Partiel 2025/2026

Semaine du 3 novembre 2025, durée de 2 heures
Documents et internet non autorisés
Faites ce que vous pouvez, et ne vous en faites pas
Il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir une très bonne note !

Exercice 1 (Processus auto-régressif gaussien d'ordre 1)**.** Le processus AR(1) gaussien est la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$X_{n+1} = \theta X_n + \varepsilon_{n+1}$$

où θ est un réel fixé, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$, et $X_0 = \varepsilon_0$. C'est une marche aléatoire gaussienne quand $\theta = 1$.

1. (a) Montrer que $X_n \sim \mathcal{N}\big(0, 1+\theta^2+\cdots+\theta^{2n}\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce processus est-il borné dans L^2 ?
   (b) En déduire la convergence ou divergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en fonction de θ.
   (c) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas p.s. ni dans L^2. Converge-t-elle en probabilité ?
   (d) Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-il une martingale, sous-martingale, surmartingale pour $\mathscr{F}_n = \sigma(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n)$?
   (e) Déterminer la décomposition de Doob du processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) Montrer que $(\widetilde{X}_n = \sum_{k=0}^n \theta^k \varepsilon_k)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\widetilde{X}_n \overset{\text{loi}}{=} X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Est-ce que X et $\widetilde{X}$ sont de même loi ?
   (b) Montrer que $(\widetilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2 si et seulement si $|\theta| < 1$, et préciser la limite.
   (c) Montrer que $(\widetilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s. lorsque $|\theta| < 1$.
3. (a) Montrer que la loi conditionnelle $\mathrm{Loi}((X_0, X_2) \mid X_1 = x_1)$ est une loi produit, pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $(X_0,\dots,X_n) \sim \mathcal{N}(0, (T^\top T)^{-1})$ où T est $(n+1)\times(n+1)$ donnée par $T_{i,j} = \mathbb{1}_{i=j} - \theta\mathbb{1}_{j=i-1}$.
   (c) En déduire une généralisation de la question 3.a à (X_i, X_j) lorsque $|i-j| > 1$.

Exercice 2 (Isométrie d'Itô pour l'intégrale stochastique à temps discret)**.**
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable, et $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus prévisible borné. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites, alors on note $\Delta v_n = v_n - v_{n-1}$, $(u\cdot v)_n = \sum_{k=1}^n u_k \Delta v_k = \int_0^n u_k \mathrm{d}v_k$ si $n \geq 1$, et $\Delta v_0 = 0$, $(u\cdot v)_0 = 0$.

1. Montrer que $H\cdot M$ est une martingale de carré intégrable.
2. Montrer que $\langle H\cdot M\rangle = H^2\cdot\langle M\rangle$, autrement dit $(H\cdot M)^2 - H^2\cdot\langle M\rangle$ est une martingale, d'où, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}((H\cdot M)_n^2) = \mathbb{E}((H^2\cdot\langle M\rangle)_n), \quad \text{autrement dit} \quad \mathbb{E}\Big(\Big(\int_0^n H_k \mathrm{d}M_k\Big)^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^n H_k^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_k\Big).$$

3. En déduire que si $\mathbb{E}\sum_{k=1}^\infty H_k^2 \Delta\langle M\rangle_k < \infty$, autrement dit $\mathbb{E}\int_0^\infty H_k^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_k < \infty$, alors $(H\cdot M)_n \to (H\cdot M)_\infty$ dans L^2 et

$$\mathbb{E}((H\cdot M)_\infty^2) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^\infty H_k^2 \Delta\langle M\rangle_k\Big) \quad \text{autrement dit} \quad \mathbb{E}\Big(\Big(\int_0^\infty H_k \mathrm{d}M_k\Big)^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty H_k^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_k\Big).$$

Exercice 3 (Formules de Wald)**.** Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable et T un temps d'arrêt.

