Partiel 2026/2027

Semaine du 16 novembre 2026, durée de 2 heures
Documents et internet non autorisés
Faites ce que vous pouvez, et ne vous en faites pas
Il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir une très bonne note !

Exercice 1 (Pont gaussien)**.** Considérons la marche aléatoire gaussienne $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par $S_0 = 0$, et la récurrence aléatoire $S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$, $n \geq 0$, où $(\xi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que $(S_1, \dots, S_n)$ est un vecteur gaussien centré et que $\mathrm{Cov}(S_k, S_\ell) = \min(k, \ell)$.
2. Soient $0 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la loi conditionnelle de S_k sachant $S_n = x$.
3. Pour $0 \leq k \leq n$ et $n \geq 1$, soit $B_k = S_k - \frac{k}{n} S_n$. Montrer que $(B_0, \dots, B_n)$ est indépendant de S_n et calculer $\mathrm{Cov}(B_k, B_\ell)$.
4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. Montrer que la loi conditionnelle de $(S_0, \dots, S_n)$ sachant $S_n = x$ est celle de $\left(B_k + \frac{k}{n} x\right)_{0\leq k\leq n}$.

Exercice 2 (Galton–Watson critique)**.** Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ un processus de Galton–Watson issu de $Z_0 = 1$, dans lequel chaque individu a, indépendamment des autres, zéro ou deux enfants avec probabilités $1/2$ et $1/2$. On admet que (Z_n) est une martingale pour sa filtration naturelle. Notons $T_a = \inf\{n \geq 0 : Z_n \geq a\}$, $a \geq 2$.

1. En appliquant le théorème d'arrêt de Doob à $T_a \wedge n$, montrer que $\mathbb{P}(\sup_{n\geq 0} Z_n \geq a) \leq 1/a$.
2. À l'aide d'un théorème de convergence des martingales, montrer que le processus s'éteint presque sûrement. Indication : une suite convergente d'entiers est stationnaire ; si $Z_n = k \geq 1$, la probabilité que $Z_{n+1} = 0$ vaut 2^{-k}.

Exercice 3 (Loi uniforme sur la sphère : caractérisation par invariance)**.** Soit $n \geq 1$. On note $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, $\mathbb{O}_n = \{O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : O^\top O = I_n\}$ et $\mathrm{SO}_n = \{O \in \mathbb{O}_n : \det(O) = 1\}$. On rappelle la formule d'intégration sphérique ou polaire $\mathrm{d}x = |\mathbb{S}^{n-1}| r^{n-1} \mathrm{d}r \mathrm{d}\sigma_{n-1}(\theta)$ où σ_{n-1} est la loi uniforme sur $\mathbb{S}^{n-1}$, c'est-à-dire la mesure de surface normalisée, et $|\mathbb{S}^{n-1}|$ est l'aire de la sphère. Pour $n = 1$, $\sigma_0 = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$. Soit X à valeurs dans $\mathbb{S}^{n-1}$ tel que $OX \overset{\mathrm{d}}{=} X$ pour tout $O \in \mathbb{O}_n$.

1. Considérons un vecteur gaussien isotrope $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$, $\sigma > 0$. Montrer que OZ a même loi que Z pour tout $O \in \mathbb{O}_n$, puis que $\|Z\|$ et $Z/\|Z\|$ sont indépendants, et que $\|Z\|^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$ et $Z/\|Z\| \sim \sigma_{n-1}$.
2. Montrer que σ_{n-1} est invariante par $\mathbb{O}_n$ et que $\mathbb{O}_n$ agit transitivement sur $\mathbb{S}^{n-1}$.
3. Montrer que $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, X\rangle})$ ne dépend que de $|t|$. Soit $U \sim \sigma_{n-1}$, indépendante de X. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\langle U, X\rangle})$, pour $r \geq 0$, en conditionnant successivement par U et par X. En déduire que $X \sim \sigma_{n-1}$.
4. Preuve alternative du fait que $X \sim \sigma_{n-1}$. Soit $Y_\varepsilon = X + \varepsilon Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ est indépendant de X et $\varepsilon > 0$.
   (a) En utilisant $\mathrm{Loi}(Y_\varepsilon \mid X = x)$, montrer que Y_ε a une densité qui ne dépend que de la norme de son argument.
   (b) En utilisant les coordonnées sphériques ou polaires, montrer que $Y_\varepsilon/\|Y_\varepsilon\| \sim \sigma_{n-1}$, indépendant de $\|Y_\varepsilon\|$.
   (c) Faire tendre ε vers zéro pour retrouver la loi de X, et donc démontrer que $X \sim \sigma_{n-1}$.
5. L'invariance par l'ensemble SO_n des rotations suffit-elle à caractériser σ_{n-1} ? Traiter séparément $n \geq 2$ et $n = 1$.

