Partiel 2024/2025

Vendredi 8 novembre 2024, 15h15 – 17h15 (2 heures)
Documents et internet non autorisés
Il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir 20/20

Exercice 1 (Phénomènes à queues lourdes dans la marche aléatoire simple)**.** Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, telle que $S_0 = 0$, et d'incréments i.i.d. de loi $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, soit $T_a := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = a\}$.

1. Pour tous $a < 0 < b$ dans $\mathbb{Z}$, rappeler la preuve de la formule $\mathbb{P}(S_{T_a\wedge T_b} = b) = \frac{-a}{b-a}$.
2. En déduire que pour tout $b > 0$, $T_b < \infty$ p.s.
3. En déduire que pour tout $b > 0$, $\mathbb{E}(\max_{0\leq n\leq T_b} |S_n|) = \infty$ et $\mathbb{E}(T_b) = \infty$.
4. Préciser la conséquence sur les queues de distribution $\mathbb{P}(\max_{0\leq n\leq T_b} |S_n| \geq r)$ et $\mathbb{P}(T_b \geq r)$ quand $r \to \infty$.

Exercice 2 (Processus de Galton – Watson surcritique avec immigration)**.** Soient $(X_{n,k})_{n\geq1,k\geq1}$ des v.a. i.i.d. intégrables de loi μ sur $\mathbb{N}$ de moyenne m et de variance $\sigma^2 \in [0,+\infty]$, et $(I_n)_{n\geq1}$ des v.a. i.i.d. intégrables de loi μ_+ sur $\mathbb{N}$ de moyenne m_+ et de variance $\sigma_+^2 \in [0,+\infty]$, indépendantes des précédentes. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $Z_0 := 1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_{n+1} := I_{n+1} + \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier quelques aspects du comportement asymptotique quand $n \to \infty$.

1. Montrer que si $m < 1$ alors $\mathbb{E}(Z_n) \to \frac{m_+}{1-m}$, si $m = 1$ alors $\mathbb{E}(Z_n) \sim nm_+$, et si $m > 1$ alors $\mathbb{E}(Z_n) \sim m^n\big(1 + \frac{m_+}{m-1}\big)$.
2. Supposons à présent que $m > 1$.
   (a) Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} := \big(\frac{Z_n}{m^n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s. vers une v.a. $Y_\infty \geq 0$;
   (b) Montrer que si $\sigma < \infty$ et $\sigma_+ < \infty$ alors la convergence a lieu dans L^2 et $\mathbb{E}(Y_\infty) = 1 + \frac{m_+}{m-1}$.

Exercice 3 (Loi forte des grands nombres pour les martingales de carré intégrable)**.**
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable, pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(\langle M\rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son processus croissant.
Rappel : $\langle M\rangle_0 = 0$, et pour tout $n \geq 1$, $\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((\Delta M)_k^2 \mid \mathscr{F}_{k-1})$ où $(\Delta M)_k := M_k - M_{k-1}$, $\langle M\rangle_\infty := \lim_{n\to\infty}\langle M\rangle_n$.
Rappel (lemme de Kronecker) : si $\sum_{n=1}^\infty u_n$ converge et $0 < w_n \nearrow \infty$ alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{w_n}\sum_{k=1}^n w_k u_k = 0$.

1. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $U_0 := 0$, et $U_n := \sum_{k=1}^n \frac{(\Delta M)_k}{1+\langle M\rangle_k}$, $n \geq 1$, est une martingale de carré intégrable.
2. Montrer que $\langle U\rangle_\infty \leq 1$. Indication : exprimer $\langle U\rangle_n$ avec $a_k := 1 + \langle M\rangle_k$.
3. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s. ;
4. En déduire que $\frac{M_n}{1+\langle M\rangle_n} \to 0$ p.s. sur $\{\langle M\rangle_\infty = \infty\}$.
5. En déduire la loi forte des grands nombres suivante : $\frac{M_n}{\langle M\rangle_n} \to 0$ p.s. sur $\{\langle M\rangle_\infty = \infty\}$.
6. Soient $(Z_n)_{n\geq1}$ des v.a. indépendantes, de moyennes $(m_n)_{n\geq1}$ et de variances $(\sigma_n^2)_{n\geq1}$ telles que $\sum_n \sigma_n^2 = \infty$. En déduire que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $M_0 := 0$ et $M_n := Z_1 - m_1 + \cdots + Z_n - m_n$ pour tout $n \geq 1$, vérifie

$$\frac{M_n}{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2} \to 0 \quad \text{p.s.}$$

   En particulier, si $(Z_n)_{n\geq1}$ est une suite de v.a. indépendantes, centrées, et réduites, alors $\frac{Z_1+\cdots+Z_n}{n} \to 0$ p.s.