1. Montrer que $M^T = (M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale de carré intégrable.
2. Montrer que $\langle M^T\rangle = \langle M\rangle^T$.
3. Montrer que si $T < \infty$ p.s. et $\langle M\rangle_T \in L^1$ alors $M_T \in L^2$ et $M_{T\wedge n} \to M_T$ dans L^2. Indication : critère de Cauchy.
4. En déduire que si $T < \infty$ p.s. et $\langle M\rangle_T \in L^1$ alors

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0), \quad \mathbb{E}(M_T^2) = \mathbb{E}(M_0^2) + \mathbb{E}(\langle M\rangle_T), \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(M_T) = \mathrm{Var}(M_0) + \mathbb{E}(\langle M\rangle_T).$$

5. Montrer qu'on peut avoir à la fois $M_T \in L^2$ et $\langle M\rangle_T \notin L^1$. Indication : marche aléatoire.

Exercice 4 (Une forme logarithmique de l'inégalité maximale de Doob)**.** Soit $(X_n)_n$ une sous-martingale positive et $X_n^* = \max_{k\le n} X_k$, pour tout n. On note $x^+ = \max(0,x) = x\mathbb{1}_{\{x\ge 0\}}$ et $\log^+(x) = (\log(x))^+$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X_n^* - 1) \le \int_0^\infty \mathbb{P}(X_n^* \ge 1 + x)\mathrm{d}x$ pour tout n
2. En déduire que $\mathbb{E}(X_n^* - 1) \le \mathbb{E}(X_n \log^+ X_n^*)$ pour tout n
3. En utilisant l'inégalité $a\log b \le a(\log a)^+ + b/\mathrm{e}$ pour $a>0$, $b>0$, montrer que pour tout n,

$$\mathbb{E}(X_n^*) \le \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}(1 + \mathbb{E}(X_n \log^+ X_n))$$

Exercice 5 (Une caractérisation d'une uniforme intégrabilité logarithmique)**.** Soit $(Z_n)_{n\ge1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. intégrables, et $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$. Avec les notations de l'exercice précédent, le but est d'établir que

$$Z_1 \log^+ |Z_1| \in L^1 \quad \text{si et seulement si} \quad \sup_{n\ge1} \frac{|Z_n|}{n} \in L^1.$$

1. (a) Pour tous $n \ge 1$ et $1 \le k \le n$, considérons

$$M_{n,k} = \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=1}^{n-k+1} Z_i \quad \text{et} \quad \mathscr{F}_{n,k} = \sigma(M_{n,k}, Z_i : i \ge n-k+2).$$

   Montrer que $\mathbb{E}(Z_i \mid M_{n,k}) = M_{n,k}$ pour tout $n \ge 1$, $1 \le k \le n$, $1 \le i \le n-k+1$.

   (b) Montrer que pour tout $n \ge 1$, $(\mathscr{F}_{n,k})_{1\le k\le n}$ est une filtration et $(M_{n,k})_{1\le k\le n}$ une martingale adaptée.

   (c) Montrer en utilisant le résultat de l'exercice précédent pour $(M_{n,k})_{1\le k\le n}$ que

$$Z_1 \log^+ |Z_1| \in L^1 \quad \Rightarrow \quad \sup_{n\ge1} \frac{|S_n|}{n} \in L^1 \quad \Rightarrow \quad \sup_{n\ge1} \frac{|Z_n|}{n} \in L^1.$$

2. (a) Montrer que $\mathbb{E}\Big(\sup_{n\ge1} \frac{|Z_n|}{n}\Big) \ge \int_0^\infty (1 - \mathrm{e}^{-p(x)})\mathrm{d}x$ où $p(x) = \sum_{n\ge1} \mathbb{P}(|Z_1| \ge nx)$.

   (b) Vérifier que $\lim_{x\to\infty} p(x) = 0$, puis, en utilisant l'inégalité $1 - \mathrm{e}^{-y} \ge y/2$ pour $y > 0$ assez petit, déduire que pour toute constante $C > 0$ assez grande, $\mathbb{E}\Big(\sup_{n\ge1} \frac{|Z_n|}{n}\Big) \ge \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big(\sum_{n\ge1} \mathbb{1}_{\{|Z_1|\ge nC\}}\Big(\frac{|Z_1|}{n} - C\Big)\Big)$.