Exercice 4 (Condition $L\log L$ et martingales sous-multiplicatives [1])**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale à valeurs dans $[0, +\infty)$, adaptée à une filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$, avec $X_0 = 1$ p.s. On pose $X_n^* = \sup_{0\leq k\leq n} X_k$, $X_\infty = \lim_{n\to+\infty} X_n$, et $X_\infty^* = \sup_{k\geq 0} X_k$.

1. Montrer que pour toute variable aléatoire positive X, $\mathbb{E}[X \log^+ X] = \int_1^{+\infty} \mathbb{E}[X 1_{X>\lambda}] \mathrm{d}\lambda/\lambda$.
2. En utilisant l'inégalité maximale de Doob, montrer que pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}[X_n^*] \leq 1 + \mathbb{E}[X_n \log^+ X_n^*]$.
3. En déduire que $\mathbb{E}[X_n^*] \leq \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}(1 + \mathbb{E}[X_n \log^+ X_n])$.
   Indication : montrer que pour tous $x, y > 0$, $x \log^+ y \leq x \log^+ x + y/\mathrm{e}$.
4. On suppose à partir de maintenant qu'il existe une constante $c \geq 1$ telle que, p.s., pour tout $n \geq 1$, $X_n \leq c X_{n-1}$. Soit $T_\lambda = \inf\{n \geq 0, X_n > \lambda\}$, $\lambda > 1$. En appliquant le théorème d'arrêt à $T_\lambda \wedge n$, montrer que $\mathbb{E}[X_{T_\lambda} \mathbb{1}_{T_\lambda \leq n}] = \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{T_\lambda \leq n}]$.

1. Conventions : $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ pour $x > 0$, $\log^+ 0 = 0$, et $0 \log^+ 0 = 0$. De plus les formules avec X_T ne sont évaluées que sur $\{T < \infty\}$.

5. En déduire que $\mathbb{E}[X_n \log^+ X_n] \le c\mathbb{E}[X_n^*]$.
6. On suppose à partir de maintenant que pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, pour tout $k, l \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_{k+l}}{X_k}\right) \mid \mathscr{F}_k \right] \le \mathbb{E}[f(X_l)] \quad \text{p.s. sur } \{X_k > 0\}.$$
Le quotient est défini égal à zéro sur $\{X_k = 0\}$. Le but est de montrer que si $\mathbb{E}[X_\infty^*] < +\infty$, alors la martingale $(X_n)_{n\ge1}$ est bornée dans L^p pour un $p > 1$.
   (i) Soit f convexe et T un temps d'arrêt, éventuellement infini, tel que $X_T > 0$ p.s. sur $\{T < \infty\}$. Les quotients ci-dessous ne sont évalués que sur $\{T \le n\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{X_n}{X_T}\Big) \mathbb{1}_{T\le n} \Big] \le \mathbb{P}[T \le n]\mathbb{E}[f(X_n)].$$
   (ii) Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}[(X_n)^{1+\varepsilon}] \le \lambda^{1+\varepsilon} + (c\lambda)^{1+\varepsilon}\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{X_n}{X_{T_\lambda}}\Big)^{1+\varepsilon} \mathbb{1}_{T_\lambda \le n}\Big]$$
   (iii) En déduire que $\mathbb{E}[(X_n)^{1+\varepsilon}] \le \lambda^{1+\varepsilon} + (c\lambda)^{1+\varepsilon}\mathbb{P}[X_\infty^* > \lambda]\mathbb{E}[(X_n)^{1+\varepsilon}]$.
   (iv) Montrer que sous l'hypothèse $\mathbb{E}[X_\infty^*] < +\infty$, on peut trouver λ et ε tels que $(c\lambda)^{1+\varepsilon}\mathbb{P}[X_\infty^* > \lambda] < 1$. Conclure en justifiant que les moments à chaque temps fini sont finis.

Exercice 5 (TLC martingale avec variance limite aléatoire)**.** Soit $(M_n)_{n\ge0}$ une martingale réelle de carré intégrable pour une filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\ge0}$, telle que $M_0 = 0$. Soit $(a_n)_{n\ge1}$ une suite déterministe strictement positive tendant vers $+\infty$. On note sans surprise $\Delta_k := M_k - M_{k-1}$, $v_k := \mathbb{E}(\Delta_k^2 \mid \mathscr{F}_{k-1})$, $\langle M\rangle_n := \sum_{k=1}^n v_k$. On suppose que :

(i) $V_n := \frac{\langle M\rangle_n}{a_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} V$, où V est une variable aléatoire positive, finie et $\mathscr{F}_0$-mesurable ;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, $L_n(\varepsilon) := \frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\big(\Delta_k^2 \mathbf{1}_{\{|\Delta_k| > \varepsilon a_n\}} \mid \mathscr{F}_{k-1}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ (condition de Lindeberg).

