complémentaires de Doob, McKean, Meyer, Kunita, Watanabe, Itô lui-même et tant d'autres, avant d'acquérir finalement la souplesse, la généralité et la reconnaissance qu'on lui accorde généralement depuis les années 70, l'oeuvre de Itô prenant dès lors sa véritable dimension et apparaissant rétrospectivement comme tout à fait fondamentale et décisive, notamment [1942a]. On pourrait formuler des remarques analogues à propos du « Calcul de Malliavin », [Malliavin 1978a,b], [Meyer, 2000, pp. 835-836] ou bien sûr du « Calcul de Leibniz » (voir par exemple [Giusti, 1999]). Les mathématiques sont une œuvre collective. Le pli traite de l'équation de Kolmogoroff selon Doeblin. Au reste, comme il s'agit d'une théorie générale, ses mouvements solutions explosent très vite. Ils ne relèvent pas de la théorie de Bernstein et ne seront accessibles au calcul stochastique de Itô que vingt ou trente ans plus tard (voir par exemple les commentaires de Feller [1950, p. 332] sur les limitations qu'il voit dans l'approche de Itô). Doeblin n'avait sans doute pas le temps d'attendre et puis il avait à sa disposition, comme d'ailleurs Bernstein, Feller, Kolmogorov, Khinchin et Lévy, toutes les techniques de traitement du cas des variables aléatoires. Il était naturel qu'il cherchât d'abord à en épuiser la substance avant de se risquer ailleurs, d'autant que le temps lui manquait. Pour changer de point de vue, renouveler une théorie, il ne faut pas en savoir trop ni vouloir trop en faire. Laplace déjà, qui savait tout, vieillissant, se désespérait de ne plus être capable de sortir des ornières cent fois empruntées. Il est vrai que les ornières de Doeblin, comme d'ailleurs celles de Laplace, ne sont pas si étroites et qu'elles autorisent des libertés dont on verra ici l'ampleur et la richesse.

Le problème de l'existence et de l'unicité d'un processus de diffusion associé à des coefficients a et σ donnés, sans hypothèses fortes (le problème de Bernstein–Kolmogorov continu et homogène vu du point de vue stochastique) a été résolu dans les années 60-70, par une méthode de martingales, voir [Stroock, Varadhan, 1969, 1975] ou [Ikeda, Watanabe, 1981, chapitre IV], [Skorokhod, 1965]. Toutefois le cadre de Doeblin est assez différent, comme on le verra.

([2]) Pages *(2)-(3)* : Conditions à l'infini. Continuité.

Page *(2)* : Par inadvertance Doeblin a interverti les signes dans les deux conditions à l'infini, il faut évidemment lire :

$$\lim_{t\to s}\ \overline{\lim_{x\to-\infty}}\ \big[1-F(x,y;s,t)\big](t-s)^{-1}=0$$

$$\lim_{t\to s}\ \overline{\lim_{x\to\infty}}\ F(x,y;s,t)(t-s)^{-1}=0$$

La même faute de signe est répétée page *(3)* au début de la démonstration de la proposition, on rectifie aisément. Dans la note {CR9} Doeblin avait écrit correctement les signes mais n'avait pas précisé l'ordre des limites, il écrivait :

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ t\to s}}\ \big[1-F(x,y;s,t)\big](t-s)^{-1}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ t\to s}}\ F(x,y;s,t)(t-s)^{-1}=0$$

Cette écriture est d'ailleurs conforme à l'idée de Doeblin exprimée au début de la démonstration de la proposition 1 : Δ et y étant donnés, si x est suffisamment grand et $t-s$ assez petit $\Pr\big\{X(t)<y/X(s)=x\big\}<\Delta(t-s)$, uniformément par rapport à s.

Nous ignorons si les conditions à l'infini de Doeblin ont été reprises par d'autres savants. Elles donnent à sa théorie une généralité qui ne semble pas classique. Les mouvements réguliers de Doeblin explosent comme les diffusions actuelles mais ils ne meurent jamais. Après une explosion, ils redescendent instantanément sur terre avec une vitesse infinie et sans discontinuité. Ils vivent ainsi plusieurs vies indépendantes séparées par des explosions et des big bang plus ou moins rapprochés. De sorte que les théorèmes d'existence de Doeblin ne ressemblent pas tout à fait aux théorèmes de la littérature actuelle. Ils ne coïncident vraiment que dans le cas de mouvements d'un seul tenant, sans explosion.

Page *(3)* :

La proposition I est annoncée dans la note {CR9} « énoncé I ».

Doeblin se place dans le cadre de la théorie des fonctions aléatoires proposée par Slutsky en 1928 au Congrès de Bologne (*e. g.* [Slutsky, 1937, p. 185, § 2] ou [1938, p. 33]), discutée par Khinchin [1933a] et précisée par l'axiomatique de Kolmogorov [1933b], voir aussi *e. g.* [Lévy, 1934, § 3] : les lois jointes relatives à des ensembles de temps finis S quelconques sont bien définies et compatibles et on procède par limite dénombrable successive à partir de ces ensembles finis de temps. La notion de continuité en probabilité a été introduite par Slutsky dès 1928, et la définition de la continuité p. s. (faible) adoptée ici par Doeblin lui paraît également due. Elle ne fait intervenir que la loi temporelle (la loi jointe sur un ensemble fini de temps) et ne nécessite pas l'introduction de la propriété de séparabilité qui n'a d'ailleurs pas encore été dégagée vraiment; A. Fuchs [1955, p. 171] l'appelle la « continuité globale en probabilité ». Il semble que ce soit Slutsky qui ait publié en 1937 la première démonstration du critère de continuité p. s. que Kolmogorov avait exposé au séminaire de probabilité de Moscou à l'automne 1934, [Slutsky, 1937] théorème 4, et montré que cette continuité p. s. faible implique l'existence d'une fonction aléatoire « équivalente » sûrement continue obtenue comme limite uniforme des interpolés linéaires de X sur des ensembles finis S de plus en plus denses dans (s,t) ; elle n'interdit toutefois pas les discontinuités mobiles dans le cas non séparable, comme le savent aussi bien Lévy [1937, n° 51] que Doeblin (voir la fin du manuscrit de Marbach, annexe 1), voir également l'introduction du grand article de Itô [1942a], *Œuvres*, pp. 42-43. Ces difficultés disparaîtront après les travaux de Doob sur la séparabilité, [1953], théorème 2.4 notamment.

On se reportera à [Ambrose–Doob, 1940] et à un article de synthèse de Fortet[1941b] qui donnent l'état de la question à cette époque là ou encore au chapitre I du mémoire [Fortet, 1943], à [Lévy 1948, chapitre II] ou [Fuchs, 1955, pp. 171-172], et bien sûr à [Doob, 1953], [Neveu, 1964], [Meyer, 1966], [Varadhan, 1968] etc.

Doeblin a exposé l'axiomatique de Kolmogorov au « séminaire Borel » de l'IHP au cours de l'année universitaire 37-38. Il connaît aussi très bien les travaux de Khinchin et Slutsky, c'est lui par exemple qui a corrigé les épreuves de [Slutsky, 1938] pour Fréchet, Slutsky n'ayant pu se rendre au colloque de Genève d'octobre 1937 où son mémoire devait être présenté dans la section « Les fonctions aléatoires » avec le mémoire de Bernstein [1938] et celui de Steinhaus [1938]. Voir [Cohn, 1993, p. 51] et surtout [Locker, 2001] qui détaille la vie, l'œuvre et l'influence de Slutsky dans les années trente, les années décisives de la constitution de la théorie moderne des probabilités. De façon générale Doeblin connaît remarquablement bien la littérature de son temps qu'il lit et comprend très vite. On trouve à Marbach dans ses papiers personnels des résumés très lucides des principaux travaux de l'école de Moscou mais aussi de bien d'autres auteurs. Doeblin a traduit en français à l'intention de Fréchet les grands travaux de Kolmogorov sur la théorie des processus à temps continu et notamment le mémoire fondamental [1931]. Ces traductions se trouvent rassemblées dans les archives Fréchet.

Le « changement d'échelle » de X en Y est rendu nécessaire par la présence d'explosions dans certains cas de mouvements, lorsque a, σ et $1/\sigma$ sont non bornés (en x), comme le montre l'exemple exposé page 4. Cet exemple doit de nouveau s'interpréter au sens de Slutsky. Sur un ensemble fini de temps la transformation Y est bien définie puisque X ne s'annule presque sûrement pas en un temps fixé. La loi temporelle de Y satisfait évidemment à l'équation de Chapman et elle vérifie les conditions de Kolmogorov–Feller–Doeblin d'après le n° 15 ci-dessous. Le mouvement X est alors construit par interpolation, ainsi que le précise Doeblin dans sa note {CR10} : « Il est important de bien spécifier ce que nous entendons par la fonction aléatoire $X(t)$: $X(t)$ est la limite, pour $n \to \infty$, de la ligne brisée dont les sommets sont $X(t_i)$, $t_i = i/2^n$. Cette limite existe presque sûrement et est continue. » Paul Lévy procède de façon analogue dans sa construction du mouvement brownien ([1937a, pp. 51, 52], [1948, § 1], [Itô McKean, 1965, § 1.5], [Locker, 2001]).

Les « mouvements réguliers » de Doeblin sont donc parfois extrêmement irréguliers et nécessitent un changement d'optique pour ramener leurs « grandes valeurs » à des niveaux raisonnables. Dans le cadre vraiment régulier où il se place, qui est essentiellement celui de Feller et de Bernstein, Fortet n'a pas à envisager de contraction d'échelle pour démontrer la continuité p. s. de ses mouvements, [1943], chapitre I. En revanche Fortet donne le détail des « raisonnements bien connus » qui conduisent Doeblin à son résultat, la démonstration de ce dernier étant pour le moins elliptique. Les questions de régularité des trajectoires d'un processus de Markov ont été étudiées de façon intensive dans les années cinquante, [Dynkin 1965], [Kinney, 1953]. On pourra consulter aussi la thèse de A. Fuchs [1955] qui compare les différentes notions de continuité des fonctions aléatoires depuis Slutsky et montre leur équivalence dans le cas markovien, et bien sûr tous les grands traités des années 60-70 sur les processus de Markov dont on trouvera une courte liste dans la bibliographie. La seule condition (3) de Feller, supposée uniforme en x et en s, assure l'existence d'une version continue, [Varadhan, 1968, § 7, théorème 1], qui est, en esprit, proche du point de vue adopté par Doeblin.