   (c) En déduire la réciproque de la conclusion de la question 1(c) :

$$\sup_{n\ge1} \frac{|Z_n|}{n} \in L^1 \quad \Rightarrow \quad Z_1 \log^+ |Z_1| \in L^1.$$

– oOo –



Ceci est une martingale

Voici quelques remarques en rapport avec les copies :
— Si X et $\widetilde{X}$ sont des vecteurs aléatoires, l'égalité en loi des coordonnées, c'est-à-dire de X_i et $\widetilde{X}_i$ pour tout i, n'implique pas l'égalité en loi des vecteurs. Autrement dit, les lois marginales de dimension 1 ne caractérisent pas la loi en général. Un contrexemple frappant est donné par $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ et $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_1)$ (correspond à $\theta=0$).
— Pour montrer qu'une somme est dans L^2, il suffit de montrer que les éléments sommés sont chacun dans L^2.

Éléments de solution de l'exercice 1.

1. (a) Par récurrence sur n en utilisant la définition récursive de X et le caractère i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ de ε. Autrement dit $X_n=\sum_{k=0}^n\theta^{n-k}\varepsilon_k\sim\mathcal{N}(0,1+\theta^2+\cdots+\theta^{2n})$. Le processus X est borné dans L^2 si et seulement si $|\theta|<1$.
   (b) Les fonctions caractéristiques indiquent qu'une suite de v.a. gaussiennes converge en loi ssi les moyennes et les variances convergent. La moyenne de X_n vaut 0 et la variance $\sum_{k=0}^n\theta^{2k}=(1-|\theta|^{2(n+1)})/(1-|\theta|^2)$ si $|\theta|\neq1$, et $n+1$ si $|\theta|=1$, qui converge, lorsque $n\to\infty$, ssi $|\theta|<1$, avec pour limite $1/(1-|\theta|^2)$. Notons que lorsque $|\theta|\geq1$, la fonction caractéristique de X_n converge vers $\mathbb{1}_0$, qui n'est pas continue en 0.
   (c) Comme $\varepsilon_{n+1}=X_{n+1}-\theta X_n$, si X convergeait en probabilité vers X_∞, alors ε convergerait en probabilité vers $(1-\theta)X_\infty$, et comme elle est bornée dans $L^{2+\varepsilon}$, son carré est u.i. et convergerait alors dans L^2, ce qui est impossible car c'est une suite de v.a.r. i.i.d. centrées de variance non-nulle qui n'est donc pas de Cauchy dans L^2 : $\|\varepsilon_n-\varepsilon_m\|^2=\|\varepsilon_n\|^2-2\mathbb{E}(\varepsilon_n\varepsilon_m)+\|\varepsilon_m\|^2=2\sigma^2$. Il en découle que X ne peut pas converger p.s.
   (d) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ la v.a. X_n est mesurable pour $\mathcal{F}_n=\sigma(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n)$, et intégrable car somme finie de v.a. intégrable (ou car gaussienne). De plus $\mathbb{E}(X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=\theta X_n+\mathbb{E}(\varepsilon_{n+1})=\theta X_n$. Ainsi X est une martingale si $\theta=1$ (marche aléatoire). En revanche $\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n\mid\mathcal{F}_n)=(\theta-1)X_n$ est de signe aléatoire, donc X n'est pas forcément une surmartingale quand $\theta\leq1$ ni une sous-martingale quand $\theta\geq1$.
   (e) Le processus prévisible de la décomposition de Doob du processus adapté et intégrable X est donné par

$$A_n=\sum_{k=1}^n\mathbb{E}(X_k-X_{k-1}\mid\mathcal{F}_{k-1})=(\theta-1)\sum_{k=1}^nX_{k-1}=(\theta-1)\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{k-1}\theta^{k-1-j}\varepsilon_j=(\theta-1)\sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon_j(1+\theta+\cdots+\theta^{n-1-j}).$$