Dans les questions suivantes, $t \in \mathbb{R}$ est fixé.

1. Montrer que la suite $(V_n)_{n\ge1}$ est tendue et que $\max_{1\le k\le n} \frac{v_k}{a_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.
2. On admet qu'il existe une constante C telle que $|e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}| \le Cx^2 \min\{|x|, 1\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En posant $\rho_{n,k}(t) := \mathbb{E}\big(e^{it\Delta_k/a_n} \mid \mathscr{F}_{k-1}\big) - 1 + \frac{t^2 v_k}{2a_n^2}$, en déduire que $R_n(t) := \sum_{k=1}^n |\rho_{n,k}(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.
3. Montrer que $\frac{1}{a_n^4}\sum_{k=1}^n v_k^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.
4. Posons $\phi_{n,k}(t) := \mathbb{E}\big(e^{it\Delta_k/a_n} \mid \mathscr{F}_{k-1}\big)$ et $P_{n,j}(t) := \prod_{k=1}^j \phi_{n,k}(t)$, $P_{n,0}(t) := 1$.
Montrer que $|\phi_{n,k}(t)| \le 1$ et que $|P_{n,n}(t) - \exp\big(-\frac{t^2}{2}V_n\big)| \le R_n(t) + \frac{t^4}{8a_n^4}\sum_{k=1}^n v_k^2$.
En déduire que $P_{n,n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} q(t) := \exp(-t^2 V/2)$.
5. Fixons un seuil de troncature $K > 0$, et posons $I_{n,k}^{(K)} := \mathbf{1}_{\{V\le K\}}\mathbf{1}_{\{|P_{n,k}(t)| \ge q(t)/2\}}$.
Vérifier que $I_{n,k}^{(K)}$ est $\mathscr{F}_{k-1}$-mesurable. Soit ensuite $Z_{n,j}^{(K)} := \prod_{k=1}^j \big[1 + I_{n,k}^{(K)}\big(\frac{e^{it\Delta_k/a_n}}{\phi_{n,k}(t)} - 1\big)\big]$, la fraction n'étant considérée que sur $\{I_{n,k}^{(K)} = 1\}$. Montrer que $(Z_{n,j}^{(K)})_{0\le j\le n}$ est une martingale pour $(\mathscr{F}_j)_{0\le j\le n}$ et que $|Z_{n,j}^{(K)}| \le 2e^{t^2K/2}$, $0 \le j \le n$.
6. Soit $A_n(t) := \{|P_{n,n}(t) - q(t)| < q(t)/2\}$.
Montrer que, sur $\{V \le K\} \cap A_n(t)$, on a $I_{n,k}^{(K)} = 1$ pour tout k et $e^{itM_n/a_n} = Z_{n,n}^{(K)} P_{n,n}(t)$.
En déduire que $\mathbb{E}\big(Y\mathbf{1}_{\{V\le K\}}e^{itM_n/a_n}\big) \to \mathbb{E}\big(Y\mathbf{1}_{\{V\le K\}}e^{-t^2V/2}\big)$ pour toute v.a. Y bornée et $\mathscr{F}_0$-mesurable.
7. En faisant $K \to \infty$, montrer que $\mathbb{E}\big(Ye^{itM_n/a_n}\big) \to \mathbb{E}\big(Ye^{-t^2V/2}\big)$ pour toute v.a. Y bornée et $\mathscr{F}_0$-mesurable.
8. En déduire que $(M_n/a_n, V_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} (\sqrt{V}\,Z, V)$, où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ est indépendante de V.
9. En déduire que, si $V > 0$ p.s., alors $\frac{M_n}{\sqrt{\langle M\rangle_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$, avec une convention arbitraire sur $\{V_n = 0\}$.

– oOo –

Éléments de solution de l'exercice 1.