La continuité à un changement de variable près est l'un des points sur lequel Doeblin se démarque des auteurs de son temps. Pour démontrer des théorèmes d'existence dans le cas de données locales un tant soit peu générales (ni bornes finies, ni quasi-linéarité en x, ni régularité excessive) il faut admettre des mouvements explosifs qui ne sont continus qu'après changement d'échelle, la loi F demeurant, quoiqu'il en soit, bien définie, « régulière », et satisfaisant à l'équation de Kolmogoroff. C'est un point de vue nouveau que Doeblin rappelle dans sa seconde note sur l'étude fine des mouvements dans le cas homogène, {CR10, p. 250} dans lequel il envisage même un mouvement « ayant un sens » et tel que $F(x, \infty, s, t) < 1$, qui n'est donc pas solution de l'équation de Kolmogoroff au sens ci dessus. Doeblin semble avoir été conscient de ce qu'en théorie des diffusions, il faut regarder les valeurs infinies par le petit bout de la lorgnette : « The uneasy feeling that ∞ is « different » is only an illusion due to looking at things in the wrong scale », comme le souligne H. P. McKean dans son article d'exposition [2000].

([3]) Page *(5)* : Bernstein

Doeblin fait ici référence au « lemme fondamental » de [Bernstein, 1926, p. 21] qu'il a déjà souvent utilisé, par exemple dans sa thèse {5}. Doeblin trouvait d'ailleurs ce lemme assez trivial. La notation $\mathbb{E}'$ des espérances conditionnelles est également celle de Bernstein [1926].

([4]) Pages rayées *(7), (8), (9)* : visiblement Doeblin a d'abord tenté une démonstration plus rapide du théorème du logarithme itéré de Khinchin étendu à ses mouvements réguliers. Pour cela il utilise un processus compensé Z non « corrigé » (le processus X'), changé d'horloge, qui ne lui donne pas le résultat attendu dans toute sa généralité. Après un second essai (page *(9)*) Doeblin a préféré tout récrire depuis le début. Nous reproduisons ci-dessous les pages rayées qu'il a souhaité conserver. De nouveau pages *(12)* et *(13)* Doeblin a hésité sur la façon d'introduire les processus « Z », nous reproduisons également en note ([6]) les parties rayées bien qu'elles soient déjà contenues dans ce qui suit, pour indiquer que ce passage n'a pas été facile à mettre au point.

(7)

THÉORÈME DU LOGARITHME ITÉRÉ. – *Si x est un point régulier des données à l'instant s et $X(s) = x$ presque sûrement* (*p. s.*)

$$\overline{\lim_{t\to s}} \frac{|X(t) - X(s)|}{\sqrt{(t-s)\lg_2(t-s)^{-1}}} = \sigma(x,s) \quad [sic]$$

Démonstration. – I $\sigma \neq 0$. Nous allons d'abord considérer un cas simple, celui où σ et a sont continues par rapport à t et $y = \frac{x}{1+|x|}$, σ, $1/\sigma$ et a étant bornées. Dans ce cas les fonctions aléatoires dépendant du temps

$$\sigma^2[X(\tau),\tau], \quad a[X(\tau),\tau]$$

sont presque-sûrement intégrables au sens de Riemann ([1]) et on a quel que soit $X(u)$

$$0 < a_1\Delta < \int_u^{u+\Delta} \sigma^2[X(\tau),\tau]\,\mathrm{d}\tau < a_2\Delta$$

et

$$\left|\int_s^t a^2[X(u),u]\,\mathrm{d}u < \right| < K(t-s)$$

Supposons pour plus de commodité $s = 0$.
Soit $\theta(\tau)$ l'instant aléatoire auquel on a

$$\int_0^\theta \sigma^2[X(u),u]\,\mathrm{d}u = \tau$$

LEMME. – *Quel que soit $X(0)$, la loi de probabilité de*

$$\left[X[\theta(\Delta')] - X(\theta(\Delta)) - \int_{\theta(\Delta)}^{\theta(\Delta')} a(X(t),t)\,\mathrm{d}t\right](\Delta'-\Delta)^{-1/2}$$

est la loi de Gauss réduite.

([1]) *cf.* W. Doeblin, Thèse, Ch. 3.

(8)

Démonstration. – Posons

$$X'(t) = X(t) - \int_0^t a[X(u),u]\,\mathrm{d}u$$

Montrons qu'on a

$$\mathbb{E}\,[X'(t)] \equiv 0$$

Nous pouvons écrire ($X(t)/1+|X(t)|$ étant continu)

$$X'[\theta(\Delta)] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left[X\left(\frac{i}{n}\right) - X\left(\frac{i-1}{n}\right) - \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} a(X(t),t)\,\mathrm{d}t\right]\varphi_i$$

où $\varphi_i \neq 0$ si

$$\sum_{j=1}^{i}\sigma\left[X\left(\frac{j}{n}\right),\frac{j}{n}\right] \geqslant \Delta$$

$= 1$ dans le cas contraire.

Si $\varphi_i \neq 0$ et $X(j/n) = x$ on a

$$\mathbb{E}\left[X\Big(\frac{j}{n}\Big) - X\Big(\frac{j-1}{n}\Big)\right] = a(x,(j-1)/n)\,\frac{1}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

En dehors de cas de probabilité $< \varepsilon$, on a $|X(t) - x| \leqslant \varepsilon$ si $|t - s| < \varepsilon'$. Posons

$$\overline{\sigma}[X(t),t] = \sigma(x,s)$$

s'il y a eu un $|X(t) - x| > \varepsilon$, et dans le cas contraire

$$= \sigma[X(t),t].$$

$$\overline{a}[X(t),t] = a(x,s) \text{ s'il y a eu un } |X(t)-x| > \varepsilon,$$

$$= a[X(t),t] \text{ dans le cas contraire.}$$

Dans ce cas les fonctions $\overline{a}[X(t),t]$ et $\overline{\sigma}[X(t),t]$ sont presque sûrement intégrables au sens de Riemann (*cf.* le chapitre 3 de notre thèse) et on a

$$\left|\frac{1}{t-s}\int_s^t \overline{a}[X(u),u]\,\mathrm{d}u - a(x,s)\right| < \eta(\varepsilon)$$

(9)

$$\left|\frac{1}{t-s}\int_s^t \overline{\sigma}^2[X(u),u]\,\mathrm{d}u - \sigma(x,s)\right| < \eta(\varepsilon)$$

Posons $Z(t) = X(t) - \int_s^t a[X(u),u]\,\mathrm{d}u$ si l'on a eu $|X(u) - x| < \varepsilon$ pour tout u compris entre s et t. Si on a eu $|X(u) - x| = \varepsilon$ pour la première fois à l'instant u, nous prenons pour $t > t' \geqslant u$, comme loi de probabilité de $Z(t) - Z(t')$ quel que soit $Z(t')$ une loi de Gauss avec l'écart-type $\sigma(x,s)\sqrt{t'-t}$ et la moyenne zéro. La variable $Z(t)$ ainsi obtenue est presque sûrement continue. Supposons pour plus de commodité $s = 0$.
Soit $\theta(\tau)$ l'instant aléatoire auquel on a

$$\int_0^\theta \sigma^2[X(\tau),\tau] = \tau$$

LEMME. – *La loi de probabilité de* $Z[\theta(\Delta')] - Z[\theta(\Delta)](\Delta' - \Delta)^{-1/2}$ *est la loi de Gauss réduite.*

Démonstration. – Prouvons qu'on a $\mathbb{E}\left[Z(\theta(u))\right] \equiv 0$.
Nous pouvons écrire

$$Z[\theta(\Delta)] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[Z\Big(\frac{i}{n}\Big) - Z\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\right]\varphi_{i-1}$$

où $\varphi_{i-1} = 0$ si

$$\sum_{j=1}^{i-1} \sigma^2\left[X\Big(\frac{j}{n}\Big), \frac{j}{n}\right]$$

(5) Page *(10)* : « La particule mobile décrit une courbe »...

C'est le « substrat intuitif » de l'oeuvre de Doeblin, le point de vue trajectoriel, sans lequel la théorie de l'équation de Kolmogorov, si belle soit-elle, n'est qu'un « bâton entre les mains d'un aveugle ». Kolmogorov et Feller ont certainement conscience de la richesse intuitive de ce point de vue mais rien n'en apparaît dans leurs écrits mathématiques : leur théorie des processus est purement analytique. Ce n'est que la seconde génération des mathématiciens probabilistes celle des années cinquante et soixante qui développera systématiquement le point de vue trajectoriel, sans complexe et avec des outils nettement mathématiques, jusqu'à démontrer par des méthodes purement probabilistes des résultats fins d'analyse, comme du reste le fait ici Doeblin vingt ans avant eux en prenant les précautions convenables. Ce passage est très bien décrit par Doob, *e. g.* [1971, 1993], et Knight [1981]. On verra aussi le beau livre de K. L. Chung [1995], qui a lui-même constamment mis en avant, dès ses premiers travaux, l'importance du point de vue trajectoriel et d'ailleurs l'oeuvre de Doeblin. Certes, la théorie de Bernstein est incontestablement stochastique bien qu'analytique à la limite, Kolmogorov ou Feller n'hésitent pas à faire l'étude probabiliste fine d'une trajectoire du jeu de pile ou face ou d'un processus de Markov à ensemble d'états fini ou dénombrable, et déjà Wiener, Khinchin, Lévy,... ont montré d'importantes propriétés des trajectoires du mouvement brownien convenablement construit dans un cadre sûr et reconnu (l'intervalle $[0, 1]$, la mesure de Lebesgue, l'espace des fonctions continues, etc., voir [Kahane, 1998] et en particulier [Paley, Wiener, Zygmund, 1933]), mais lorsqu'on touche aux processus généraux à temps continu et aux équations intégro-différentielles, la grande Analyse s'impose, d'autant que, pour eux, rien ou presque n'est mesurable de ce qui concerne une trajectoire d'un processus un tant soit peu général et, à moins de se contenter d'à peu près et d'intuitions vagues, on ne peut que difficilement écrire des démonstrations rigoureuses sur ces sujets et être publié dans la revue la plus huppée du moment les *Math. Annalen* de Hilbert. Peu de mathématiciens croient qu'on y arrivera. D'ailleurs il y a déjà tant à faire en utilisant les outils puissants de l'analyse pour démontrer des théorèmes dont l'intuition probabiliste mais aussi l'intuition physique donnent l'idée. Il faudra attendre les travaux fondamentaux de Doob sur la théorie des processus stochastiques commencés à la fin des années trente, [1937, 1953], pour que la situation évolue et que les mathématiciens se persuadent non seulement de la richesse mais aussi de la rigueur des méthodes probabilistes. Il s'agit d'ailleurs d'une situation classique en histoire des mathématiques. Pour ne donner qu'un exemple et le plus célèbre : Pascal et Newton dont l'intuition analytique de l'algorithme infinitésimal est justement célèbre, ne font appel pour démontrer leurs résultats qu'à la seule « géométrie » dont la rigueur et la sûreté sont établies depuis toujours. La génération suivante, Clairaut, Euler, d'Alembert, les Bernoulli, mettra en avant les méthodes du calcul différentiel et intégral et oubliera peu à peu les démonstrations géométriques en forme. Quant aux générations suivantes, formées à la « rigueur weierstrassienne », elles oublieront même qu'il y avait là un problème. La rigueur se déplace mais ses exigences demeurent.

