Examen 2025/2026

Semaine du 19 janvier 2026, durée de 3 heures
Documents et internet non autorisés
Faites ce que vous pouvez, et ne vous en faites pas
Il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir une très bonne note!

Exercice 1 (Ruine). La fortune d'une compagnie d'assurance à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ est modélisée par

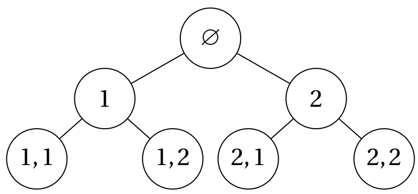
$$Y_t = c + pt - Z_t \quad \text{où} \quad Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k \quad \text{et}$$

— $(X_k)_{k\geq 1}$ sont des v.a. i.i.d. modélisant les sinistres, de moyenne λ, et de variance $a - \lambda^2 > 0$, $a = \mathbb{E}(X_1^2)$
— $(N_t)_{t\geq 0}$ un PPS(0,μ) modélisant la survenue des sinistres, de temps de sauts $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $T_0 = 0$, indépendant de X
— $p > 0$ est le taux (déterministe) de cotisation par unité de temps
— $c \geq 0$ est le capital initial (déterministe) de la compagnie.

Intéressons-nous au temps de ruine $\tau = \inf\{t \geq 0 : Y_t < 0\}$.

1. Préciser l'allure des trajectoires de Y. Sont-elles monotones? continues?
2. Rappeler la preuve de $\frac{N_t}{t} \to \mu$ p.s. et $\sqrt{t}\big(\frac{N_t}{t} - \mu\big) \to \mathcal{N}(0,\mu)$ en loi, quand $t \to \infty$.
3. Montrer que le processus de Poisson composé Z vérifie $\frac{Z_t}{t} \to \lambda\mu$ p.s. et $\sqrt{t}\big(\frac{Z_t}{t} - \lambda\mu\big) \to \mathcal{N}(0,\mu a)$ en loi.
4. Montrer que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = \mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n > c)$ où $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n (X_k - pE_k)$ pour $n \geq 1$, où $E_k = T_k - T_{k-1}$.
5. En déduire que si $p < \lambda\mu$ alors $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.
6. Montrer que si $p > \lambda\mu$ alors $\mathbb{P}(\tau < \infty) < 1$. Indication : propriété de Markov forte.
7. Montrer que si $p = \lambda\mu$ alors $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. Indication : LLI.

Exercice 2 (Cascades multiplicatives de Mandelbrot). Considérons l'arbre binaire infini T. Notons $\varnothing$ sa racine, (1) et (2) les deux sommets de profondeur 1, puis $(1,1)$,$(1,2)$ et $(2,1)$,$(2,2)$ les quatre sommets de profondeur 2, etc, les sommets de profondeurs k sont $(a_1,\ldots,a_k)$, $a_i \in \{1,2\}$, de sorte que $T = \cup_{k\geq 0}\{1,2\}^k$, avec $\{1,2\}^0 = \varnothing$. Disposons sur les sommets des v.a. positives non-constantes, $W_{a_1,\ldots,a_k}$ pour le sommet $(a_1,\ldots,a_k)$, i.i.d. de moyenne 1, qui vont jouer le rôle de poids. À présent, une quantité d'énergie déterministe disposée à la racine, notée $\mathcal{E}_\varnothing > 0$, se propage à travers T



par récurrence : chaque sommet transmet la moitié de son énergie à chacun de ses deux sommets enfants, fois leurs poids. Plus précisément, $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}W_1\mathcal{E}_\varnothing$ et $\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}W_2\mathcal{E}_\varnothing$, puis

$$\mathcal{E}_{1,1} = \frac{1}{4}W_{1,1}W_1\mathcal{E}_\varnothing, \quad \mathcal{E}_{1,2} = \frac{1}{4}W_{1,2}W_1\mathcal{E}_\varnothing, \quad \mathcal{E}_{2,1} = \frac{1}{4}W_{2,1}W_2\mathcal{E}_\varnothing, \quad \mathcal{E}_{2,2} = \frac{1}{4}W_{2,2}W_2\mathcal{E}_\varnothing,$$

etc. Cela donne $\mathcal{E}_{a_1,\ldots,a_k} = \frac{1}{2^k}W_{a_1,\ldots,a_k}\cdots W_{a_1}\mathcal{E}_\varnothing$ pour tout k et tout $(a_1,\ldots,a_k) \in \{1,2\}^k$.