1. Le vecteur $(S_1,\dots,S_n)$ est l'image linéaire du vecteur gaussien $(\xi_1,\dots,\xi_n)$; il est donc gaussien et centré. De plus,
$$\mathrm{Cov}(S_k,S_\ell)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell}\mathbb{E}(\xi_i\xi_j)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell}\mathbf{1}_{\{i=j\}}=\min(k,\ell).$$
2. Le couple (S_k,S_n) est gaussien centré, avec $\mathrm{Var}(S_k)=k$, $\mathrm{Var}(S_n)=n$ et $\mathrm{Cov}(S_k,S_n)=k$. Par conséquent,
$$\mathrm{Loi}(S_k\mid S_n=x)=\mathcal{N}\left(\frac{k}{n}x,\,k-\frac{k^2}{n}\right).$$
La formule vaut aussi aux extrémités, avec la convention naturelle pour une variance nulle. Elle définit une version de la loi conditionnelle pour tout $x\in\mathbb{R}$.
3. Le vecteur $(B_0,\dots,B_n,S_n)$ est gaussien centré. Pour tout k,
$$\mathrm{Cov}(B_k,S_n)=\mathrm{Cov}(S_k,S_n)-\frac{k}{n}\mathrm{Var}(S_n)=k-k=0.$$
L'absence de corrélation entre deux sous-vecteurs d'un vecteur gaussien entraîne leur indépendance. Enfin, $\mathrm{Cov}(B_k,B_\ell)=\min(k,\ell)-\frac{k\ell}{n}$ pour $k,\ell\le n$.
4. On a identiquement $S_k=B_k+(k/n)S_n$. Comme le vecteur $B=(B_0,\dots,B_n)$ est indépendant de S_n, sa loi conditionnelle sachant $S_n=x$ reste sa loi non conditionnelle. Il en résulte
$$\mathrm{Loi}\big((S_k)_{0\le k\le n}\mid S_n=x\big)=\mathrm{Loi}\left(\left(B_k+\frac{k}{n}x\right)_{0\le k\le n}\right).$$
Cette trajectoire aléatoire part de 0 et est contrainte à atteindre x au temps n : elle forme donc un pont entre ces deux valeurs.

Éléments de solution de l'exercice 2.

1. Le temps d'arrêt $T_a\wedge n$ est borné. Par le théorème d'arrêt de Doob, $\mathbb{E}(Z_{T_a\wedge n})=\mathbb{E}(Z_0)=1$. Comme $Z_{T_a\wedge n}\ge a\mathbf{1}_{\{T_a\le n\}}$, on obtient $\mathbb{P}(T_a\le n)\le 1/a$. En faisant tendre n vers l'infini, il vient $\mathbb{P}(T_a<\infty)\le 1/a$, soit la borne demandée.
2. La martingale (Z_n) est positive ; elle converge donc presque sûrement vers une limite finie. Ses valeurs étant entières, elle est presque sûrement stationnaire à partir d'un certain rang. Pour tous $N\ge 0$, $k\ge 1$ et $r\ge 1$, la propriété de branchement donne $\mathbb{P}(Z_N=Z_{N+1}=\cdots=Z_{N+r}=k)\le(1-2^{-k})^r$. En effet, à chaque génération où la population vaut k, elle a une probabilité 2^{-k} de s'éteindre dès la génération suivante. En faisant tendre r vers l'infini, puis en prenant la réunion dénombrable sur N et $k\ge 1$, on voit que la population ne peut rester stationnaire à une valeur strictement positive. Elle atteint donc presque sûrement 0, qui est absorbant.

Éléments de solution de l'exercice 3.

1. La densité de Z est $p(z)=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp(-\frac{\|z\|^2}{2\sigma^2})$. Pour $O\in\mathbb{O}_n$, le changement de variables $z=O^\top y$ a un jacobien de valeur absolue 1 et préserve la norme. La densité de OZ est donc p, ce qui prouve l'invariance. La factorisation en coordonnées sphériques montre directement que $Z/\|Z\|\sim\sigma_{n-1}$ est indépendant de $\|Z\|$, et $\|Z\|^2/\sigma^2\sim\chi^2(n)$ par définition. En particulier, pour $n=1$, le signe est uniforme sur $\{-1,1\}$ et indépendant de la valeur absolue. Si $\sigma=0$, alors $Z\sim\delta_0$, toujours invariante, mais la direction n'est pas définie.
2. Une isométrie orthogonale préserve la mesure de surface, donc sa normalisation. Pour $n=1$, elle permute les deux points de la sphère $\mathbb{S}^0=\{-1,1\}$. L'action est transitive car pour tous u,v unitaires, on peut compléter u et v en bases orthonormées, l'application envoyant la première base sur la seconde appartient à $\mathbb{O}_n$ et envoie u sur v.
3. L'invariance donne $\varphi_X(O^\top t)=\varphi_X(t)$, et la transitivité implique $\varphi_X(t)=h(\|t\|)$, où $h(r)=\varphi_X(re_1)$. Par indépendance, en conditionnant par U, ou en utilisant le théorème de Fubini–Tonelli, on obtient
$$\mathbb{E}(e^{ir\langle U,X\rangle})=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi_X(ru)\,\mathrm{d}\sigma_{n-1}(u)=h(r).$$
D'autre part, en conditionnant par $X=x$, et en utilisant la transitivité, l'invariance de U, et $\|x\|=1$, il vient que
$$\mathbb{E}(e^{ir\langle U,x\rangle})=\mathbb{E}(e^{ir\langle U,e_1\rangle})=\varphi_U(re_1).$$
Ainsi $h(r)=\varphi_U(re_1)$. La fonction caractéristique de U étant elle aussi radiale, il vient que $\varphi_X=\varphi_U$ sur $\mathbb{R}^n$.