Page *(10)* : Probabilité d'atteinte d'une courbe.

Le calcul des probabilités d'atteinte est effectué de nouveau à l'intérieur de la théorie de Slutsky précisée par Khinchin et Kolmogorov. Dès son traité sur les fondements du calcul des probabilités [1933b] Kolmogorov a observé que la borne supérieure d'une fonction aléatoire sur un intervalle n'est pas forcément mesurable. Il y a donc lieu de prendre des précautions, c'est ce que Doeblin fait ici. La notion de borne supérieure stochastique pour les fonctions aléatoires continues en probabilité, due encore à Slutsky ([1937] ou [Ville, 1939, p. 118]), répond en partie à ce problème qui sera traité de façon décisive par Doob, voir [Doob, 1937, 1940, 1953] et [Locker, 2001]. Doeblin traite ici le problème directement comme à son habitude. Dans le dernier chapitre de sa thèse {5}, p. 110, Doeblin a déjà examiné le problème de la définition possible de la probabilité qu'une fonction aléatoire dépasse une valeur x dans un laps de temps donné ; il adopte alors une définition de Khinchin [1933a, p. 69]. Doeblin en déduit qu'une certaine fonction aléatoire est Riemann-intégrable presque sûrement et il conclut : « Les auteurs qui s'occupaient jusqu'à maintenant de telles intégrales n'avaient en général pas pensé nécessaire de démontrer l'existence de ces intégrales sous leurs hypothèses... ». Les raisonnements sur les trajectoires doivent avoir pour Doeblin toute la rigueur souhaitable et il est sur ce point parfois plus en avance que Lévy. On trouve une même préoccupation en d'autres endroits de l'oeuvre de Doeblin, par exemple {10}, p. 214, lemme. Pour une présentation moderne de la notion de probabilité d'atteinte dans son contexte historique, voir [Chung, 1995, chapitre 4].

Fortet [1941, 1943] fait également une étude détaillée, dans son cadre, de ce qu'il appelle les « probabilités d'absorption », par exemple la probabilité $\overline{P}_C$ que le mouvement partant au temps t d'une position x, située au dessous d'une courbe C donnée, ne la traverse pas dans un laps de temps fini donné après t. On peut noter une certaine similitude entre les textes des deux auteurs à ce sujet, qui vient probablement de discussions communes au « séminaire Borel » de l'année 1938 auquel participaient avec eux, Jean Ville, Michel Loève et sans doute Paul Lévy et d'autres encore. Fortet remercie d'ailleurs Ville, [1943, p. 180], de la façon suivante : « Nous avons été conduit à ce problème [le calcul des probabilités d'absorption] par une remarque de M. Ville, faite il y a quelques années au cours d'une conférence au séminaire de Calcul des probabilités que dirigeait alors M. le professeur É. Borel. M. Ville avait observé la relation qui existe entre le problème de la continuité locale de $X(t)$ et celui de la valeur limite de $\overline{P}_C$ quand l'intervalle de temps se réduit à zéro ; il émettait d'autre part l'hypothèse, très vraisemblable mais en somme assez délicate à prouver rigoureusement, que $\overline{P}_C$ était solution de l'équation (aux dérivées partielles de Kolmogorov) ». Doeblin était certainement présent à ce séminaire et on imagine assez les discussions intervenues sur ce sujet entre Fortet, Ville et Doeblin, sujet qui venait des travaux de Kolmogorov–Petrowski sur le théorème local du logarithme itéré de Khinchin, que Ville abordera dans sa thèse [1939, chapitre V]. L'« hypothèse de Ville » est démontrée par Fortet dans son cadre en 1943. C'est un analogue à une dimension du futur théorème de Lévy–Kakutani, lequel date de 1943-1944 et établit pour la première fois un lien entre la théorie du mouvement brownien plan et celle du potentiel. Sur ce point voir [Locker, 2001] qui donne les éclaircissements nécessaires. Fortet déduit de son étude de l'absorption un théorème d'accessibilité des points frontières pour les solutions d'une équation parabolique de Kolmogorov, et un théorème d'existence qui va au-delà de la théorie de Gevrey, voir [Fortet, 1943, chapitre V], [Blanc-Lapierre, Fortet, 1953, chapitre VII] et [Feller, 1950, p. 323]. Dans le pli, Doeblin aborde ces questions aux paragraphes XVII et XVIII.

Les problèmes liés aux probabilités d'absorption, aux questions « d'accessibilité », sont les analogues continus du problème de la ruine des joueurs considérés par tous les probabilistes classiques de Pascal à Laplace et du problème du scrutin traité à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle par J. Bertrand, D. André et É. Barbier. Dès 1900, Bachelier a abordé ces problèmes dans le cas du mouvement brownien par des méthodes probabilistes [1900, 1912]. Ils sont à l'origine de travaux importants dans les années trente et après la guerre, voir note 15 pour des références. Rappelons que Doeblin traite déjà de ces questions, pour l'équation de Smoluchowski, dans la deuxième note {CR10} dont les démonstrations n'ont jamais été publiées mais qui contient un énoncé du critère d'accessibilité maintenant classique démontré par Feller [1954a].

Ces mêmes problèmes de ruine, d'absorption, d'accessibilité sont les analogues probabilistes des questions de conditions aux limites des solutions des équations paraboliques traitées par les analystes classiques depuis Fourier et Dirichlet, et repris au début du XX$^{\text{e}}$ siècle par Bernstein [1905], Holmgren [1907] et E. E. Levi [1908], et en France par Hadamard [1911] et Gevrey [1913/1914], voir par exemple [Bernstein, 1932, pp. 297-298] ou [Lévy, 1939, § 4]. Dans le cas d'un domaine limité par des frontières accessibles, les conditions initiales ne suffisent pas, encore faut-il préciser les conditions frontières lorsque celles ci sont atteintes et montrer alors l'existence et l'unicité de la solution de l'équation dont il s'agit. Dans les années trente, on s'est rendu compte, à Moscou et à Paris, que ce problème (de Dirichlet) pour les équations paraboliques est en rapport direct avec le problème de la ruine des joueurs au cours d'un « jeu continu ». Comme le souligne fort justement Dynkin [1989, p. 825] : « The interaction between Markov processes and PDE is much richer than just the relationship between transition functions and their local characterictics ». On comprend dès lors l'intérêt des mathématiciens pour ces questions. Et ce n'est pas le moindre des mérites des travaux parisiens de Ville, Doeblin et Fortet à la fin des années trente que d'avoir montré comment les méthodes probabilistes permettent d'énoncer des théorèmes d'analyse sous des hypothèses (un peu) moins artificiellement restrictives (« 4 ou 5 dérivées » !), voir à ce sujet [Feller, 1950, 1954a], [Crépel, 1984b] et note 15 ci-dessous.

([6]) Pages *(12)-(13)* : parties rayées

(12)

5) Considérons le processus suivant : $Z(t)$ est égal à

$$X(t) - \int_0^t a[X(u), u]\,\mathrm{d}u$$

si l'on a $|X(t)| < 1$ pour tout $0 < u < t$.
Si $X(u) = \pm 1$ à partir de l'instant u,

[*après la dernière ligne de la page 12*]
La loi de probabilité de $[X(t) - X(t')]/\sigma\sqrt{t-t'}$ tend vers la

(13)

loi de Gauss réduite si $t - t' \to 0$. Prenons ε très petit et $|X(0) - \beta| < \varepsilon$, la loi de probabilité de $[X(t_1) - X(0)]/\sigma(\beta, s)\sqrt{t_1}$ est très sensiblement la loi de Gauss, si ε et Δ sont assez petits et $\sqrt{t_1} > K\,\varepsilon$, la probabilité pour que $X(t_1) > \beta$ soit $> 1/3$.
En dehors de cas de probabilité ε' on a $|X(t) - X(0)| < \varphi(t)$ pour $t < \Delta$.

([7]) Le processus Z du paragraphe 6.

L'idée d'associer à une diffusion X un processus corrigé « Z » qui suive les trajectoires d'un mouvement brownien standard, est naturelle si l'on se place au point de vue trajectoriel, elle est donc absente des grands mémoires de Khinchin, Kolmogorov et Feller, mais on peut la deviner parfois dans les travaux de Lévy sur les processus additifs [1934], [1937, chapitre VII] et surtout [1948, chapitre III, n° 17, 2°, p. 72] ou dans les travaux de Lévy et Doeblin sur les sommes de variables aléatoires et même, entre les lignes, dans l'article fondateur de Kolmogorov [1931], par exemple dans sa solution du « cas de Bachelier », § 16, p. 453. Toutefois la méthode de Doeblin va beaucoup plus loin et le changement d'horloge qu'il adopte paraît être original, il est généralement attribué à [Volkonskii, 1958], voir *e. g.* [Lukacs et al., 1962, p. 217], [Breiman, 1968, p. 390], etc. Il ne semble d'ailleurs exister que peu d'utilisations d'un changement d'horloge aléatoire dans l'étude des diffusions avant la fin des années cinquante. Un autre exemple comparable, quoique plus tardif, est analysé dans la thèse de B. Locker [2001], il est proposé par Lévy vers 1943 pour démontrer l'invariance conforme de la courbe brownienne plane, voir [Lévy, 1948, théorème 56.1], [Getoor–Sharpe, 1972]. On sait bien sûr que Bachelier et Lévy utilisent librement les temps d'arrêt dans leur étude fine du mouvement brownien linéaire, voir [Lévy, 1939a, 1948], [Chung, 1989], [Balkema, Chung, 1991], mais ces temps servent surtout à établir des formules de décomposition par le truchement de la propriété forte de Markov (note 21), ce qui ne correspond pas à l'utilisation qu'en fait ici Doeblin.

La technique de réduction de X en Z a été améliorée et simplifiée par l'idée très remarquable due à Feller [1954b] d'introduire un changement « naturel » d'échelle que Doeblin ne considère pas, ce qui l'oblige, après avoir recentré ses processus, à les tronquer et à recoller des morceaux de mouvement brownien standard là où il faut. Sur ce point on verra le bel article d'exposition de McKean [2000], ou bien

[Dynkin, 1965], [Breiman, 1968], [Varadhan, 1968], etc. Toutefois, un changement d'échelle modifiant les trajectoires, il n'assure pas automatiquement la validité des résultats que Doeblin a en vue.