Exercice 4 (Raffinement de l'étude de la convergence des martingales de carré intégrable)**.**
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable, pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(\langle M\rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son processus croissant.
Notation : $\{M_n \to\} = \{(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite dans $\mathbb{R}\}$.
Notation : si A et B sont des événements, $A \subset B$ p.s. signifie $\mathbb{P}(A\cap B^c) = 0$.

1. Pour tout $a > 0$, soit $T_a := \inf\{n \in \mathbb{N} : \langle M\rangle_{n+1} > a\}$.
   (a) Montrer que pour tout $a > 0$, T_a est un temps d'arrêt et $\langle M\rangle_{T_a} \le a$;
   (b) En déduire que pour tout $a > 0$, $(M_{T_a\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale de carré intégrable bornée dans L^2 ;
   (c) En déduire que $\{\langle M\rangle_\infty < \infty\} \subset \{M \to\}$ p.s. ;
2. Supposons que $C := \mathbb{E}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(\Delta M)_n^2) < \infty$. Pour tout $a > 0$, soit $S_a := \inf\{n \in \mathbb{N} : M_n^2 > a\}$.
   (a) Montrer que pour tout $a > 0$, $\mathbb{E}(|M_{S_a}^2 - M_{S_a-1}^2|\mathbb{1}_{\{1\le S_a<\infty\}}) < \infty$.
   (b) En déduire que pour tout $a > 0$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(\langle M\rangle_{S_a\wedge n}) < \infty$;
   (c) En déduire que pour tout $a > 0$, $\mathbb{E}(\langle M\rangle_{S_a}) < \infty$;
   (d) En déduire que pour tout $a > 0$, $\langle M\rangle_\infty < \infty$ sur $\{S_a = \infty\}$;
   (e) En déduire que $\{\langle M\rangle_\infty < \infty\} = \{M_n \to\}$ p.s.

Exercice 5 (Filtre de Kalman gaussien)**.** On modélise la position d'un mobile et son observation à distance par les processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement. En tenant compte des incertitudes, ils vérifient le système

$$\begin{cases} X_0 &= W_0 \\ X_n &= aX_{n-1} + W_n, \quad n \ge 1 \\ Y_n &= X_n + V_n, \quad n \ge 0 \end{cases},$$

où $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites indépendantes de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,\tau^2)$ et $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ respectivement, et $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $(X_0,\dots,X_n,Y_0,\dots,Y_n)$ est un vecteur gaussien ;
2. Montrer, indépendamment du modèle ci-dessus, que si $(X, Y_0,\dots,Y_{n-1})$ est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^{n+1}$ et une Y une variable aléatoire vérifiant $\mathrm{Loi}(X \mid Y_0,\dots,Y_{n-1}) = \mathcal{N}(\mu,\gamma^2)$ et $\mathrm{Loi}(Y \mid X, Y_0,\dots,Y_{n-1}) = \mathcal{N}(X,\delta^2)$, où μ peut dépendre de $Y_0,\dots,Y_{n-1}$ tandis que γ^2 et δ^2 sont constantes, alors

   $$\mathrm{Loi}(X \mid Y_0,\dots,Y_{n-1},Y) = \mathcal{N}\Big(\rho^2\Big(\frac{\mu}{\gamma^2}+\frac{Y}{\delta^2}\Big),\rho^2\Big) \quad \text{où} \quad \frac{1}{\rho^2} := \frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}.$$