4. (a) Conditionnellement à $X = x$, nous avons $Y_\varepsilon \sim \mathcal{N}(x, \varepsilon^2 I_n)$. En moyennant la densité conditionnelle, la densité de Y_ε est
$$p_\varepsilon(y) = (2\pi\varepsilon^2)^{-n/2}\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{\|y-X\|^2}{2\varepsilon^2}\right)\right).$$
Pour $O \in \mathbb{O}_n$, $\|Oy - X\| = \|y - O^\top X\|$. L'invariance de X entraîne $p_\varepsilon(Oy) = p_\varepsilon(y)$, d'où $p_\varepsilon(y) = g_\varepsilon(\|y\|)$.
   (b) Notons $|\mathbb{S}^{n-1}|$ l'aire de la sphère (égale à 2 pour $n = 1$). Comme Y_ε possède une densité, $\mathbb{P}(Y_\varepsilon = 0) = 0$. Pour toutes fonctions boréliennes bornées f et k, les coordonnées sphériques/polaires donnent
$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{Y_\varepsilon}{\|Y_\varepsilon\|}\right)k(\|Y_\varepsilon\|)\right) = \left(\int f(u)\mathrm{d}\sigma_{n-1}(u)\right)\left(|\mathbb{S}^{n-1}|\int_0^\infty k(r)g_\varepsilon(r)r^{n-1}\mathrm{d}r\right).$$
Le second facteur avec $k = 1$ vaut 1. Cette factorisation prouve simultanément uniformité et indépendance.
   (c) Nous avons $Y_\varepsilon \to X$ p.s., et $\|X\| = 1$. Par continuité de la normalisation au voisinage de X, $Y_\varepsilon/\|Y_\varepsilon\| \to X$ p.s. Pour toute fonction $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ continue, par convergence dominée, il vient que $\mathbb{E}(f(X)) = \int f \mathrm{d}\sigma_{n-1}$.
5. Pour $n \geq 2$, SO_n agit transitivement sur la sphère : si une application orthogonale envoyant u sur v a déterminant -1, on la compose avec une réflexion fixant v, possible puisque $v^\perp$ est de dimension au moins 1. La preuve par Fourier fonctionne donc avec la seule invariance par SO_n. Pour $n = 1$, $SO_1 = \{1\}$ et $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$: toute loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$ est invariante par les rotations. L'invariance par $\mathbb{O}_1 = \{-1, 1\}$ impose en revanche $p = 1/2$.

Éléments de solution de l'exercice 4. Fait écho à l'exercice 5 du partiel 2025–2026.