Fortet utilise de façon essentielle l'argument « Z » de Doeblin à partir de 1941 ([1941c, 1943, chapitre II] et [Blanc-Lapierre, Fortet, 1953, p. 309]). Dans le cas où il se place, $\sigma = 1$ et a régulière, le processus $Z(t)$ non corrigé, sans changement d'horloge, est alors immédiatement un mouvement brownien (la partie intégrale stochastique est triviale). Fortet appelle ce résultat le « théorème de la représentation » qui lui permet de calculer les probabilités d'absorption qu'il considère et dans le même temps de donner une construction probabiliste de la solution de l'équation de Kolmogoroff associée. Itô développera de façon remarquable ce théorème de représentation à l'aide de sa théorie de l'intégration stochastique, [1946, 1951]. Dans le cadre très général où se place ici Doeblin et en l'absence d'intégrale stochastique et de changement d'échelle, les difficultés sont beaucoup plus grandes et il les aborde de front. Outre le changement de temps aléatoire des paragraphes suivants, Doeblin utilise systématiquement un principe général que Lévy résume ainsi : « des valeurs de probabilités suffisamment faibles ne peuvent modifier les résultats, et si la non-vérification des hypothèses est due à des valeurs très grandes et très peu probables, il n'y a qu'à faire abstraction de ces valeurs. » [Lévy, 1948, p. 77]. C'est la méthode des « suites équivalentes » de Khinchin (*e. g.* [Loève, 1955/1977, chapitre 5]) ou des « variables corrigées » de Lévy qui permet par exemple à ce dernier de déduire le théorème de Lindeberg de celui de Laplace–Lyapunov, [Lévy, 1937a, n° 34, 35] et que Doeblin connaît bien, *e. g.* [1939b]. Doeblin montre ainsi qu'un mouvement régulier compensé et corrigé pour les grandes valeurs est un mouvement brownien changé de temps. Ce résultat remarquable est sans équivalent en 1939. Il a une longue et riche postérité (indirecte), d'abord le théorème de Dubins–Schwarz [1965] assurant qu'une martingale continue est un mouvement brownien, changée de temps au moyen de l'inverse de son processus croissant, ensuite le résultat de I. Monroe [1978] : toute semi-martingale (continue ou non) peut s'écrire en loi comme mouvement brownien changé de temps, résultat qui aurait sûrement séduit Doeblin.

(8) Les calculs des paragraphes VII, VIII et IX.

Comme σ est différent de 1 et que X peut atteindre de « grandes valeurs », Doeblin doit tronquer et corriger Z et faire intervenir un changement de temps aléatoire convenable. Il montre alors que Z ainsi modifié est une martingale continue p. s. et « donc » un mouvement brownien. Ses calculs ne paraissent pas avoir d'équivalents à l'époque, hormis le calcul plus tardif de Fortet cité ci-dessus qui ne nécessite pas de changement de temps ni d'application des variables corrigées, mais seulement la compensation de X par le retrait de la partie « non aléatoire » cumulée.

Le lemme IX est une version du théorème de Dubins–Schwarz [1965]. Le seul résultat approchant à l'époque est le théorème de Lévy de caractérisation du mouvement brownien, [1937a, n° 52], qui est relatif aux processus à accroissements indépendants continus et non aux martingales, voir Loève, [1955/1977], vol. II, pp. 210–212. La démonstration de Doeblin repose de nouveau sur un théorème limite central pour des variables faiblement dépendantes dû à Bernstein [1926].

La notion de martingale et sa dénomination (que Doeblin n'utilise pas) sont dues à Ville, dans sa thèse [1939]. Elle est considérée par Lévy sous un autre nom dès 1934. (*e. g.* [1935], [1936], [1937a, n° 65], la propriété de martingale s'appelant simplement, chez Lévy, la « condition C »). Les « méthodes de martingales » font donc partie de l'outillage probabiliste de la fin des années trente, à Paris tout au moins, et Doeblin connaît bien entendu les travaux de Lévy et de Ville sur ce sujet. Toutefois l'utilisation qu'il en fait ici paraît originale, elle est en tout cas remarquable.

La théorie des martingales ne commence vraiment qu'avec l'article fondamental de Doob [1940] qui démontre le théorème de convergence et son livre de 1953. Elle joue un rôle central dans la théorie des probabilités de la seconde moitié du XX[e] siècle. Sur tous ces sujets, voir [Crépel, 1984a,b]. Rappelons que Jean Ville (1910-1989) a été avec Doeblin le principal animateur du Séminaire Borel de calcul des probabilités de l'IHP fondé en 1937-1938. Ce séminaire se trouve à l'origine de quelques uns des thèmes développés dans le pli. Après la guerre, Ville a quitté l'université et la théorie des martingales pour une carrière de conseil scientifique en télécommunication. Il a été nommé en 1956 professeur d'Économétrie à la Faculté des sciences de Paris tout en continuant ses activités de conseil, comme d'ailleurs Fortet et d'autres.

([9]) Paragraphe X

La dénomination « théorème local du logarithme itéré » et l'énoncé pour le cas du mouvement brownien utilisé et généralisé par Doeblin sont dus à Khinchin [1933a, pp. 72–75]. C'est également Khinchin qui a démontré la loi du logarithme itéré pour le jeu de pile ou face [1924], et c'est Kolmogorov [1929] qui en a montré la généralité et la précision en attendant les travaux de Lévy [1931], Cantelli [1933], Cramér [1934], Marcinkiewicz, Zygmund [1937], Hartman, Wintner [1941], Erdös [1942], et Feller [1943, 1946] dans le cas des variables indépendantes, ceux de Lévy pour les martingales [1936, 1937a] et ceux de Doeblin pour les chaînes de Markov {5}. On trouve dans les archives de Fréchet une traduction française de l'article de Kolmogorov [1929] faite par Doeblin.

Dans le dernier chapitre de sa thèse {5}, pp. 115–118 et {4}, Doeblin établit déjà un théorème du logarithme itéré pour l'équation de Smoluchowski (F homogène dans le temps), mais il s'agit d'un résultat différent (non local) concernant le comportement asymptotique des moyennes temporelles du processus, copie de son théorème du logarithme itéré pour les chaînes de Markov {CR2,3}, {5}.

Le théorème du logarithme itéré pour le jeu de pile ou face et donc le théorème local du logarithme itéré pour le mouvement brownien ont été améliorés par Kolmogorov dans un travail non publié, communiqué à Lévy en 1936 (voir à ce sujet Lévy [1937a, n° 70] et [1948, p. 88, théorème 21.2], [Itô McKean, 1965, § 1.8, 7.14], [Locker, 2001]) :

Si $X(t)$ est un mouvement brownien standard et si $x(t)$ est une fonction croissante rendant convergente l'intégrale $\int x(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2(t)}{2}}\,\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$, $P\left\{\overline{\lim_{t\to 0}}\,\dfrac{X(t)}{\sqrt{t}\,x(t)}=1\right\}=1$. Si au contraire l'intégrale diverge, la fonction $\sqrt{t}\,x(t)$ est atteinte par $X(t)$ sur tout intervalle $[0,T]$, presque-sûrement.

La première partie de ce résultat (la partie « facile », déjà considérée par Cramér [1934] et Petrowski [1935]) est démontrée dans la thèse de Ville par une méthode de martingale [1939, pp. 120–122] pour le mouvement brownien et par Fortet [1943, chapitre IV] pour ses diffusions ($\sigma=1$ et a satisfaisant aux conditions de Feller). C'est Erdös qui a établi le résultat complet de Kolmogorov dans le cas du jeu de pile ou face, [Erdös, 1942] (voir aussi [Feller, 1950a], chapitre VIII, exercices 7 et 8). Feller a étendu ensuite le théorème de Kolmogorov–Erdös aux sommes de variables aléatoires indépendantes de même loi centrée satisfaisant une condition logarithmique simple, (le cas $a=0$), Feller [1943, 1946], voir aussi [Lévy 1948, n° 51], [Motoo, 1959]. Le théorème de Doeblin est moins précis que les résultats de Kolmogorov–Feller mais plus général d'une certaine façon.

La technique de régularisation par Y employée par Doeblin dans le cas où sigma est nul est classique notamment chez Lévy dans son étude des sommes de variables enchaînées, par exemple [1937a, chapitre VIII, n° 67], de même que les techniques de temps aléatoires liés aux variances, mais Lévy n'a jamais étudié de cette façon les trajectoires des diffusions, ni d'ailleurs les diffusions. Dans son livre de 1948, Lévy étudie, certes, les diffusions mais d'assez loin et se concentre sur les processus additifs qu'il connaît bien depuis 1934 et le mouvement brownien dont il fait l'étude fine reprise par tous les auteurs suivants, *e. g.* [Itô McKean, 1965]. Lévy avoue candidement son ignorance de la théorie de Kolmogorov–Feller dans une lettre à Loève du 24 novembre 1948 : « Je suis un peu ennuyé d'une lettre de Feller ; il paraît qu'il a travaillé depuis 1936 sur la diffusion de la probabilité ; je l'ignorais totalement et regrette de n'en avoir pas parlé. » Rappelons que le livre de Lévy [1948] se propose d'exposer la théorie des processus stochastiques et que le chapitre 3, intitulé : « Les processus de Markoff et la diffusion de la probabilité », est consacré à l'équation de Chapman–Kolmogoroff et ne cite pas [Feller 1936] ni d'ailleurs [Doob, 1942b] ou [Fortet, 1943] ni bien sûr le nom de Itô.

On remarque que Doeblin parle ici de « processus stochastique gaussien à accroissements indépendants » et n'écrit pas simplement « mouvement brownien ». Un peu plus haut, page 22, il utilise la locution mixte « processus brownien » ou même, page 25, « processus brownien gaussien symétrique avec l'écart-type $\varepsilon\sqrt{t}$ ». Il se conforme en cela à la tradition des écoles de Moscou et de Paris. Aucun des grands auteurs probabilistes des années trente n'utilise, pour nommer l'objet dont ils traitent, l'expression « mouvement brownien » qui est généralement réservée, dans la littérature scientifique du moment, au mouvement brownien des physiciens, abstraction faite de sa modélisation.

