Examen du 28 mars 2022

Salle Nœther, 15h15 – 16h45
Documents autorisés mais Internet interdit
Justifier les réponses

Exercice 1 (Deux inégalités de Poincaré)**.**
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Montrer que U a même loi que $\Phi(X)$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\Phi(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$, et en déduire que
$$\mathrm{Var}(f(U)) \leq \frac{1}{2\pi}\mathbb{E}(f'(U)^2)$$
pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ bornée et à dérivée bornée.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, périodique de période 1. Considérons sa série de Fourier
$$S_n(f)(x) := \mathbb{E}(f(U)) + \sum_{k=1}^{n}(a_k \sin(2\pi kx) + b_k \cos(2\pi kx)).$$
Montrer que si $\lim_{n\to\infty} S_n(f) = f$ et $\lim_{n\to\infty} S_n(f)' = f'$ dans $L^2([0,1])$ alors
$$\mathrm{Var}(f(U)) \leq \frac{1}{4\pi^2}\mathbb{E}(f'(U)^2),$$
et préciser les cas d'égalité.
3. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$,
$$\mathrm{Var}(f(U)) \leq \frac{1}{\pi^2}\mathbb{E}(f'(U)^2),$$
et que la constante $\frac{1}{\pi^2}$ est optimale. Comparer avec l'inégalité de la première question.

Exercice 2 (Une inégalité de concentration)**.**
Soit Y une variable aléatoire réelle intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$ une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telles que $\{\varnothing, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$. Pour tout $1 \leq k \leq n$ on pose
$$d_k := \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_{k-1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{osc}(d_k) := \sup d_k - \inf d_k.$$
Le but de l'exercice est d'établir l'inégalité de concentration suivante : pour tout $r \geq 0$,
$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}Y| \geq r) \leq 2\exp\left(-\frac{2r^2}{\mathrm{osc}(d_1)^2 + \cdots + \mathrm{osc}(d_n)^2}\right).$$

1. Soit U une variable aléatoire à valeur dans l'intervalle $[a,b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$, telle que $\mathbb{E}U = 0$. Posons $p := \frac{-a}{b-a}$ et $f(u) := -pu + \log(1 - p + p\mathrm{e}^u)$. Montrer que $p \in [0,1]$ et que pour tout $t \geq 0$,
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tU}) \leq \mathrm{e}^{f(t(b-a))}.$$
Indication : établir que pour tout $t \geq 0$ et tout $u \in [a,b]$ on a $\mathrm{e}^{tu} \leq \frac{u-a}{b-a}\mathrm{e}^{tb} + \frac{b-u}{b-a}\mathrm{e}^{ta}$.
2. Montrer que $f'' \leq \frac{1}{4}$ et $f(0) = f'(0) = 0$ et en déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tU}) \leq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{8}(b-a)^2}$.
3. En déduire que pour tout $1 \leq k \leq n$,
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{td_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{8}\mathrm{osc}(d_k)^2}.$$
4. En déduire que
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t(Y-\mathbb{E}Y)}) \leq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{8}(\mathrm{osc}(d_1)^2+\cdots+\mathrm{osc}(d_n)^2)}.$$
5. En déduire l'inégalité de concentration annoncée.
6. En déduire que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a. indépendantes et centrées dans $[-1,1]$ alors pour tout $r \geq 0$,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\right| \geq r\right) \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}.$$

– oOo –