1. Pour $x \geq 0$, $x\log^+ x = \int_1^\infty x\mathbf{1}_{\{x>\lambda\}}\,\mathrm{d}\lambda/\lambda$, l'identité découle du théorème de Fubini–Tonelli positif.
2. L'inégalité maximale de Doob donne $\lambda\mathbb{P}(X_n^* > \lambda) \leq \mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{\{X_n^*>\lambda\}}]$. Comme $X_n^* \geq X_0 = 1$, en intégrant sur $[1,\infty)$ et en utilisant le théorème de Fubini–Tonelli, on obtient
$$\mathbb{E}[X_n^*] = 1 + \int_1^\infty \mathbb{P}(X_n^* > \lambda)\,\mathrm{d}\lambda \leq 1 + \mathbb{E}[X_n\log^+ X_n^*].$$
3. Si $y \leq 1$, l'inégalité indiquée est immédiate. Si $y > 1$, $x\log y - x\log^+ x \leq x\log(y/x) \leq y/\mathrm{e}$, car $u\log(1/u) \leq 1/\mathrm{e}$ pour $u > 0$. Elle reste vraie pour $x = 0$ par la convention de l'énoncé. Ainsi
$$\mathbb{E}[X_n^*] \leq 1 + \mathbb{E}[X_n\log^+ X_n] + \frac{1}{\mathrm{e}}\mathbb{E}[X_n^*].$$
On peut soustraire le dernier terme car $X_n^* \leq \sum_{k=0}^n X_k$ et $\mathbb{E}[X_n^*] \leq n+1 < \infty$, d'où la constante $\mathrm{e}/(\mathrm{e}-1)$ demandée.
4. Le théorème d'arrêt au temps borné $T_\lambda \wedge n$ donne
$$1 = \mathbb{E}[X_{T_\lambda}\mathbf{1}_{\{T_\lambda\leq n\}}] + \mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{\{T_\lambda>n\}}].$$
En comparant avec $\mathbb{E}[X_n] = 1$, on obtient l'égalité annoncée. Sur $\{T_\lambda \leq n\}$, $T_\lambda \geq 1$ et $\lambda < X_{T_\lambda} \leq cX_{T_\lambda-1} \leq c\lambda$.
5. Comme $\{X_n > \lambda\} \subseteq \{T_\lambda \leq n\}$,
$$\mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{\{X_n>\lambda\}}] \leq \mathbb{E}[X_{T_\lambda}\mathbf{1}_{\{T_\lambda\leq n\}}] \leq c\lambda\mathbb{P}(X_n^* > \lambda).$$
La question 1 donne alors $\mathbb{E}[X_n\log^+ X_n] \leq c\int_1^\infty \mathbb{P}(X_n^* > \lambda)\,\mathrm{d}\lambda = c(\mathbb{E}[X_n^*] - 1) \leq c\mathbb{E}[X_n^*]$.
6. (i) Par l'inégalité de Jensen conditionnelle, $(f(X_j))_j$ est une sous-martingale : $\mathbb{E}[f(X_{n-k})] \leq \mathbb{E}[f(X_n)]$, $0 \leq k \leq n$. Ces espérances sont finies : $0 \leq X_j \leq c^j$, et une fonction convexe finie sur $\mathbb{R}_+$ est bornée sur chaque intervalle compact. En décomposant selon $\{T = k\} \in \mathscr{F}_k$ et en utilisant l'hypothèse avec $l = n-k$, on obtient
$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_n}{X_T}\right)\mathbf{1}_{\{T\leq n\}}\right] \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T = k)\mathbb{E}[f(X_{n-k})] \leq \mathbb{P}(T \leq n)\mathbb{E}[f(X_n)].$$
Les espérances de gauche sont également bien définies : sur $\{T = k\}$, le quotient appartient à $[0, c^{n-k}]$.
   (ii) On a $X_n \leq \lambda$ sur $\{T_\lambda > n\}$ et $X_{T_\lambda} \leq c\lambda$ sur sur $\{T_\lambda \leq n\}$, d'où le résultat en décomposant.
   (iii) Appliquer (i) avec $f(x) = x^{1+\varepsilon}$ et $T = T_\lambda$, puis utiliser $\mathbb{P}(T_\lambda \leq n) \leq \mathbb{P}(X_\infty^* > \lambda)$.

(iv) Posons $W = X_\infty^*$. Si $\mathbb{E}[W] < \infty$,

$$\lambda \mathbb{P}(W > \lambda) \le \mathbb{E}[W \mathbf{1}_{\{W>\lambda\}}] \longrightarrow 0.$$

Choisissons $\lambda > 1$ tel que $c\lambda\mathbb{P}(W > \lambda) < 1$, puis $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\alpha = (c\lambda)^{1+\varepsilon}\mathbb{P}(W > \lambda) < 1$. Puisque $X_n \le c^n$, chaque moment d'ordre $1+\varepsilon$ est fini. On peut donc réarranger l'inégalité de (iii) :

$$\sup_{n\ge 0} \mathbb{E}[X_n^{1+\varepsilon}] \le \frac{\lambda^{1+\varepsilon}}{1-\alpha} < \infty.$$

Éléments de solution de l'exercice 5.

1. La convergence en probabilité de V_n vers la variable aléatoire finie V implique que la suite $(V_n)_{n\ge1}$ est tendue. Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{v_k}{a_n^2} \le \varepsilon^2 + \mathbb{E}\Big(\frac{\Delta_k^2}{a_n^2}\mathbf{1}_{\{|\Delta_k|>\varepsilon a_n\}} \mid \mathscr{F}_{k-1}\Big).$$

Par conséquent,

$$\max_{1\le k\le n} \frac{v_k}{a_n^2} \le \varepsilon^2 + L_n(\varepsilon).$$

Étant donné $\eta > 0$, on choisit ε de sorte que $\varepsilon^2 < \eta/2$, puis on utilise l'hypothèse de Lindeberg :

$$\mathbb{P}\left(\max_{k\le n} \frac{v_k}{a_n^2} > \eta\right) \le \mathbb{P}\left(L_n(\varepsilon) > \eta/2\right) \longrightarrow 0.$$