1. Montrer que pour tout k, l'énergie totale de la profondeur k, donnée par $\overline{\mathcal{E}}_k = \sum_{a_1,\ldots,a_k}\mathcal{E}_{a_1,\ldots,a_k}$, vérifie $\mathbb{E}\overline{\mathcal{E}}_k = \mathcal{E}_\varnothing$.
2. Pour tout k, les v.a. $\mathcal{E}_{a_1,\ldots,a_k}$, $(a_1,\ldots,a_k) \in \{1,2\}^k$, sont de même loi (mais ne sont pas indépendantes).
   Montrer que si $\log W_1 \in L^1$ alors l'énergie renormalisée $e_k = 2^k\mathcal{E}_{1,\ldots,1}$ (où 1 est répété k fois en indice) vérifie $\mathbb{E}e_k = \mathcal{E}_\varnothing$ et $\lim_{k\to\infty} e_k = 0$ p.s. Indication : exploiter le fait que les v.a. $W_{a_1,\ldots,a_k}$ sont non-constantes.
3. Montrer que l'énergie totale $(\overline{\mathcal{E}}_k)_{k\geq 1}$ est une martingale pour $\mathcal{F}_k = \sigma(W_{a_1,\ldots,a_i} : a_i \in \{1,2\}, i \leq k)$.
4. En déduire que $(\overline{\mathcal{E}}_k)_{k\geq 1}$ converge p.s.
5. Observons que $\overline{\mathcal{E}}_k = \frac{W_1}{2}A + \frac{W_2}{2}B$ où A et B sont i.i.d. de même loi que $\overline{\mathcal{E}}_{k-1}$, indépendantes de W_1 et W_2.
   En déduire que si $\mathbb{E}(W_1^2) < 2$ alors $(\overline{\mathcal{E}}_k)_{k\geq 1}$ converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. $\overline{\mathcal{E}}_\infty$ de moyenne $\mathcal{E}_\varnothing$.
6. Montrer que si de plus $\mathbb{P}(W_1 > 0) = 1$ alors $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}}_\infty > 0) = 1$.

Problème 1 (Temps forts de stationnarité et convergence à l'équilibre)**.**
Pour une CM $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irréductible de loi invariante μ, un temps fort de stationnarité (TFS) est un temps d'arrêt T tel que T et X_T sont indépendantes et $X_T \sim \mu$. Cette notion peut dépendre à la fois du noyau et de la loi initiale de X.