2. (a) Nous avons $X_n=\sum_{k=0}^n\theta^{n-k}\varepsilon_k=\sum_{k=0}^n\theta^k\varepsilon_{n-k}\overset{\text{loi}}{=}\sum_{k=0}^n\theta^k\varepsilon_k=\widetilde{X}_n$ car $(\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_n)\overset{\text{loi}}{=}(\varepsilon_n,\dots,\varepsilon_0)=\mathcal{N}(0,I_{n+1})$. Les suites X et $\widetilde{X}$ sont des vecteurs de dimension infinie de mêmes lois marginales de dimension 1, mais pas toujours de même lois marginales de dimension >1. Par exemple $(X_0,X_1)=(\varepsilon_0,\theta\varepsilon_0+\varepsilon_1)$ et $(\widetilde{X}_0,\widetilde{X}_1)=(\varepsilon_0,\varepsilon_0+\theta\varepsilon_1)$ ne sont pas de même loi car les lois conditionnelles diffèrent : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{Loi}(X_1\mid X_0=x)=\mathcal{N}(\theta x,1)$ mais $\mathrm{Loi}(\widetilde{X}_1\mid\widetilde{X}_0=x)=\mathcal{N}(x,\theta^2)$. Donc X et $\widetilde{X}$ ne sont pas de même loi[1].
   (b) Nous avons $\|\widetilde{X}_{n+m}-\widetilde{X}_n\|_2^2=\sum_{k=n+1}^{n+m}|\theta|^{2k}$ car $\mathbb{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j)=\mathbb{1}_{i=j}$, pour tous $m,n\in\mathbb{N}$. Donc $\widetilde{X}$ est de Cauchy dans L^2 si et seulement si $|\theta|<1$. Dans ce cas, elle converge dans L^2, vers $\widetilde{X}_\infty=\sum_{k=0}^\infty\theta^k\varepsilon_k$, et en particulier elle converge en probabilité vers cette v.a. de carré intégrable.
   Alternativement, si $|\theta|\geq1$ alors $\widetilde{X}$ n'est pas bornée dans L^2 donc divergente, tandis que si $|\theta|<1$ alors $\widetilde{X}$ est une martingale bornée dans L^2, donc converge dans L^2, et p.s. ce qui répond aussi à la question suivante.
   (c) La suite $(\widetilde{X}_{n+m}-\widetilde{X}_n)_{m\in\mathbb{N}}=(\sum_{k=n+1}^{n+m}\theta^k\varepsilon_k)_{m\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour $\mathcal{G}_m=\mathcal{F}_{n+m}=\sigma(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n+m})$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par l'inégalité maximale de Doob pour la sous-martingale positive $(|\widetilde{X}_{n+m}-\widetilde{X}_n|^2)_{m\in\mathbb{N}}$,

$$\mathbb{P}\Big(\max_{0\leq m\leq M}|\widetilde{X}_{n+m}-\widetilde{X}_n|\geq\varepsilon\Big)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{m=n+1}^{n+M}|\theta|^{2m},$$

   pour tous $\varepsilon>0$ et $M\geq0$. L'inégalité maximale de Kolmogorov aurait suffi. D'où, par convergence monotone,

$$\mathbb{P}\Big(\max_{m\geq0}|\widetilde{X}_{n+m}-\widetilde{X}_n|\geq\varepsilon\Big)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{m=n+1}^{\infty}|\theta|^{2m}=\frac{|\theta|^{2(n+1)}}{\varepsilon^2(1-|\theta|^2)}.$$

   Le lemme de Borel–Cantelli pour $A_n=\{\sup_{m\geq0}|\widetilde{X}_{n+m}-\widetilde{X}_n|\geq\varepsilon\}$ donne alors un événement p.s. A_ε sur lequel $|\widetilde{X}_{n+m}-\widetilde{X}_n|<\varepsilon$ pour n assez grand et pour tout $m\geq0$. Il en découle que sur l'événement p.s. $\cap_{r\in\mathbb{N}^*}A_{1/r}$, la suite réelle $\widetilde{X}$ est de Cauchy, donc converge. Il y a bien convergence p.s. de $\widetilde{X}$ quand $|\theta|<1$.

1. Rappelons que la loi d'une suite est donnée par la suite des lois marginales de toutes dimensions (Carathéodory–Kolmogorov).

Alternativement, il est possible d'éviter l'usage du lemme de Borel – Cantelli en utilisant l'inégalité maximale de Doob sous forme d'espérance de maximum, combinée au théorème de convergence monotone.