   Indication : passer par les densités conditionnelles plutôt que par la matrice de covariance.
3. En déduire que la loi de la position X_n sachant les observations $Y_0,\dots,Y_n$ est donnée par la récurrence

   $$\mathrm{Loi}(X_n \mid Y_0,\dots,Y_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n,\alpha_n) \quad \text{où} \quad \hat{X}_n = a\hat{X}_{n-1} + \frac{\alpha_n}{\tau^2}(Y_n - a\hat{X}_{n-1}) \quad \text{et} \quad \alpha_n = \frac{a\tau^2\alpha_{n-1}+\sigma^2\tau^2}{a^2\alpha_{n-1}+\sigma^2+\tau^2}.$$

   Indication : $\mathrm{Loi}(X_0 \mid Y_0)$ (initialisation), $\mathrm{Loi}(X_n \mid Y_0,\dots,Y_{n-1})$ (prédiction), $\mathrm{Loi}(Y_n \mid Y_0,\dots,Y_{n-1},X_n)$ (filtrage).

– oOo –

Éléments de solution de l'exercice 1.

1. Le temps de sortie de $[a,b]$ s'écrit $T_{a,b} := T_a \wedge T_b$. Il est fini p.s. (réduction à un jeu de pile ou face). De plus, comme $S_0 \in [a,b]$, par définition de $T_{a,b}$, la marche aléatoire arrêtée $(S_{n\wedge T_{a,b}})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Le théorème d'arrêt de Doob donne $0 = \mathbb{E}(S_0) = \mathbb{E}(S_T) = a\mathbb{P}(S_T = a) + b\mathbb{P}(S_T = b)$, or $\mathbb{P}(S_T = a) + \mathbb{E}(S_T = b) = 1$, d'où la formule.
2. Nous avons $\{S_{T_a\wedge T_b} = b\} \subset \{T_b < \infty\}$, or par la question précédente, $\mathbb{P}(S_{T_a\wedge T_b} = b) = \frac{-a}{b-a} \to 1$ quand $a \to -\infty$.
3. Comme $T_b < \infty$ p.s., la suite $(S_{n\wedge T_b})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être u.i. car sinon le théorème d'arrêt de Doob donnerait $0 = \mathbb{E}(S_0) = \mathbb{E}(S_{T_b}) = b > 0$, en particulier la suite $(S_{n\wedge T_b})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être dominée par une v.a. intégrable, donc son enveloppe n'est pas intégrable. De même, comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a des incréments dans $\{\pm 1\}$, elle est à oscillations bornées, et donc T ne peut pas être intégrable, pour les mêmes raisons (théorème d'arrêt de Doob).
   Alternativement, et plus spécifiquement, sans les martingales, $\mathbb{P}(\max_{0\le n\le T_b} |S_n| \ge r) \ge \mathbb{P}(T_{-r} < T_b) = \mathbb{P}(S_{T_{-r}\wedge T_b} = -r) = \frac{b}{b+r}$ par la première question, qui n'est pas sommable en r, d'où $\mathbb{E}(\max_{0\le n\le T_b} |S_n|) = +\infty$. D'autre part, comme les incréments de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont ± 1, il vient que $\max_{0\le n\le T_b} |S_n| \le T_b$, d'où $\mathbb{E}(T_b) = +\infty$ également.
4. Pour une v.a. positive X, le théorème de Fubini – Tonelli donne
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\int_0^X \mathrm{d}r = \mathbb{E}\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X\ge r\}}\mathrm{d}r = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \ge r)\mathrm{d}r.$$
   Donc $\mathbb{E}(X) = \infty$ ssi $r \mapsto \mathbb{P}(X \ge r)$ n'est pas intégrable (c'est-à-dire ne tend pas assez vite vers 0 qd $r \to \infty$: queues lourdes). En particulier, pour tout $R > 0$, les v.a. $\max_{0\le n\le T_b} |S_n|$ et T dépassent le seuil R avec probabilité > 0.

Éléments de solution de l'exercice 2.