Ce n'est qu'à la fin des années trente, alors que Doeblin est déjà loin de Paris, que Lévy commence à écrire timidement « mouvement brownien théorique » ([1939a, p. 286]) ou « fonction aléatoire liée au mouvement brownien », certainement sous l'influence de Marcinkiewicz qui se trouve à Paris à l'automne 1938 et qui est à l'origine de l'intérêt de Lévy pour le « mouvement brownien » des mathématiciens polonais, voir [Marcinkiewicz, 1939] et [Kahane, 1998]. Le premier grand mémoire de Lévy sur le mouvement brownien linéaire [1939a] s'appelle encore : « Sur certains processus stochastiques homogènes » mais son mémoire sur le mouvement brownien plan s'appelle tout simplement : « Le mouvement brownien plan » [1940], et dorénavant Lévy utilisera cette locution qui est adoptée, depuis, par tous les mathématiciens.

([10]) Paragraphe XI : « Grandes valeurs ».

Ce paragraphe, visiblement interrompu, est repris au n° XIII. Il ne semble pas que Kolmogorov ou Feller se soient intéressés aux grandes valeurs dans leurs études des années trente, en revanche Serge Bernstein a très clairement posé le problème dès les origines de sa théorie des équations différentielles stochastiques. Il paraît être le premier à avoir remarqué que pour définir une solution finie p. s. des équations stochastiques il faut exiger de leurs coefficients qu'ils ne croissent pas trop vite à l'infini en x, l'idéal étant qu'ils restent bornés ainsi que leurs inverses ; sinon le mouvement prend des valeurs arbitrairement grandes avec probabilité positive. Au début de son article d'exposition [1938], Bernstein donne l'exemple de l'équation

$$\Delta y = y^2 \Delta t + \alpha\sqrt{\Delta t}$$

dans lequel α est une variable prenant les valeurs ± 1 avec probabilité $1/2$.

Bernstein montre que, si l'on part de 0 à l'origine des temps et qu'on fait tendre Δt vers zéro, la probabilité d'avoir $y = \infty$ au temps $t = 6$ est supérieure à $0,0061$. [1938, pp. 7–9].

On verra que Doeblin est parfaitement informé de ce problème et qu'il y revient à plusieurs reprises et jusqu'à la fin du pli. Ses résultats englobent naturellement ceux de Bernstein et paraissent entièrement originaux. Voir aussi note 12 ci-dessous.

Pour une présentation actuelle de ces questions voir par exemple [Ikeda Watanabe, 1981, chapitres IV et VI], [Stroock, 1982, 1987] et les traités cités en bibliographie.

([11]) Paragraphe XII : théorème de continuité de Lévy.

Le théorème de continuité de Lévy pour le mouvement brownien, que Doeblin étend à ses mouvements réguliers, figure dans le livre de 1937 au paragraphe 52, formule 13. Voir [Itô McKean 1965, § 1.9], pour une transcription de la démonstration de Lévy dont il est dit, page 31, que c'est un « modèle du genre ».

Dans le cas des diffusions, ce résultat est montré directement par Fortet, [1943, théorème II], sous ses hypothèses, et par exemple dans [Fuchs, 1955, p. 193] dans le cadre de la théorie de Itô. Dans son livre [1969, § 2.5 et problème 3 page 57] McKean démontre le théorème local du logarithme itéré de Khinchin et le théorème de continuité de Lévy pour les diffusions à l'aide du changement de temps de Doeblin, reconstituant très exactement, trente ans après, les paragraphes X et XII du pli.

([12]) Paragraphe XIII.

Les résultats présentés ici ne figurent pas dans la note {CR9}. Ils sont améliorés au paragraphe XIII′ et annoncés dans la note {CR12}. Ils font dépendre les probabilités de grandes valeurs, des bornes des deux coefficients a et σ. Ces résultats, on l'a dit, sont vraisemblablement en partie motivés par les travaux de Bernstein sur les équations différentielles stochastiques commencés en 1932 et exposés dans [Bernstein, 1938]. Dans ce dernier mémoire, en effet, Bernstein précise dès le paragraphe 2 que si la fonction $a(x,t)$ croit en x plus vite qu'une droite (par exemple si $a(x,t) = x^2$, voir note 10), le mouvement X prend des valeurs arbitrairement grandes avec probabilité proche de 1 ($\Pr\{y(2) > N\} > 0,9997$ si $y(0) = 5$, aussi grand que soit N, dans l'exemple de la note 10) ; il n'est dès lors plus question de réduire directement la probabilité de ses grandes valeurs et pour Doeblin d'obtenir un mouvement régulier dans de telles conditions. Pour sa part Bernstein se limite aux données soumises à une hypothèse de « quasi-linéarité » et c'est sous celle-ci et des conditions analytiques supplémentaires qu'il démontre la convergence en loi des interpolés de ses mouvements vers une solution de l'équation « de Fokker–Planck » associée ([1938, théorème, p. 11]), ce qui limite (excessivement selon Doeblin) sa théorie. Doeblin se réfère déjà à l'hypothèse de Bernstein dans {CR10} où [Bernstein, 1933b] est cité au bas de la page 250. Il obtient ici un théorème de « grandes valeurs » sur un intervalle de temps borné valable pour des données locales simplement continues satisfaisant une condition qui englobe celle de Bernstein dans le cas de mouvements p. s. continus (corollaire).

C'est Doeblin, on l'a dit note 1, qui, à la demande de Fréchet ([Cohn, 1993, p. 26]), a publié le grand mémoire de Bernstein sur les équations différentielles stochastiques [1938], il le connaissait donc très bien et en savait les richesses et les faiblesses. Doeblin n'était pas loin de penser que Bernstein avait manqué son but et il voulait le lui faire savoir. Fréchet, ami de longue date de Bernstein, l'en a dissuadé, voir [Cohn, 1993, p. 26]. On sait par le témoignage de Laurent Schwartz que Doeblin avait le projet de s'attaquer à son tour à la théorie des équations différentielles stochastiques. Il n'en a pas eu le loisir, préférant consacrer le peu de temps qui lui restait à vivre à résoudre directement les problèmes les plus difficiles, sous des hypothèses faibles qui n'autorisent guère de théorie générale simple. Il y a chez Doeblin un sentiment de l'urgence, une tension extrême qui peuvent expliquer qu'il ait trouvé la force d'écrire par exemple ce paragraphe, dans des conditions matérielles et morales aussi peu favorables que possible.

Page *(28)* : Doeblin introduit la loi Φ du maximum de la valeur absolue d'un mouvement brownien (normé). La loi Φ contrôle les grandes valeurs des mouvements réguliers de Doeblin convenablement normalisés. Cette loi déjà calculée par Bachelier dans ses travaux [1901, 1912] vient d'être publiée par Lévy [1939a], elle s'exprime sous forme d'une série. On trouve à Marbach dans les papiers personnels de Doeblin, les notes aux CRAS de Lévy annonçant ses résultats sur le mouvement brownien, avec un grand nombre de corrections et de commentaires. Manifestement Lévy tenait à informer aussitôt Doeblin de ses résultats ; la réciproque est moins évidente, Doeblin s'étant assez vite convaincu que Lévy ne « lisait » pas.

Page *(31)* : Les deux dernières conditions du corollaire, visiblement corrigées après coup, se trouvent énoncées dans la deuxième note sur l'équation de Kolmogoroff {CR12, p. 365}. Ce sont les conditions de quasi-linéarité de Bernstein [1938, pp. 9 et 26], que Doeblin retrouve. Voir par exemple [Ikeda Watanabe, 1981], chapitre IV, théorème 2.4 ou [McKean, 1969, p. 66, problème 2].

Le théorème du numéro XIII est amélioré au paragraphe XIII′, à la fin du cahier, entre les pages *(71)* et *(78)*. Doeblin a indiqué en note que ce paragraphe XIII′ devait être placé juste après le paragraphe XIII qui lui se termine à la page *(31)*. Nous l'avons cependant reproduit à la fin du pli dans l'ordre chronologique d'écriture du cahier. Il y a eu maturation du problème des grandes valeurs entre la fin de l'automne 1939, lorsque Doeblin commence à rédiger les résultats de sa première note sur l'équation de Kolmogorov écrite avant son départ au Service militaire {CR9}, et la fin de sa rédaction, vraisemblablement en février 1940, après le changement de cantonnement en Meurthe-et-Moselle. Ce serait donc dans le courant des mois de janvier et février que Doeblin serait revenu sur le problème des grandes valeurs après avoir traité des théorèmes d'existence. Ces théorèmes sont en effet conditionnés par une hypothèse de tension uniforme des lois approchantes, de sorte que leur application nécessite des critères assurant cette propriété, critères dépendants d'une étude des « grandes valeurs », qui l'aurait incité à reprendre les résultats du numéro XIII. Doeblin a rédigé alors une note aux Comptes rendus de l'Académie des sciences où il énonce ses résultats avec les mêmes notations. Cette note présentée par Borel le 4 mars 1940 est la note {CR12}, résumée par Doob dans les *Math. Reviews*, I, p. 343.

Il serait intéressant de situer plus précisément les théorèmes de grandes valeurs de Doeblin qui permettent notamment de préciser les tests de non explosion dans le cas inhomogène et fournissent des critères d'existence des mouvements réguliers. Pour des énoncés actuels relatifs aux grandes valeurs des diffusions, on verra [Stroock–Varadhan, 1979] et [Stroock, 1987, chapitre 2, pp. 20–22].

Le paragraphe XIII′ se termine par une étude inachevée sur « la monotonie par rapport à a », il contient un théorème qui précise les résultats du n° 17 ; la démonstration qui semble procéder par couplage n'est pas donnée. Voir note finale ci-dessous.

([13]) Page *(33)* : la « remarque » finale de cette page est écrite à l'encre bleu-noir différente de l'encre noire du § XIV, elle a manifestement été ajoutée après coup, elle se poursuit sur une page volante non numérotée extraite d'un autre cahier du même type.

([14]) Le « cas particulier important » de la page *(35)* est déjà considéré par Feller [1936, § 2, p. 125], il permet à Fortet [1941a, 1943] de se limiter au cas $\sigma = 1$, lorsque a et σ sont très réguliers.

Sur les changements de variables dans l'équation de Chapman–Kolmogorov, voir [Kolmogorov, 1931, § 17], voir aussi [Bernstein, 1932, p. 300 et 1938, p. 24] dans son cadre. Les techniques de changements de variables sont évidemment habituelles en théorie des équations paraboliques, pour ramener la forme générale à une forme plus simple, *e. g.* [Gevrey, 1913/1914].

Toutefois Kolmogorov et Feller raisonnent analytiquement sur les équations paraboliques et ne considèrent pas directement, comme le fait ici Doeblin, le « mouvement » transformé $Y(t) = \varphi(X(t), t)$, ni par conséquent ses accroissements ΔY et les formules qui s'en déduisent. On se reportera à la présentation qu'en fait Marc Yor au début de cette publication.