2. Pour $|x| \le 1$, la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\left|e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}\right| \le \frac{|x|^3}{6}.$$

Pour $|x| > 1$, une majoration directe donne une borne de la forme Cx^2. Les deux estimations fournissent l'inégalité annoncée. Comme $\mathbb{E}(\Delta_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) = 0$, on obtient

$$|\rho_{n,k}(t)| \le C\mathbb{E}\left(t^2\frac{\Delta_k^2}{a_n^2}\min\{|t\Delta_k/a_n|, 1\} \mid \mathscr{F}_{k-1}\right).$$

En séparant les événements $\{|\Delta_k| \le \varepsilon a_n\}$ et $\{|\Delta_k| > \varepsilon a_n\}$, il vient, pour une constante C_t ne dépendant que de t,

$$R_n(t) \le C_t\big(\varepsilon V_n + L_n(\varepsilon)\big).$$

Soit $\eta > 0$. La tension de (V_n) permet de choisir A grand de sorte que $\sup_n \mathbb{P}(V_n > A)$ soit arbitrairement petite (quitte à traiter un nombre fini de termes séparément). On choisit ensuite ε tel que $C_t\varepsilon A < \eta/2$, puis on applique la condition de Lindeberg à ce ε. On en déduit $R_n(t) \to 0$ en probabilité.

3. On a

$$\frac{1}{a_n^4}\sum_{k=1}^n v_k^2 \le \left(\max_{1\le k\le n}\frac{v_k}{a_n^2}\right) V_n.$$

Le premier facteur converge vers 0 en $\mathbb{P}$ et le second est tendu. Leur produit converge donc vers 0 en $\mathbb{P}$.

4. L'inégalité $|\phi_{n,k}(t)| \le 1$ résulte de l'inégalité de Jensen conditionnelle. Posons $b_{n,k} := t^2 v_k/(2a_n^2)$. Alors

$$\phi_{n,k}(t) = 1 - b_{n,k} + \rho_{n,k}(t).$$

Pour $a \ge 0$, $0 \le e^{-a} - 1 + a \le \frac{a^2}{2}$. Une décomposition télescopique des deux produits, combinée aux inégalités $|\phi_{n,k}(t)| \le 1$ et $e^{-b_{n,k}} \le 1$, donne

$$\left|\prod_{k=1}^n \phi_{n,k}(t) - \prod_{k=1}^n e^{-b_{n,k}}\right| \le \sum_{k=1}^n |\phi_{n,k}(t) - e^{-b_{n,k}}| \le R_n(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n b_{n,k}^2 = R_n(t) + \frac{t^4}{8a_n^4}\sum_{k=1}^n v_k^2.$$

Les questions précédentes montrent donc que

$$P_{n,n}(t) - e^{-t^2V_n/2} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Comme $V_n \to V$ en probabilité, la continuité de $x \mapsto e^{-t^2x/2}$ donne $P_{n,n}(t) \to q(t)$ en probabilité. Notons aussi que $|P_{n,n}(t) - q(t)| \le 2$; cette convergence a donc également lieu dans L^1.