1. Le modèle, ses indépendances, et $\mathbb{E} = \mathbb{E}\mathbb{E}(\cdot \mid \mathscr{F}_n)$, donnent $\mathbb{E}(Z_n) = \Big(m^n + \frac{m^n-1}{m-1} m_+\Big)\mathbb{1}_{m\ne 1} + (1 + nm_+)\mathbb{1}_{m=1}$.
2. (a) Le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale :
$$\mathbb{E}(Y_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = Y_{n-1} + \frac{m_+}{m^n} \ge Y_{n-1}.$$
   Cette sous-martingale est positive, mais nous ne disposons que d'un théorème de convergence p.s. des surmartingales positives, et des sous-martingales bornées dans L^1. Montrons que Y est bornée dans L^1. Nous avons $\mathbb{E}(Y_0) = 1$ et, pour tout $n \ge 1$, $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{m_+}{m^n}$, d'où
$$\mathbb{E}(Y_n) = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{m_+}{m^k} = 1 + \frac{m_+}{1-m}\Big(1 - \frac{1}{m^{n+1}}\Big).$$
   Comme $m > 1$, il vient que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|Y_n|) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(Y_n) < \infty$. La sous-martingale $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien bornée dans L^1, elle converge donc p.s. vers une v.a. $Y_\infty \in L^1$.

   (b) Pour tout $n \ge 1$, l'indépendance et le conditionnement donnent les récurrences
$$\mathrm{Var}(Z_{n+1}) = m^2\mathrm{Var}(Z_n) + \sigma^2\mathbb{E}(Z_n) + \sigma_+^2$$
   et
$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{1}{m^{2n}}\mathbb{E}(Z_n^2) = \frac{1}{m^{2n}}\mathrm{Var}(Z_n) + \frac{1}{m^{2n}}\mathbb{E}(Z_n)^2.$$
   Or $m > 1$, d'où $\mathbb{E}(Z_n) \sim m^n$ et $\mathrm{Var}(Z_n) \sim m^{2n}$, donc $\ell := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n^2)$ dans $\mathbb{R}$. Donc $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (une sous-martingale positive) bornée dans L^2.
   Il est possible d'invoquer le théorème du cours de convergence p.s. et L^2 des sous-martingales positives bornées dans L^2. Mais la version sous-martingale positive est tout de même assez exotique.
   Alternativement, $(\sum_{k=0}^n \frac{m_+}{m^k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et $(Y_n - \sum_{k=0}^n \frac{m_+}{m^k})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale bornée dans L^2.
   Alternativement, il est possible d'établir que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^2 : pour tous $n, k \ge 1$,
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((Y_{n+k} - Y_n)^2) &= \mathbb{E}(Y_{n+k}^2) + \mathbb{E}(Y_n^2) - 2\mathbb{E}(Y_{n+k}Y_n)\\
&= \mathbb{E}(Y_{n+k}^2) + \mathbb{E}(Y_n^2) - 2\mathbb{E}(Y_n\mathbb{E}(Y_{n+k} \mid \mathscr{F}_n))\\
&= \mathbb{E}(Y_{n+k}^2) - \mathbb{E}(Y_n^2) - 2\Big(\frac{1}{m^{n+k}} + \cdots + \frac{1}{m^{n+1}}\Big)\mathbb{E}(Y_n)\\
&= \ell + o_{n\to\infty}(1) - \ell + o_{n\to\infty}(1) + o_{n\to\infty}(1),
\end{aligned}$$

donc $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^2 et converge donc dans L^2, vers sa limite p.s. Y_∞ par unicité de la limite en $\mathbb{P}$. En particulier $Y_n \to Y_\infty \in L^1$ dans L^1, et la formule obtenue précédemment pour $\mathbb{E}(Y_n)$ donne

$$\mathbb{E}(Y_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n) = 1 + \frac{m_+}{1-m}.$$

Alternativement, il est possible d'établir que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2 en utilisant l'inégalité maximale de Doob, comme dans la preuve du théorème de convergence des martingales bornées dans L^p, $p > 1$.

Éléments de solution de l'exercice 3.