Le paragraphe XV montre, sans doute, à quel point la formule d'Itô était nécessaire, comme déjà toute entière contenue dans la théorie de l'équation de Kolmogoroff dès lors qu'on l'abordait de la bonne façon, et en même temps la difficulté et la lenteur avec laquelle elle s'est manifestée, le processus de cristallisation n'aboutissant vraiment qu'avec la théorie de Itô [1950, 1951b].

Sur l'émergence de la formule d'Itô et son rôle décisif dans la reconnaissance et l'utilisation généralisée du calcul stochastique, on pourra lire par exemple les articles de synthèse de Stroock et Varadhan [1987] et de Meyer [2000].

([15]) Le théorème du n° 17, pages *(38)-(39)*, a pour but d'établir une forme de l'« hypothèse de Ville » sur le problème de la ruine des joueurs généralisé (voir note ([8])) : la probabilité qu'une diffusion partant de (x, s) atteigne le côté gauche de la frontière avant de toucher le côté droit est égale à la solution $v(x, s)$ de l'équation parabolique associée satisfaisant à des conditions frontières convenables (corollaire XVIII). Ce problème a une très longue histoire. On peut la faire remonter à Pascal qui semble être le premier à avoir posé nettement le problème de la ruine d'un joueur (1656, voir [Meusnier, 1992, p. 163]). Ce type de problème a été intégré à la théorie des « probabilités continues » par Bachelier dès 1900. Bachelier appelle problème de seconde espèce, le calcul de la probabilité qu'un jeu continu (une diffusion de Bachelier) atteigne dans un intervalle de temps donné une valeur fixe, b, donnée d'avance (la ruine de Pierre) et problème de troisième espèce, le calcul de la probabilité d'atteindre, dans le même laps de temps, b avant a (c'est-à-dire la ruine de Pierre avant celle de Paul), partant d'une situation fixée à l'avance. Bachelier envisage les problèmes de deuxième et troisième espèces aussi bien pour son mouvement brownien que pour ses mouvements « connexes », c'est-à-dire les processus additifs continus généraux, en une et plusieurs dimensions, voir [Bachelier, 1901, 1906, 1912]. C'est Bernstein [1932, p. 298] qui paraît être le premier à avoir fait explicitement la remarque que dans le cas du mouvement brownien, il y avait identité entre problème de Bachelier de troisième espèce pour des fortunes dépendant du temps et problème aux limites pour l'équation de la chaleur. Il ajoutait : « Toutes les fois où la loi de probabilités de passage de la chaîne satisfera à une équation analogue du type parabolique, la même méthode sera applicable ». Rappelons à ce propos que c'est B. Hostinský qui lut ce texte extraordinaire au Congrès des mathématiciens de Zurich, Bernstein n'ayant pas obtenu l'autorisation de s'y rendre.

Khinchin [1933a, p. 31] appelle second problème de diffusion le problème de Bachelier de troisième espèce dans le cas homogène dans le temps, il montre (*ibid.* p. 32) que la probabilité partant de x d'atteindre b avant a est solution de l'équation différentielle du second ordre associée, pour les conditions frontières $v(b) = 1$; $v(a) = 0$, c'est le corollaire XVIII de Doeblin dans un cas particulier. Par exemple, pour le mouvement brownien standard, la probabilité de sortir vers b avant a, partant de x, est solution de l'équation $v''(x) = 0$, avec conditions frontières, $v(a) = 0$ et $v(b) = 1$, c'est-à-dire $v(x) = (x - a)/(b - a)$, un résultat connu pour le jeu de pile ou face dès le début du XVIII^e siècle (*e. g.* [Hald 1990]). Khinchin traite également du cas de deux dimensions [1933a, chapitre 4] de même que Kolmogorov et Leontovich [1933, § 1 rédigé par Kolmogorov] (voir aussi [Kolmogorov, 1933c]) et Bernstein [1934b] établit un résultat semblable (à une dimension) dans le cadre de sa théorie des équations différentielles stochastiques et sous ses hypothèses ; c'est probablement à lui que Fortet [1943] a emprunté la locution, probabilité d'absorption, par analogie avec le problème de la diffusion dans un tube a, b avec absorption aux extrémités. Bernstein étend son résultat au cas de barrières variables avec le temps $a(t) < b(t)$ (cas d'un tube se déformant avec le temps, ou de joueurs dont la fortune évolue au cours du temps). Kolmogorov et Petrowski traitent bientôt le problème local du logarithme itéré généralisé dans le cas du mouvement brownien (frontière jamais traversée le plus près possible du mouvement en un point donné), comme un problème de Bachelier de seconde espèce (un seul joueur de fortune variable $a(t)$ luttant contre un adversaire de fortune infinie, ou bien absorption d'une particule diffusante au contact d'une courbe $a(t)$, ou encore problème aux limites pour l'équation de la chaleur). Le mémoire de Petrowski [1935] et le théorème de Kolmogoroff cité note 8 (qui est une traduction probabiliste d'un théorème de Petrowski [1935]) sont à l'origine des travaux de Ville sur la loi du logarithme itéré ([1939], chapitre V) et de l'hypothèse qu'il présente en 1938 au séminaire Borel, qui sera traitée quelques années plus tard dans son cadre mais complètement par Fortet [1941c,d, 1943], et qui peut avoir également motivé les travaux de Doeblin sur ce point. Dans tous les cas déjà traités ou à venir, les probabilités d'absorption (de ruine) résolvent un problème aux limites d'une équation parabolique (et inversement), et le plus souvent sous des conditions dont la généralité dépasse de beaucoup celle atteinte par la théorie analytique des années trente, celle de Gevrey notamment ; de sorte qu'on assiste là à la revanche de Bachelier sur Gevrey sans que ni l'un ni l'autre, pourtant encore actifs, ne le réalisent (sur l'affaire Bachelier–Gevrey, voir Courtault et al. [2000]).

Le problème de Ville–Bernstein–Khinchin–Kolmogorov–Petrowski–Bachelier–Pascal a donné lieu à une abondante littérature après la guerre, en dimension un comme en dimension supérieure, particulièrement Kac [1951, 1959], Kakutani [1944, 1945], Lévy [1948], etc. et plus abondante encore et élargie à la théorie du potentiel et à la théorie des martingales après les travaux de Doob [1954, 1955b, 1956, 1984] et Hunt [1957/1958], au point de devenir l'un des grands chapitres de l'Analyse de la seconde moitié du XX^e siècle ; la littérature sur ces sujets est extrêmement riche, voir [Itô McKean, 1965, chapitre 7], [Bouleau, 1987], [Meyer, 2000] et [Locker, 2001]. Le chapitre ne paraît pas clos encore, les liens entre théorie des superprocessus et équations aux dérivées partielles relevant de la même logique et des mêmes interprétations, [Dynkin, 1991, 1993] et [Le Gall, 2000, p. 780].

Les contours (verticaux) dessinés par Doeblin sont classiques en théorie des équations paraboliques, par exemple [Goursat, 1915, chapitre 29] pour l'équation de la chaleur et [Gevrey, 1913/1914], pour l'extension aux équations paraboliques générales.

Le corollaire XVIII est précisé plus loin par le corollaire de la page *(59)*.

([16]) Page *(44)* : la référence à Khinchin est [1933a], chapitre III, § 2, pp. 30–39 qui introduit dans un cas moins général les solutions v considérées par Doeblin, voir note précédente.

Page *(45)* : le théorème d'unicité énoncé ici est vraisemblablement celui que Doeblin annonce dans le dernier manuscrit de Marbach reproduit en annexe, il ne figure pas dans les notes de 38–40 et cependant doit dater du printemps 1938.

La proposition (2), sous les hypothèses (1), (2), (3) et l'existence des dérivées partielles convenables de F en x et s, est démontrée dans l'article de Feller [1936], p. 119. Kolmogorov a démontré ce même résultat sous ses hypothèses dans [1931, § 13]. Kolmogorov appelle « première équation différentielle », l'équation $\dfrac{\partial v}{\partial s} + a(x,s)\,\dfrac{\partial v}{\partial x} + b(x,s)\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$. Dans le même article [1936], pp. 119-120, Feller montre que, si $F(x,y,s,t)$ a une densité en y, $f(x,y,s,t)$, elle vérifie, comme fonction de t et y, l'équation adjointe $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial y}[a(y,t)u] - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}[b(y,t)u] = 0$ (avec les notations de Feller, $b(x,s) = \frac{1}{2}\sigma^2(x,s)$ avec les notations de Doeblin), ce que Kolmogorov avait démontré sous ses hypothèses dans [1931, p. 450]. (Voir à ce sujet par exemple [Blanc-Lapierre, Fortet, 1953, pp. 294-295]). Kolmogorov appelle « seconde équation différentielle », cette équation conjuguée (qui est l'équation de la chaleur dans le cas du mouvement brownien, comme Bachelier l'avait assez bien vu dans sa thèse [1900], l'une des sources principales de la théorie de Kolmogorov). Dès 1933, Kolmogorov, à qui on avait dû faire la remarque, indique que ses équations fondamentales sont classiques en physique des diffusions depuis les années 1910 sous le nom d'équations de continuité et cite les noms de Smoluchowski, Fokker et Planck [1933a, p. 149], (voir à ce sujet, [Jacobsen, 1996], mais aussi [Mises, 1931, p. 499], [Khinchin, 1933a, p. 27], [Hostinský, 1931a, p. 59], etc.). Signalons que Bernstein, dans sa conférence de Zurich [1932, p. 300], présente une approche stochastique remarquable de l'équation de Fokker–Planck où l'on pourrait lire entres les lignes (et Doeblin semble l'avoir compris) la formule d'Itô du paragraphe XV.

La notion d'équation adjointe est généralement attribuée à Riemann (1860, voir *e. g.* [Darboux, 1894, vol. II, chapitre IV] et [Goursat, 1915, n° 497] pour les références). La traduction probabiliste de cette notion dans le cas des équations paraboliques paraît entièrement due à Kolmogorov [1931, § 13].

L'habitude d'appeler backward et forward les première et deuxième équations de Kolmogorov vient probablement de Feller, [1950a, p. 358] et [1950b, p. 326], elle semble bien établie.

([17]) Page *(46)* : Kolmogorov [1931], § 12, pp. 441–444. Doeblin, dans sa traduction française, appelle ce théorème, le « théorème de passage », c'est-à-dire une façon de passer des schémas discrets aux schémas continus, en utilisant la méthode de Lindeberg.