Il est enfin possible d'observer que lorsque $|\theta|<1$, $\widetilde{X}$ est une martingale bornée dans L^2, elle converge donc p.s. et dans L^2, en vertu d'un théorème du cours dont la preuve est semblable à ce qui précède !

3. (a) Sachant $X_1 = x$, la loi conditionnelle de (X_0, X_2) est le produit $\mathcal{N}\left(\frac{\theta x}{1+\theta^2}, \frac{1}{1+\theta^2}\right) \otimes \mathcal{N}(\theta x, 1)$, pour tout θ, y compris $\theta = 0$. C'est donc bien une loi produit.
   (b) Nous avons $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)^\top = T(X_0, \dots, X_n)^\top$ où T est la matrice triangulaire inférieure bidiagonale donnée par $T_{i,i} = 1$ et $T_{i,i-1} = -\theta$. Le résultat en découle car $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) \sim \mathcal{N}(0, I_{n+1})$.
   (c) L'inverse de la matrice de covariance du vecteur gaussien $(X_0, \dots, X_n)$ est la matrice tridiagonale $T^\top T$. Le théorème sur les lois conditionnelles gaussiennes entraîne alors que X_i et X_j sont conditionnellement indépendants sachant X_k, $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$, pour tout n et tous $1 \le i, j \le n$ tels que $|i-j| > 1$.

Éléments de solution de l'exercice 2.

1. Déjà vu en cours. Il est clair que $(H \cdot M)_n = \sum_{k=1}^n H_k(M_k - M_{k-1}) \in L^2$ car H_k bornée et $M_k \in L^2$, pour tout k. De plus $\mathbb{E}(\Delta(H \cdot M)_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = H_n \mathbb{E}(\Delta M_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0$ car H est prévisible borné et M martingale.
2. Par définition de l'intégrale stochastique et du processus croissant d'une martingale de carré intégrable,

$$\begin{aligned}
\Delta\langle H \cdot M\rangle_n &= \mathbb{E}((H \cdot M)_n^2 - (H \cdot M)_{n-1}^2 \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}(((H \cdot M)_n - (H \cdot M)_{n-1})^2 \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}(H_n^2 (\Delta M_n)^2 \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\
&= H_n^2 \mathbb{E}((\Delta M_n)^2 \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\
&= H_n^2 \mathbb{E}(\Delta(M^2)_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\
&= H_n^2 \Delta\langle M\rangle_n \\
&= \Delta(H^2 \cdot \langle M\rangle)_n.
\end{aligned}$$

3. Si $\mathbb{E}\sum_{k=1}^\infty H_k^2 \Delta\langle M\rangle_k < \infty$, alors par convergence monotone, $\mathbb{E}(H^2 \cdot \langle M\rangle_n) \to \mathbb{E}\sum_{k=1}^\infty H_k^2 \Delta\langle M\rangle_k$. Par conséquent, $(H \cdot M)_n$ est de Cauchy dans L^2 grâce à la formule de la question précédente, d'où sa convergence dans L^2, et en particulier $\mathbb{E}((H \cdot M)_n^2) \to \mathbb{E}((H \cdot M)_\infty^2)$.

Éléments de solution de l'exercice 3.

1. Le théorème d'arrêt de Doob indique que $M^T = (M_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. De plus, comme M est de carré intégrable, il vient que pour tout n, $M_{n\wedge T}^2 = \sum_{k=0}^n M_k^2 \mathbb{1}_{\{T=k\}} + M_n^2 \mathbb{1}_{\{T>n\}} \le \sum_{k=0}^n M_k^2 + M_n^2 \in L^1$, donc $M_{T\wedge n} \in L^2$, c.-à-d. que M^T est une martingale de carré intégrable. Alternativement, $M_{T\wedge n}^2 \le \max_{0\le k\le n} M_k^2 \le \sum_{k=0}^n M_k^2 \in L^1$. Alternativement, $M^T - M_0 = H \cdot M$ avec $H_n = \mathbb{1}_{n\le T}$, et on invoque l'exercice précédent !
2. Comme M est une martingale de carré intégrable, par définition, $\langle M\rangle$ est l'unique processus prévisible tel que $M^2 - M_0^2 - \langle M\rangle$ est une martingale. Par le théorème de Doob, $(M^2 - M_0^2 - \langle M\rangle)^T = (M_{n\wedge T}^2 - M_{0\wedge T}^2 - \langle M\rangle_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. Comme par la question précédente M^T est une martingale de carré intégrable et comme $\langle M\rangle^T = (\langle M\rangle_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est prévisible, il vient, par unicité du processus croissant, que $\langle M^T\rangle = \langle M\rangle^T$.
   Alternativement $M_T - M_0 = (H \cdot M)_\infty$ où $H_n = \mathbb{1}_{\{T\ge n\}}$ et on invoque l'exercice précédent et le fait que $H^2 = H$!
   Alternativement, comme $\mathbb{E}((M_{T\wedge k} - M_{T\wedge(k-1)})^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}) = \mathbb{1}_{\{T\ge k\}} \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2 \mid \mathscr{F}_{k-1})$, il vient que