1. Pour tout $n \geq 1$, $(\Delta M)_n$ est $\mathscr{F}_n$-mesurable et $\langle M\rangle_n$ est $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurable, donc U_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable. De plus $\frac{(\Delta M)_n^2}{(1+\langle M\rangle_n)^2} \leq (\Delta M)_n^2 \in L^1$, d'où $U_n \in L^2 \subset L^1$. Enfin $\mathbb{E}(U_n - U_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \frac{1}{1+\langle M\rangle_n}\mathbb{E}((\Delta M)_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0$. Rien de surprenant à cela car c'est en fait une transformée de martingale (intégrable stochastique discrète).
2. Par définition de $\langle U\rangle_n$ et de U,
$$\langle U\rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((\Delta U)_k^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}((\Delta M)_k^2 \mid \mathscr{F}_{k-1})}{(1+\langle M\rangle_k)^2} \quad \text{d'où} \quad \langle U\rangle_\infty = \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^2} \quad \text{où} \quad a_k := 1 + \langle M\rangle_k > 0.$$
Or
$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k a_{k-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_n} \leq 1.$$
Alternativement, comparaison série-intégrale avec $\sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^2} \leq \int_{a_0}^{a_n} \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{a_n} \leq 1$.
3. Comme U est une martingale de carré intégrable et $U_0 = 0$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(U_n^2) = \mathbb{E}(\langle U\rangle_\infty)$, et comme $\langle U\rangle_\infty \leq 1$ par la question précédente, il vient que U est bornée dans L^2 donc converge p.s. (et dans L^2 vers une v.a. L^2).
4. La question précédente assure que $U_n = \sum_{k=1}^n U_k - U_{k-1} = \sum_{k=1}^n u_k$ converge p.s. Le lemme de Kronecker appliqué p.s. à u_n et à $w_n = 1 + \langle M\rangle_n \nearrow \langle M\rangle_\infty$ donne $\frac{M_n}{1+\langle M\rangle_n} \to 0$ p.s. sur $\{\langle M\rangle_\infty = \infty\}$.
5. Sur $\{\langle M\rangle_\infty = \infty\}$, on a $\frac{\langle M\rangle_n}{1+\langle M\rangle_n} \to 1$ p.s. d'où $\frac{M_n}{\langle M\rangle_n} \to 0$ p.s. sur $\{\langle M\rangle_\infty = \infty\}$ par la question précédente.
6. La martingale M est de carré intégrable et pour tout $n \geq 1$, $\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$.

Éléments de solution de l'exercice 4.

1. (a) Découle du fait que $\langle M\rangle$ est prévisible et croissant : $\langle M\rangle_{n+1}$ est $\mathscr{F}_n$ mesurable, et $\geq \langle M\rangle_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
   (b) Par définition du processus croissant (décomposition de Doob de la sous-martingale M^2), le processus $X := M^2 - M_0^2 - \langle M\rangle$ est une martingale. Par le théorème d'arrêt de Doob, le processus arrêté $(X_{n\wedge T_a})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, issue de 0. La conservation de l'espérance et la question 1(a) donnent alors
   $$\mathbb{E}(M_{T_a\wedge n}^2) = \mathbb{E}(M_0^2) + \mathbb{E}(\langle M\rangle_{T_a\wedge n}) \leq \mathbb{E}(M_0^2) + a.$$
   (c) Pour tout $a > 0$, la martingale $(M_{T_a\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^2 (question précédente), elle convergence donc p.s. (et dans L^2). Donc $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence p.s. sur $\{T_a = \infty\}$, donc sur $\cup_{a=1}^\infty \{T_a = \infty\} = \{\langle M\rangle_\infty < \infty\}$.
2. (a) Pour tout $a > 0$, par définition de S_a, $|M_{S_a-1}| \leq \sqrt{a}$. Donc sur $\{1 \leq S_a < \infty\}$,
   $$|M_{S_a}^2 - M_{S_a-1}^2| \leq (\Delta M)_{S_a}^2 + 2|M_{S_a-1}||(\Delta M)_{S_a}| \leq (\Delta M)_{S_a}^2 + 2\sqrt{b}|(\Delta M)_{S_a}| \leq C + 2\sqrt{b} + \sqrt{C} < \infty.$$
   (b) Par le théorème d'arrêt de Doob pour la martingale $M^2 - \langle M\rangle$ et le temps d'arrêt S_a et la question 2(a),
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(\langle M\rangle_{S_a\wedge n}) &= \mathbb{E}(M_{S_a\wedge n}^2) - \mathbb{E}(M_0^2) \leq \mathbb{E}(M_{S_a\wedge n}^2) = \mathbb{E}(M_n^2 \mathbb{1}_{S_a=\infty}) + \mathbb{E}(M_{S_a}^2 \mathbb{1}_{S_a<\infty}) \\ &\leq a + \mathbb{E}(M_0^2 \mathbf{1}_{S_a=0}) + \mathbb{E}(|M_{S_a}^2 - M_{S_a-1}^2| \mathbf{1}_{1\leq S_a<\infty\}}) < \infty.\end{aligned}$$
   (c) Découle du lemme de Fatou ou théorème de convergence monotone appliqué à la question 2(b).
   (d) La question 2(c) donne, pour tout $a > 0$, $\langle M\rangle_{S_a} < \infty$ p.s. En particulier $\langle M\rangle_\infty < \infty$ sur $\{S_a = \infty\}$.