Khinchin, [1933a, p. 8] écrit que ce théorème de passage de Kolmogorov, inspiré par Bachelier, et rendu rigoureux par la méthode de Lindeberg, est l'un des plus beaux chapitres de la théorie des probabilités. C'est en tout cas un chapitre qui s'est révélé d'une grande richesse, les approximation-diffusions étant à la base de bien des résultats de statistique asymptotique et de théorie des probabilités. C'est en particulier ce principe qui est à l'origine de la théorie analytique des diffusions de Kolmogorov [1931] mais aussi du théorème local du logarithme itéré du mouvement brownien [Khintchine, 1933a]. C'est en effet après avoir pris connaissance du « principe hyperasymptotique de Bachelier » revu par Kolmogorov que Khinchin a l'idée d'étendre en chaque instant d'un mouvement brownien le théorème du logarithme itéré pour le jeu de pile ou face qu'il a établi en 1924.

Le passage des schémas discrets aux schémas continus est à double sens : en traitant complètement des formules discrètes simples, on peut déduire des résultats asymptotiques importants sur des schémas continus inaccessibles, qui, ne dépendant plus de la particularité des calculs discrets dont ils proviennent, fournissent en retour des formules s'appliquant à des schémas discrets compliqués. C'est le fond des méthodes (d'invariance) élaborées par Erdös et Kac, à la fin de la seconde guerre mondiale, pour établir des théorèmes limites généraux sur les sommes de variables indépendantes ou calculer par exemple les valeurs moyennes de certaines fonctionnelles du mouvement brownien qui échappaient à Cameron et Martin, voir

[Kac, 1945, 1946, 1947], [Erdös, Kac, 1946], et [Fortet, 1949, première partie], [Donsker, 1951]. Comme aimait à le rappeler Borel : « L'histoire des mathématiques montre, par de nombreux exemples, que les théories du discontinu et du continu n'ont pas cessé de réagir l'une sur l'autre et de s'aider mutuellement. » *e. g.* [Borel, 1923/1939, p. 216].

([18]) Page *(47)* : le théorème énoncé est annoncé dans la note {CR9}, théorème IV.

Page *(49)* : pour le § XX, on verra [Stroock–Varadhan, 1979] et [Stroock, 1982, 1987]. Nous ne connaissons pas de résultat du même type contemporain de Doeblin.

([19]) Page *(53)* : Doeblin adapte ici au cas continu la méthode du couplage qu'il a introduite dans l'article {8} pour établir par une méthode probabiliste les propriétés asymptotiques des chaînes de Markov à nombre fini d'états. Sur l'importance de cette méthode, voir Lindvall [1991, 1992], [Cohn, 1993]. Il semble bien que le pli contienne à cet endroit la première application de la méthode du couplage aux processus de diffusions, c'est par cette méthode que Doeblin montre la continuité uniforme de F pour des données uniformément bornées dont il a besoin au paragraphe suivant pour établir ses théorèmes d'existence. C'est également de cette façon qu'il démontre le théorème XXIII qui permet d'inverser le rôle de x et y et de s et t (théorème XXIV).

L'utilisation de la méthode du couplage dans l'étude des diffusions n'a été reprise qu'un demi-siècle après Doeblin, voir [Lindvall–Rogers, 1986], [Lindvall, 1993], [Elworthy, 2000, p. 472].

([20]) Pages *(53)-(54)* : la démonstration rayée détaille la page *(56)*, en répétant la représentation locale du § 5, nous la reproduisons ici :

(53)

Démonstration. – Soit A le maximum de $|a(x,s)|$, $\overline{\sigma}$ celui de $\sigma(x,s)$, $\underline{\sigma}$ le minimum de $\sigma(x,s)$ pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $\tau_1 \leqslant s \leqslant \tau_2$. t étant $\leqslant \tau_2$ posons

$$Z(t) = X_1(t) - X_1(\tau_1) - X_2(t) + X_2(\tau_1) - \int_{\tau_1}^{t} a(X_1(u),u)\,\mathrm{d}u + \int_{\tau_1}^{t} a(X_2(u),u)\,\mathrm{d}u$$

si, pour $\tau_1 \leqslant t' \leqslant t$

$$\alpha < X_1(t') < \beta, \quad \alpha < X_2(t') < \beta$$

Si à l'instant t' on a eu $X_1(t) = \alpha$ ou β ou $X_2(t) = \alpha$ ou β, nous prendrons pour

$$Z(t) - Z(t')$$

une variable gaussienne symétrique d'écart-type $\sigma\sqrt{t-t'}$. On a

$$\mathbb{E}\,[Z(t)] = 0$$

(54)

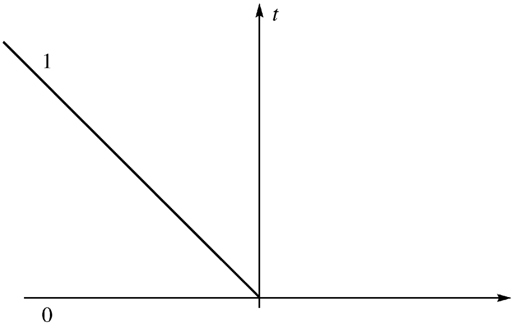
$\tau_1 + \theta(\tau)$ désignant l'instant où

$$\int_{\tau_1}^{\tau_1+\theta(\tau)} \sigma^2[X_1(u),u]\,\mathrm{d}u + \int_{\tau_1}^{\tau_1+\theta(\tau)} \sigma^2[X_2(u),u]\,\mathrm{d}u = \tau$$

resp. si on a eu p. ex. $X_1(u_1) = \beta$ et $\alpha < X_1(t) < \beta$, $\alpha < X_2(t) < \beta$, pour $\tau_1 < t < u_1$

$$\tau = \big(\theta(\tau) - u_1\big)\sigma^2 + \int_{\tau_1}^{u_1} \big[\sigma^2[X_1(u), u] + \sigma^2[X_2(u), u]\big]\,\mathrm{d}u$$

$Z'(\tau) = Z(\theta(\tau))$ suit alors un processus stochastique homogène à accroissements indépendants gaussiens.
Évaluons la probabilité pour qu'on ait $Z(h) > x + A'h$ $(x > 0)$ $A' > 0$ pour un h compris entre 0 et h_1.
C'est la valeur au point P de la solution de l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial v}{\partial s} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ avec les conditions aux limites suivantes



Supposons $X_1(\tau_1) > X_2(\tau_1)$
a) La probabilité pour qu'il y ait un $Z'(\tau) > X_1(\tau_1) - X_2(\tau_1) + A/\underline{\sigma}^2\tau$ pour un $\tau < (\tau_2 - \tau_1)/\overline{\sigma}^2$ peut s'écrire

$$\Psi\left[A/\overline{\sigma}^2, (\tau_2 - \tau_1)/\overline{\sigma}^2, X_1(\tau_1) - X_2(\tau_1)\right]$$

En appliquant la méthode du § et des formules de Gevrey

(55)

on prouve que

$$\Psi\left[\ldots, X_1(\tau_1) - X_2(\tau_1)\right] = 1 + \mathrm{O}[X_1(\tau_1) - X_2(\tau_1)]$$

b)

([21]) Page *(57)* : c'est la seconde page *(57)*, Doeblin a raturé le numéro 59, qu'il avait initialement écrit, pour le remplacer par 57 et a renuméroté le pli à partir de cette page là. Ce changement de numérotation pourrait être un indice d'interruption dans la rédaction, par exemple à l'occasion d'un changement de cantonnement.

Doeblin a souligné deux fois le théorème XXIII sans doute pour en indiquer l'importance. Ce théorème est annoncé dans la note d'octobre 1938, {CR9}, théorème IV.

La démonstration du théorème XXIII est remarquablement simple et élégante, toutefois, comme dans un certain nombre de raisonnements précédents, elle fait usage implicitement d'une forme de la propriété forte de Markov pour les mouvements réguliers p. s. continus qui ne va pas immédiatement de soi, en dépit de sa grande évidence.

La propriété de Markov forte est déjà utilisée, sans autre forme de procès, par de nombreux savants. On en trouve des emplois dans le cas du jeu de pile ou face dès le XVIII^e^ siècle. Dans le cas continu, Bachelier, au début du XX^e^ siècle, en exploite toutes les richesses et Lévy bien davantage encore à partir de 1938. Dans leurs travaux sur les chaînes à états dénombrables, Doeblin et Kolmogorov en font un usage constant. Ce n'est qu'en 1945 que cette propriété a été identifiée et démontrée par Doob dans le cas des chaînes dénombrables, [1945]. Dans le cas des processus de Markov généraux, la propriété forte a été étudiée indépendamment par Blumenthal [1957] et Dynkin, Yushkevich [1956], voir aussi Hunt [1956] et Yushkevich [1957]. Lévy avoue dans ses mémoires [1970, p. 150] son étonnement devant l'importance (excessive à ses yeux) accordée à cette soi-disant propriété forte de Markov qu'il considère comme allant de soi sauf dans des cas de problèmes « mal posés ». C'est a posteriori devenu l'opinion commune depuis les travaux de Ray [1959] et Knight, voir [Meyer, 2000, p. 821] : « Tout processus de Markov peut être rendu fortement markovien et continu à droite par l'adjonction d'états fictifs ».

([22]) Le théorème XXIV établit l'existence d'un mouvement inverse naturel, dans le cas d'une diffusion réelle. Il n'est pas sans rappeler les travaux de Hostinský, Potoček [1935], Kolmogorov [1936, 1937], et ceux de Schrödinger [1931], [Fréchet 1938] etc., sur la réversibilité du temps dans les schémas probabilistes. Ces auteurs considèrent principalement le cas des chaînes « simples » (homogènes dans le temps) $(X(n))$ retournées : il s'agit d'étudier les probabilités de passage dans le sens rétrograde, par exemple que $X(n-1)$ soit égal à i sachant que $X(n)$ égale k. Ces probabilités dépendent en général de n ; dans quels cas n'en dépendent-elles pas, dans quels cas sont elles égales aux probabilités de passage $p(i,k)$ de i en k dans le sens direct ? Kolmogorov a abordé le cas continu, par une méthode analytique, dans le contexte particulier de l'équation de Smoluchowski, sous des hypothèses fortes assurant l'unicité de la solution, [1937] ; il montre que si les forces extérieures dérivent d'un potentiel, il y a égalité des densités de passage directes et inverses. Le résultat de Doeblin ne répond pas à ce type de questions mais sa démonstration par couplage (théorème XXIII) puis intégration par partie est d'une simplicité biblique. Ce théorème est annoncé dans la troisième note sur l'équation de Kolmogoroff {CR12}, théorème IV (avec un changement de notation dû à une erreur de copie) ; on peut donc penser qu'il est tardif. Ce que confirme une lettre non datée de Doeblin à Fréchet mais très vraisemblablement du début de l'année 1940 (Doeblin souhaite une bonne année à Fréchet). On y lit en effet : « Mon train de vie n'a pas changé. On est toujours au même endroit [Sécheval donc]. Je travaille toujours sur l'équation de Kolmogoroff, dans un mois je publierai une note complémentaire à ma note de 1938. Je me suis aperçu d'une chose assez amusante. Soit $F(x,y,s,t)$ une solution de l'équation de Chapman continue par rapport à x et correspondant à des mouvements continus presque sûrement. Comme j'ai prouvé depuis longtemps $1-F(x,y,s,t)$ est alors par rapport à x une loi de probabilité. Soit $G(y,x,t,s)=1-F(x,y,s,t)$. J'ai constaté que G satisfait l'équation fonctionnelle

$$G(y,x,t,s)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(z,x,u,s)\,\mathrm{d}_z G(y,z,t,u) \quad (s<u<t)$$

qui devient l'équation de Chapman si on pose par exemple $t'=-t$, $s'=-s$. » [Cohn, p. 29].