1. Questions de cours sur les chaînes de Markov.
   (a) Une CM irréductible possédant une loi invariante est-elle récurrente positive?
   La loi invariante est-elle unique? Charge-t-elle tous les états?
   (b) Rappeler un exemple de chaîne irréductible admettant une mesure invariante mais pas de loi invariante
   (c) Rappeler un exemple de chaîne irréductible n'admettant pas de mesure invariante
2. Collectionneur de coupons. Ou premier temps d'observation de toutes les possibilités. Il s'agit de la v.a. discrète $T := \inf\{n \geq 1 : \{Z_1, \ldots, Z_n\} = \{1, \ldots, d\}\}$ où $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{1, \ldots, d\}$, $d \geq 1$.
   (a) Montrer que T suit la loi de $T_1 + \cdots + T_d$ où $T_1, \ldots, T_d$ sont indépendantes avec $T_i \sim \mathrm{Geo}_{\mathbb{N}^*}((d-i+1)/d)$.
   En particulier $\mathbb{E}(T) = d\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{i} = d\log d + d\gamma + o_{d\to\infty}(d)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(T > \lceil d\log d + cd\rceil) \leq \mathrm{e}^{-c}$ pour tout $c > 0$. Indication : $A_i := \cap_{1\leq k\leq \lceil d\log d+cd\rceil}\{Z_k \neq i\}$.
3. Exemple de la marche aléatoire sur l'hypercube. Dans cette partie, les ingrédients sont les suivants :
   — $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{1, \ldots, d\}$
   — $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{0, 1\}$
   — X_0 est une v.a. sur $E = \{0,1\}^d$, $d \geq 1$, et X_0, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes.
   — $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq i \leq d$ par $X_{n+1,i} = \begin{cases} X_{n,i} & \text{si } i \neq I_{n+1} \\ B_{n+1} & \text{si } i = I_{n+1} \end{cases}$.
   (a) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une CM irréductible apériodique, et que la loi uniforme est invariante.
   (b) Montrer que le collectionneur de coupons $T := \inf\{n \in \mathbb{N} : \{I_1, \ldots, I_n\} = \{1, \ldots, d\}\}$ est un TFS.
4. Exemple de la chaîne « top to random shuffle ». Considérons un paquet de $d \geq 2$ cartes disposées verticalement. On insère la carte du dessus aléatoirement à une position uniforme dans le paquet. On répète cette opération indéfiniment, de manière indépendante. On code les positions successives des cartes avec une permutation de $\{1, \ldots, d\}$, ce qui donne une CM $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans le groupe symétrique Σ_d, définie par $X_{n+1} = \sigma_n X_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où σ_n est le cycle $(U_n, \ldots, 1)$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{1, \ldots, d\}$, indépendante de X_0. Le paquet est ordonné au départ lorsque $X_0 = \mathrm{id} = (1)\cdots(d)$.
   (a) Montrer que la CM $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible, récurrente, positive, apériodique
   (b) Montrer que sa loi invariante est la loi uniforme sur Σ_d
   (c) Supposons à partir de maintenant que $X_0 = (1)\cdots(d)$, en particulier $X_0(d) = d$.
   Soit T_1 le temps au bout duquel la carte initialement en position d se retrouve au-dessus du paquet (pos. 1).
   C'est-à-dire que $T_1 := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(d) = 1\}$. Montrer que $T := 1 + T_1$ est un collectionneur de coupons.
   (d) Montrer que T est un TFS (note : cette question est plus difficile que les autres).
5. TFS et convergence à l'équilibre. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une CM sur E, irréductible, de loi invariante μ, et de noyau $\mathbf{P}$.
   (a) Montrer que si T est un TFS pour X alors $\mathbb{P}(T \leq n, X_n = x) = \mathbb{P}(T \leq n)\mu(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$.
   (b) En déduire que si T est un TFS pour la condition initiale $X_0 \sim \delta_x$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$s_x(n) := \sup_{y\in E}\Big(1 - \frac{\mathbf{P}^n(x,y)}{\mu(y)}\Big) \leq \mathbb{P}(T > n).$$
   (c) Montrer que $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\nu_1, \nu_2) := \frac{1}{2}\sum_{x\in E}|\nu_1(x) - \nu_2(x)| = \sum_{y:\nu_1(y)<\nu_2(y)}(\nu_2(y) - \nu_1(y))$ pour toutes lois ν_1 et ν_2.
   (d) En déduire que $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mathbf{P}^n(x,\cdot), \mu) \leq s_x(n)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$.

   Il en découle que si T est un TFS pour $X_0 \sim \delta_x$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mathbf{P}^n(x,\cdot), \mu) \leq \mathbb{P}(T > n).$$

– oOo –

Éléments de solution de l'exercice 1.