$$\langle M^T\rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((\Delta M_k^T)^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{T\wedge n} \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}) = \langle M\rangle_{T\wedge n}.$$

3. Comme M^T est une martingale de carré intégrable et comme $\langle M^T\rangle = \langle M\rangle^T$, il vient, pour tous $0 \le m \le n$,

$$\mathbb{E}((M_{T\wedge n} - M_{T\wedge m})^2) = \mathbb{E}(M_{T\wedge n}^2 - M_{T\wedge m}^2) = \mathbb{E}(\langle M^T\rangle_n - \langle M^T\rangle_m) = \mathbb{E}(\langle M\rangle_{T\wedge n} - \langle M\rangle_{T\wedge m}).$$

   Ensuite, comme $0 \le \langle M\rangle_{T\wedge n} \nearrow \langle M\rangle_T$ p.s. et $\langle M\rangle_T \in L^1$, par convergence monotone $\mathbb{E}(\langle M\rangle_{T\wedge n}) \nearrow \mathbb{E}(\langle M\rangle_T) < \infty$, et donc $\mathbb{E}(\langle M\rangle_{T\wedge n} - \langle M\rangle_{T\wedge m}) \to 0$ quand $m, n \to \infty$. Donc M^T est de Cauchy dans L^2. Donc elle converge, dans L^2, et dans L^1. Or comme $M_{T\wedge n} \to M_T$ p.s., il vient $M_T \in L^2$ et $M_{T\wedge n} \to M_T$ dans L^2, et donc dans L^1 aussi.

Alternativement, comme $\langle M^T\rangle_\infty = \langle M\rangle_T \in L^1$, la martingale M^T est bornée dans L^2, et converge donc p.s. et dans L^2, vers $(M^T)_\infty = M_T$.

4. Comme M^T est une martingale, il vient $\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0)$ pour tout n, et comme $M_{T\wedge n} \to M_T$ dans L^1, il vient que $\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) \to \mathbb{E}(M_T)$, et donc $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$. D'autre part, $(M^T)^2 - M_0^2 - \langle M\rangle^T$ est une martingale intégrable qui converge dans L^1 vers $M_T^2 - M_0^2 - \langle M\rangle_T$. D'où $\mathbb{E}(M_T^2) = \mathbb{E}(M_0^2) + \mathbb{E}(\langle M\rangle_T)$ et $\mathrm{Var}(M_T) = \mathrm{Var}(M_0) + \mathbb{E}(\langle M\rangle_T)$.
5. Considérons la marche aléatoire $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $M_0 = 0$ et $M_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ avec $(Z_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. Soit $T = \inf\{n \geq 1 : M_n = 0\}$. Alors $T < \infty$ p.s. mais $\mathbb{E}(T) = \infty$. De plus $M_T = 0$. Enfin, comme $\langle M\rangle_n = n$, il vient que $\langle M\rangle_T = T \notin L^1$.

Éléments de solution de l'exercice 4.