5. La variable $q(t)$ est $\mathscr{F}_0$-mesurable. De plus, $P_{n,k}(t)$ est $\mathscr{F}_{k-1}$-mesurable. Ainsi $I_{n,k}^{(K)}$ est bien $\mathscr{F}_{k-1}$-mesurable. Sur l'événement où $I_{n,k}^{(K)} = 1$, on a $P_{n,k}(t) \neq 0$, donc $\phi_{n,k}(t) \neq 0$.
Conditionnellement à $\mathscr{F}_{k-1}$,
$$\mathbb{E}\left[1 + I_{n,k}^{(K)}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_k/a_n}}{\phi_{n,k}(t)} - 1\right)\middle|\mathscr{F}_{k-1}\right] = 1.$$
Nous justifions ci-dessous l'intégrabilité du produit par une borne déterministe ; cette identité conditionnelle établira alors qu'il définit une martingale issue de 1.
Comme $|\phi_{n,k}(t)| \leq 1$, la suite $j \mapsto |P_{n,j}(t)|$ est décroissante. Sur $\{V \leq K\}$, les indices pour lesquels $I_{n,k}^{(K)} = 1$ forment donc un segment initial $\{1, \dots, r\}$. Pour tout j,
$$|Z_{n,j}^{(K)}| = \frac{1}{|P_{n,r\wedge j}(t)|} \leq \frac{2}{q(t)} \leq 2\mathrm{e}^{t^2K/2}.$$
Sur $\{V > K\}$, tous les indicateurs sont nuls et $Z_{n,j}^{(K)} = 1$. La borne annoncée est donc valable partout.
6. Sur $\{V \leq K\} \cap A_n(t)$, $|P_{n,n}(t)| > q(t)/2$. La décroissance de $|P_{n,j}(t)|$ implique alors $|P_{n,k}(t)| \geq q(t)/2$ pour tout k ; tous les indicateurs valent donc 1, et
$$Z_{n,n}^{(K)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_k/a_n}}{\phi_{n,k}(t)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tM_n/a_n}}{P_{n,n}(t)}.$$
Posons $H := Y\mathbf{1}_{\{V\leq K\}}q(t)$. Cette variable est bornée et $\mathscr{F}_0$-mesurable. La propriété de martingale donne
$$\mathbb{E}\big(HZ_{n,n}^{(K)}\big) = \mathbb{E}(H).$$
Sur $\{V \leq K\}$, la borne $|Z_{n,n}^{(K)}| \leq 2/q(t)$ implique $|Z_{n,n}^{(K)}q(t)| \leq 2$. Par suite,
$$\left|\mathbb{E}\big(Y\mathbf{1}_{\{V\leq K\}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tM_n/a_n}\big) - \mathbb{E}\big(Y\mathbf{1}_{\{V\leq K\}}q(t)\big)\right| \leq \|Y\|_\infty\Big(2\mathrm{e}^{t^2K/2}\,\mathbb{E}|P_{n,n}(t) - q(t)| + 3\,\mathbb{P}(A_n(t)^c \cap \{V \leq K\})\Big).$$
Le premier terme tend vers 0. Sur $\{V \leq K\}$, $q(t) \geq \mathrm{e}^{-t^2K/2}$, donc
$$\mathbb{P}(A_n(t)^c \cap \{V \leq K\}) \leq \mathbb{P}\left(|P_{n,n}(t) - q(t)| \geq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2K/2}\right) \longrightarrow 0.$$
Cela prouve la convergence demandée.
7. Les variables $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tM_n/a_n}$ et $q(t)$ sont de module au plus 1. Ainsi
$$\left|\mathbb{E}(Y\mathrm{e}^{\mathrm{i}tM_n/a_n}) - \mathbb{E}(Yq(t))\right| \leq \left|\mathbb{E}\big(Y\mathbf{1}_{\{V\leq K\}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tM_n/a_n}\big) - \mathbb{E}\big(Y\mathbf{1}_{\{V\leq K\}}q(t)\big)\right| + 2\|Y\|_\infty\mathbb{P}(V > K).$$
On fait d'abord tendre n vers l'infini, puis K vers l'infini. Comme V est finie presque sûrement, on obtient
$$\mathbb{E}(Y\mathrm{e}^{\mathrm{i}tM_n/a_n}) \longrightarrow \mathbb{E}(Y\mathrm{e}^{-t^2V/2}).$$
Il s'agit de la convergence stable de M_n/a_n vers le noyau gaussien $\mathscr{N}(0,V)$ relativement à $\mathscr{F}_0$.
8. Soient $s, t \in \mathbb{R}$. Comme $V_n \to V$ en probabilité, $\mathbb{E}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}sV_n} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}sV}| \longrightarrow 0$. En appliquant la question précédente à la variable bornée et $\mathscr{F}_0$-mesurable $Y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}sV}$, il vient
$$\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tM_n/a_n + \mathrm{i}sV_n}\big) = \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tM_n/a_n + \mathrm{i}sV}\big) + o(1) \longrightarrow \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}sV - t^2V/2}\big).$$
Si $Z \sim \mathscr{N}(0,1)$ est indépendante de V, alors, en conditionnant par rapport à V,
$$\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{V}Z + \mathrm{i}sV}\big) = \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}sV - t^2V/2}\big).$$
Le théorème de continuité de Lévy, en dimension deux, donne donc $(M_n/a_n, V_n) \xrightarrow{\text{loi}} (\sqrt{V}Z, V)$.
9. La fonction $(x,v) \mapsto x/\sqrt{v}$ est continue sur $\mathbb{R} \times (0,\infty)$. Si $V > 0$ presque sûrement, le théorème de l'application continue appliqué à la convergence jointe précédente donne
$$\frac{M_n}{\sqrt{\langle M\rangle_n}} = \frac{M_n/a_n}{\sqrt{V_n}} \xrightarrow{\text{loi}} \frac{\sqrt{V}Z}{\sqrt{V}} = Z \sim \mathscr{N}(0,1).$$
La valeur choisie sur $\{V_n = 0\}$ est sans effet sur la limite.