(e) La question 2(d) donne $\langle M\rangle_\infty < \infty$ sur $\cup_{a=1}^\infty \{S_a = \infty\} = \{\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n^2 < \infty\} \supset \{M \to\}$. À combiner avec 1(c).

Éléments de solution de l'exercice 5.

1. Ce vecteur est l'image par une application linéaire de $(V_0, \dots, V_n, W_0, \dots, W_n)$ est gaussien car à coordonnées gaussiennes indépendantes, c'est donc un vecteur gaussien.
2. Provient de la formule (de Bayes) des densités conditionnelles de vecteurs aléatoires :

$$\begin{aligned}
f_{X\mid Y_0,\dots,Y_{n-1},Y} &= \frac{f_{X,Y_0,\dots,Y_{n-1},Y}}{f_{Y_0,\dots,Y_{n-1},Y}} \\
&= \frac{f_{X,Y_0,\dots,Y_{n-1},Y}}{f_{X,Y_0,\dots,Y_{n-1}}}\frac{f_{X,Y_0,\dots,Y_{n-1}}}{f_{Y_0,\dots,Y_{n-1},Y}} \\
&= \frac{f_{X,Y_0,\dots,Y_{n-1},Y}}{f_{X,Y_0,\dots,Y_{n-1}}}\frac{f_{X,Y_0,\dots,Y_{n-1}}}{f_{Y_0,\dots,Y_{n-1}}}\frac{f_{Y_0,\dots,Y_{n-1}}}{f_{Y_0,\dots,Y_{n-1},Y}} \\
&= \frac{f_{Y\mid X,Y_0,\dots,Y_{n-1}} f_{X\mid Y_0,\dots,Y_{n-1}}}{f_{Y\mid Y_0,\dots,Y_{n-1}}}.
\end{aligned}$$

   La loi $f_{Y\mid Y_0,\dots,Y_{n-1}}$ est inutile car elle est absorbée, dans la normalisation.
3. *Initialisation.* Comme $Y_0 = X_0 + V_0$, il vient que $\mathrm{Loi}(Y_0 \mid X_0) = \mathcal{N}(X_0, \tau^2)$. La question 2. donne alors

$$\mathrm{Loi}(X_0 \mid Y_0) = \mathcal{N}(\hat{X}_0, \alpha_0) \quad \text{où} \quad \hat{X}_0 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\tau^2} Y_0 \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}.$$

   Prédiction. Par récurrence, si $\mathrm{Loi}(X_{n-1} \mid Y_0, \dots, Y_{n-1}) = \mathcal{N}(\hat{X}_{n-1}, \alpha_{n-1})$, alors le modèle donne

$$\mathrm{Loi}(X_n \mid Y_0, \dots, Y_{n-1}) = \mathcal{N}(a\hat{X}_{n-1}, a^2\alpha_{n-1} + \sigma^2).$$

   Filtrage. Le modèle donne

$$\mathrm{Loi}(Y_n \mid Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n) = \mathcal{N}(X_n, \tau^2).$$

   La question 2. permet alors d'inverser le conditionnement entre Y_n et X_n :

$$\mathrm{Loi}(X_n \mid Y_0, \dots, Y_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, \alpha_n) \quad \text{où} \quad \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{a^2\alpha_{n-1}+\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2} \quad \text{et} \quad \hat{X}_n = \alpha_n\Big(\frac{a\hat{X}_{n-1}}{a^2\alpha_{n-1}+\sigma^2} + \frac{Y_n}{\tau^2}\Big).$$