1. On écrit
$$\mathbb{E}(X_n^* - 1) \leq \mathbb{E}((X_n^* - 1)^+) = \int_0^\infty \mathbb{P}((X_n^* - 1)^+ \geq x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_n^* \geq 1 + x)\mathrm{d}x.$$
2. La question précédente combinée avec l'inégalité maximale de Doob et le théorème de Fubini – Tonelli donne
$$\mathbb{E}(X_n^* - 1) \leq \int_0^\infty \frac{1}{1+x}\mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n^* \geq 1+x\}})\mathrm{d}x = \mathbb{E}\Big(X_n \int_1^{X_n^* \vee 1} \frac{\mathrm{d}y}{y}\Big) = \mathbb{E}(X_n \log(X_n^* \vee 1)) = \mathbb{E}(X_n \log^+ X_n^*).$$
3. En utilisant l'inégalité $a\log b \leq a\log^+(a) + b/\mathrm{e}$ on obtient
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n \log^+ X_n^*) &= \mathbb{E}(X_n \log X_n^* \mathbb{1}_{\{X_n^* \geq 1\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(X_n \log^+ X_n \mathbb{1}_{\{X_n^* \geq 1\}}) + \frac{1}{\mathrm{e}}\mathbb{E}(X_n^* \mathbb{1}_{\{X_n^* \geq 1\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(X_n \log^+ X_n) + \frac{1}{\mathrm{e}}\mathbb{E}(X_n^*).\end{aligned}$$
D'où, avec la question précédente, $\mathbb{E}(X_n^*) - 1 \leq \mathbb{E}(X_n \log^+ X_n) + \frac{1}{\mathrm{e}}\mathbb{E}(X_n^*)$, soit $\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}\mathbb{E}(X_n^*) \leq 1 + \mathbb{E}(X_n \log^+ X_n)$.

Éléments de solution de l'exercice 5.

1. (a) Comme les Z_i sont i.i.d. on obtient par symétrie que $\mathbb{E}(Z_i \mid M_{n,k}) = \mathbb{E}(Z_1 \mid M_{n,k})$ pour $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq i \leq n-k+1$, d'où
$$M_{n,k} = \mathbb{E}(M_{n,k} \mid M_{n,k}) = \frac{1}{n-k+1}\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathbb{E}(Z_i \mid M_{n,k}) = \frac{1}{n-k+1}\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathbb{E}(Z_1 \mid M_{n,k}) = \mathbb{E}(Z_1 \mid M_{n,k}).$$

   (b) Fixons $n \geq 1$. Il est immédiat que $(\mathscr{F}_{n,k})_{1\leq k\leq n}$ est une filtration. Pour montrer que $(M_{n,k})_{1\leq k\leq n}$ est une martingale pour cette filtration, on observe tout d'abord que $M_{n,k+1} = \frac{n-k+1}{n-k}M_{n,k} - \frac{Z_{n-k+1}}{n-k}$. Ensuite, comme $Z_1 \in L^1$, on obtient par récurrence que $M_{n,k} \in L^1$ pour tout $1 \leq k \leq n$, et que
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n,k+1} \mid \mathscr{F}_{n,k}) &= \mathbb{E}(\frac{n-k+1}{n-k}M_{n,k} - \frac{Z_{n-k+1}}{n-k} \mid M_{n,k}, Z_i : i \geq n-k+2) \\ &= \frac{n-k+1}{n-k}M_{n,k} - \frac{1}{n-k}\mathbb{E}(Z_{n-k+1} \mid M_{n,k}, Z_i : i \geq n-k+2) \\ &= \frac{n-k+1}{n-k}M_{n,k} - \frac{1}{n-k}\mathbb{E}(Z_{n-k+1} \mid M_{n,k})\end{aligned}$$
   car $(Z_i)_{i\geq n-k+2}$ et $(M_{n,k}, Z_{n-k+1})$ sont indépendantes. La question précédente donne alors
$$\mathbb{E}(M_{n,k+1} \mid \mathscr{F}_{n,k}) = \frac{n-k+1}{n-k}M_{n,k} - \frac{1}{n-k}M_{n,k} = M_{n,k}.$$

   (c) La forme logarithmique de l'inégalité maximale de Doob de l'exercice précédent appliquée à la sous-martingale positive $(|M_{n,k}|)_{1\leq k\leq n}$ donne
$$\mathbb{E}\Big(\sup_{1\leq k\leq n}|M_{n,k}|\Big) \leq \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}(1 + \mathbb{E}(|M_{n,n}|\log^+|M_{n,n}|) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}(1 + \mathbb{E}(|Z_1|\log^+|Z_1|)).$$