On trouve un résultat semblable avec la même démonstration dans [McKean, 1969, p. 58, problème 4].

La théorie générale du retournement du temps dans les processus de Markov est due pour une part importante à [Nagasawa, 1964]. On verra aussi [Meyer, 1967, pp. 18–23] et [Chung, 1982, 1995].

([23]) Page *(60)* : le premier théorème se trouve essentiellement énoncé dans la première note {CR9}, théorème IV. On note que la démonstration se fait par approximation à partir du cas de Feller en utilisant la compacité faible des lois temporelles qui résulte du théorème de continuité uniforme (XXII). (C'est d'ailleurs également par une technique de convergence étroite que Stroock et Varadhan [1969] démontrent dans leur cadre l'existence de diffusions à coefficients continus, les techniques analytiques n'ayant pas sensiblement progressé à cet égard, voir [Meyer, 2000, p. 831]). Dans le cas de la théorie des variables aléatoires, Doeblin, comme Lévy, sont coutumiers de ce type de démonstration maintenant classique mais qui l'était fort peu alors ; pour l'extension au cas des processus telle que l'envisage ici Doeblin voir [Prokhorov, 1956], [Neveu, 1964], [Meyer 1966], [Billingsley, 1968]. On notera l'ironie jubilante des « 4 ou 5 » dérivées de Feller (et de Bernstein) ; Doeblin est visiblement assez fier de damer le pion sur son terrain à l'un des jeunes ténors de l'école de Courant à Göttingen, les capacités analytiques de Feller étant d'ailleurs célèbres à plus d'un titre. Les jugements que Doeblin porte sur (presque) tous les mathématiciens de son temps sont souvent assez agressifs, arrogance ou intransigeance juvéniles qui ne touchent que le seul milieu mathématique, Wolfgang Doeblin étant généralement dans ses rapports de tous les jours extrêmement bienveillant et amical. On trouve à Marbach des lettres de camarades de régiment ou d'ajistes de tous les milieux qui le démontrent à l'évidence.

Il n'est pas facile de situer les résultats de Doeblin dans la théorie actuelle. Les théorèmes de Doeblin lèvent les restrictions analytiques de Feller et Bernstein (les 4 ou 5 dérivées), ils englobent évidemment tous les résultats connus dans le cas de mouvements sans explosion (le cas continu p. s. de Doeblin), mais les mouvements réguliers de Doeblin se permettent une infinité d'explosions sous réserve qu'il n'y ait pas de perte de masse instantanée (voir les conditions à l'infini, p. 2 et l'exemple p. 4) et nous ne connaissons pas d'auteurs travaillant ou ayant travaillé sous ces hypothèses. Doeblin reste attaché à sa problématique : il s'agit de montrer l'existence d'une solution de l'équation de Chapman, $F(x, y, s, t)$ bien définie, sous les conditions de la page 2. On verra [Stroock–Varadhan, 1979] pour une présentation générale de ces questions.

([24]) Pages *(63)-(64)* : le deuxième théorème d'existence est intermédiaire entre les deux notes {CR9,12}. De nouveau la condition sur les F est une condition de compacité faible. Il y a visiblement un signe manquant dans le manuscrit qui est rétabli dans la note.

([25]) Page *(68)* : il y a de nouveau un changement de numérotation qui permet de revenir à la numérotation initiale, on passe de *(65)* à *(68)*, comme on était passé de *(58)* à *(57)*. Le chiffre 68 est raturé ainsi que les 69, 70, 71. En se relisant Doeblin s'est aperçu de son erreur mais n'a pas corrigé toutes les pages à cause des renvois dans les démonstrations.

([26]) Page *(70)* : *début rayé* : si enfin il existe une suite de fonctions continues par rapport à (x, s) s'il existe un ensemble partout dense d'instants s pour lesquels $\sigma(x, s)$ est $\neq 0$ quel que soit x.

Pages *(69)-(70)* : le théorème d'existence énoncé ici est le théorème 1 de la note {CR12}. Il peut être daté de février 1940 et a été rédigé vraisemblablement en Lorraine.

Doeblin, considérant sans doute que les principales difficultés sont résolues et qu'il pourrait le cas échéant terminer sa rédaction, est passé à l'étude du cas « mixte », l'équation de Chapman sans conditions de continuité traitée par des méthodes stochastiques. Ce travail a dû se poursuivre à Oermingen dans le Bas-Rhin où sa compagnie est cantonnée au mois d'avril 1940. Voir {CR13} et [Cohn, 1993].

([27]) Pages *(74)-(75)* : la figure 1 se trouve page *(38)* et la définition des zones I, II, III est donnée page *(39)*.

(76) [*page rayée*]

THÉORÈME. – *Sous les hypothèses du théorème* 17 *on a, si* $a'(x, s) \leqslant a(x, s) \leqslant a''(x, s)$ *et si* $G_1(x, y, s, t)$ *resp.* $G_2(x, y, s, t)$ *sont des solutions régulières de l'équation de Kolmogoroff avec* *les données* a *et* σ

$$G_1(x,y,s,t) \geqslant F(x,y,s,t \mid a,\sigma) \geqslant G_2(x,y,s,t)$$

Démonstration. – Soit $F(x,y,s,t) = F(x,y,s,t \mid a,\sigma)$.
Si $|z| < K$ et $\tau < t' < t$

$$F(z,y,\tau,t) - \int F(z',y,\tau+\Delta,t)\,\mathrm{d}_z G_1(z,z',\tau,\tau+\Delta) = \frac{\partial F}{\partial z}(z,y,\tau,t)(a-a')\Delta + \mathrm{o}(\Delta)$$

$$F(z,y,\tau,t) - \int_{-\infty}^{+\infty} F(z',y,\tau+\Delta,t)\,\mathrm{d}_z G_1(z,z',\tau,\tau+\Delta) < \varepsilon\Delta$$

si $\Delta < \Delta_0(K,t')$.
Prenons $\Delta = (t'-s)/n$, $t_i = s + i\Delta$, nous obtenons

$$F(x,y,s,t) < \int \cdots \int F(z_n,y,t_n,t)\,\mathrm{d}_{z_n} G_1(z_{n-1},z_n,t_{n-1},t_n) \cdots \mathrm{d}_{z_1} G_1(x,z_1,t_0,t_1)$$
$$+ P_n^{(1)} f + Q_n^{(1)} f' + \varepsilon(t-s)$$

Dans cette formule l'intégrale est étendue

(77) [*page rayée*]

au domaine suivant : $|z_i| < K$ ($i = 1,\dots,n-1$), $-\infty < z_n < \infty$, $X_1(t)$ $[X(t)]$ étant un point mobile ayant un mouvement aléatoire dont la loi est déterminée par $G_1(x,y,s,t)$ $[F(x,y,s,t)]$, $P_n^{(1)}$ $[P_n]$ désigne la probabilité pour qu'on ait pour un i

$$X_1(t_i) < -K, \quad X_1(t_1)\cdots X_1(t_{i-1}) < K$$
$$[\text{resp.}\quad X(t_i) < -K, \quad X(t_1)\cdots X(t_{i-1}) < K]$$

et $Q_n^{(1)}$ $[Q_n]$, celle pour qu'on ait pour un i

$$X_1(t_i) > K, \quad X_1(t_1)\cdots X_1(t_{i-1}) > -K$$
$$[\text{resp.}\quad \big[X(t_i) > K, \quad X(t_1)\cdots X(t_{i-1}) > -K]$$

f désigne une moyenne de $F(z,y,u,t)$ pour $z \leqslant -K$, $s \leqslant u \leqslant t$, f' une moyenne de $F(z,y,u,t)$ pour $z > K$, $s \leqslant u \leqslant t$.
Si n tend vers l'infini, $P_n^{(1)}$, P_n, $Q_n^{(1)}$ et Q_n tendent vers des limites $P^{(1)}$, P, $Q^{(1)}$ et Q (dépendant de K et de t) et on a en vertu de la proposition précédente $P^{(1)} \geqslant P$, $Q \geqslant Q^{(1)}$. Par hypothèse on a $f = 1 - \Xi(K)$, $f' = \Xi(K)$ et on a vu au n° 17 que $P = \Xi(K)$, $Q = \Xi(K)$. Donc $P_n^{(1)} f + Q_n^{(1)} f' = P^{(1)} + \Xi(K) + \Xi(n)$.

D'autre part la probabilité pour que $X_1(t)$ se trouve à l'instant t à gauche de y est

$$G_1(x,y,s,t) \ngtr \int \cdots \int G(z_n,y,t_n,t)\,\mathrm{d}_{z_n} G(z_{n-1},z_n,t_{n-1},t_n) \cdots \mathrm{d}_{z_1} G(x,z_1,s,t_1)$$
$$+ P_n^{(1)} + [Q^{(1)} \textit{ rayé}]$$

Le signe égal de cette dernière formule a été rayé et Doeblin a annulé les deux pages 76 et 77 ; les deux pages qui suivent et terminent le pli sont visiblement un brouillon d'une nouvelle démonstration du dernier théorème, nous les avons reproduites en photocopie, l'ordre (éventuel) des formules étant difficile à rétablir.

Le théorème de monotonie de Doeblin est un « théorème de comparaison » en loi. Ce type de résultat a une postérité très longue, on se reportera à [Skorokhod, 1965], [Yamada, 1973], [Malliavin, 1978b] et [Ikeda Watanabe, 1981, chapitre VI, § 1]. En revanche nous ne connaissons aucun équivalent en 1940 de l'énoncé de Doeblin, de sorte que Athienville aurait été, en cette fin d'hiver 39-40, à l'extrême pointe de la théorie des diffusions que Kyoto, Moscou, Paris ou Princeton découvriraient à leur tour quelques années plus tard.