Comme $M_{n,k} = S_{n-k+1}/(n-k+1)$, cela se réécrit

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{1\le k\le n}\frac{|S_k|}{k}\Big) \le \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}(1+\mathbb{E}(|Z_1|\log^+|Z_1|))$$

qui donne, par convergence monotone,

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{n\ge 1}\frac{|S_n|}{n}\Big) \le \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}(1+\mathbb{E}(|Z_1|\log^+|Z_1|)).$$

Ceci prouve la première implication. Pour la seconde, on observe que $|Z_n| = |S_n - S_{n-1}| \le |S_n| + |S_{n-1}|$.

2. (a) On écrit tout d'abord

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{n\ge 1}\frac{|Z_n|}{n}\Big) = \int_0^\infty \mathbb{P}\Big(\sup_{n\ge 1}\frac{|Z_n|}{n}\ge x\Big)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \Big(1-\mathbb{P}\Big(\sup_{n\ge 1}\frac{|Z_n|}{n}< x\Big)\Big)\mathrm{d}x.$$

Ensuite, grâce au caractère i.i.d. des $(Z_n)_{n\ge1}$, il vient

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{n\ge 1}\frac{|Z_n|}{n}\Big) = \int_0^\infty \Big(1-\prod_{n\ge1}\mathbb{P}\Big(\frac{|Z_1|}{n}< x\Big)\Big)\mathrm{d}x.$$

Le résultat désiré s'obtient enfin en utilisant l'inégalité de convexité $1-p\le \mathrm{e}^{-p}$.

(b) Le théorème de Fubini–Tonelli donne $p(x) = \mathbb{E}\sum_{n\ge1}\mathbb{1}_{\{n\le|Z_1|/x\}} \le \mathbb{E}(|Z_1|/x) \to 0$ quand $x\to\infty$. On choisit alors une constante $C>0$ telle que pour tout $x\ge C$, l'inégalité $1-\mathrm{e}^{-p(x)}\ge p(x)/2$ est vérifiée. En réduisant l'intervalle d'intégration dans le résultat de question précédent, on obtient

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{n\ge 1}\frac{|Z_n|}{n}\Big) \ge \int_C^\infty (1-\mathrm{e}^{-p(x)})\mathrm{d}x \ge \frac12\int_C^\infty p(x)\mathrm{d}x,$$

ce qui donne le résultat désiré en utilisant la définition de $p(x)$.

(c) En développant le membre de droite de la dernière inégalité, on obtient

$$2\mathbb{E}\Big(\sup_{n\ge 1}\frac{|Z_n|}{n}\Big) \ge \mathbb{E}\Big(\sum_{n\ge1}\mathbb{1}_{\{\frac{|Z_1|}{n}\ge C\}}\int_C^{|Z_1|/n}\mathrm{d}x\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{\frac{|Z_1|}{C}\ge1\}}\sum_{1\le n\le\frac{|Z_1|}{C}}\Big(\frac{|Z_1|}{n}-C\Big)\Big).$$

Ensuite, en minorant la dernière somme par l'intégrale correspondante, on obtient

$$\begin{aligned}
2\mathbb{E}\Big(\sup_{n\ge 1}\frac{|Z_n|}{n}\Big) &\ge \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{\frac{|Z_1|}{C}\ge1\}}\int_1^{|Z_1|/C}\Big(\frac{|Z_1|}{x}-C\Big)\mathrm{d}x\Big)\\
&\ge C\mathbb{P}(|Z_1|\ge C) + \mathbb{E}\Big(|Z_1|(\log(|Z_1|/C)-1)\mathbb{1}_{\{\frac{|Z_1|}{C}\ge1\}}\Big)\\
&\ge -(1+\log(C))\mathbb{E}(|Z_1|) + \mathbb{E}(|Z_1|\log^+|Z_1|) - \mathbb{E}(|Z_1|\log|Z_1|\mathbb{1}_{\{1\le|Z_1|\le C\}}).
\end{aligned}$$

Le résultat désiré en découle.