1. Elles sont càdlàg, succession de lignes de pente p brisées par des sauts vers le bas.
   Il y a presque sûrement une infinité de brisures car la loi des X_k n'est pas δ_0 car la variance des X_k n'est pas nulle. Cela revient à considérer le jeu de pile ou face $(\mathbb{1}_{X_k \neq 0})_{k\geq 1}$.
   Techniquement, les sauts peuvent se produire vers le haut car rien n'interdit à X_k d'être négative, mais comme ces variables modélisent des sinistres, il serait curieux de considérer des X_k pouvant prendre des valeurs négatives.
2. Le PPS est à accroissements indépendants et stationnaires de loi de Poisson. La LGN pour N est déductible de la LGN pour les v.a. i.i.d. de loi $\mathrm{Poi}(\mu)$ car par monotonie des trajectoires et sommations télescopiques,
   $$\frac{N_1 - N_0 + \cdots + N_{\lfloor t\rfloor} - N_{\lfloor t\rfloor -1}}{\lfloor t\rfloor}\frac{\lfloor t\rfloor}{t} \leq \frac{N_t}{t} \leq \frac{N_1 - N_0 + \cdots + N_{\lfloor t\rfloor+1} - N_{\lfloor t\rfloor}}{\lfloor t\rfloor+1}\frac{\lfloor t\rfloor+1}{t}.$$
   Alternativement, il est aussi possible d'utiliser $T_{N_t} \leq t \leq T_{N_t+1}$, $T_n/n \to 1/\mu$ p.s. (LGN) et $N_t \to +\infty$ p.s.
   Le TLC pour N peut s'obtenir avec les fonctions caractéristiques et le développement limité de l'exponentielle :
   $$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\sqrt{t}(\frac{N_t}{t}-\mu)}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\theta\sqrt{t}}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{\sqrt{t}}N_t}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\theta\sqrt{t}-\mu t}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{\sqrt{t}}n}\frac{(\mu t)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\theta\sqrt{t}-\mu t+\mu t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{\sqrt{t}}}} = \mathrm{e}^{-\mu\frac{\theta^2}{2}+o_{t\to\infty}(1)}.$$
3. La LGN pour le PPC Z découle de la LGN pour les X_k et pour N car $\frac{Z_t}{t} = \frac{X_1+\cdots+X_{N_t}}{N_t}\frac{N_t}{t}$.
   Le TLC pour Z découle du TLC pour les X_k et pour N car avec les fonctions caractéristiques :
   $$\varphi_{Z_t}(\theta) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(X_1+\cdots+X_{N_t})} \mid N_t)) = \mathbb{E}((\varphi_{X_1}(\theta))^{N_t}) = \mathrm{e}^{-\mu t+\mu t\varphi_{X_1}(\theta)} = \mathrm{e}^{\mu t(\varphi_{X_1}(\theta)-1)}$$
   tandis que $\varphi_{X_1}(\theta) = 1 + \mathrm{i}\lambda\theta - \frac{a}{2}\theta^2 + o_{\theta\to 0}(\theta^2)$, d'où
   $$\varphi_{\sqrt{t}(\frac{Z_t}{t}-\mu\lambda)}(\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{t}\lambda\mu\theta+\mu t\left(\mathrm{i}\frac{\lambda\theta}{\sqrt{t}}-\frac{a}{2}\frac{\theta^2}{t}\right)+o_{t\to\infty}(1)} = \mathrm{e}^{-\mu a\frac{\theta^2}{2}+o_{t\to\infty}(1)}.$$
4. Comme les trajectoires de Y sont croissantes entre les sauts, le passage en dessous de zéro ne se fait qu'aux instants de saut, qui sont ceux de N. Or $Y_{T_n} = c + pT_n - Z_{N_{T_n}} = c + pT_n - \sum_{k=1}^n X_k = c - \sum_{k=1}^n (X_k - pE_k) = c - S_n$ où $E_k = T_k - T_{k-1}$. D'où $\{\tau < \infty\} = \{\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n > c\}$, d'où le résultat.
5. S_n est une somme de n v.a. i.i.d. de moyenne $m = \lambda - p/\mu$. La LGN indique que $S_n/n \to m$ p.s. donc si $m > 0$, c'est-à-dire $p < \lambda\mu$, alors $S_n \to +\infty$ p.s. et donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = +\infty$ p.s. d'où le résultat par la question précédente.
6. Si $m < 0$ alors la LGN donne $S_n \to -\infty$ p.s. Supposons que $\tau_1 = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n > c\}$ soit fini p.s. Alors la propriété de Markov forte indique que $(S_{\tau_1+n} - S_{\tau_1})_{n\in\mathbb{N}}$ est de même loi que S, et donc $\tau_2 = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_{\tau_1+n} - S_{\tau_1} > c\}$ est aussi fini p.s. En itérant ce procédé, il vient que $\overline{\lim}_n S_n = +\infty$ p.s., ce qui est impossible car $S_n \to -\infty$ p.s. Donc τ_1 n'est pas fini p.s.
7. Si $m = 0$, alors la LLI pour les v.a. i.i.d. $X_k - pE_k$ donne, p.s., en notant $\sigma^2 = a - \lambda^2 + p^2/\mu^2$,
   $$\underline{\lim}_n \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = -\sigma \quad\text{et}\quad \overline{\lim}_n \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = +\sigma.$$
   D'où le résultat, comme pour le cas $m > 0$. Notons que $\sigma^2 = (a - \lambda^2) + p^2/\mu^2 = a > 0$ car $p = \lambda\mu$.

Éléments de solution de l'exercice 2.

1. Nous avons $\mathbb{E}\mathscr{E}_{a_1,\ldots,a_k} = 2^{-k}\mathbb{E}(W_{a_1,\cdots,a_k})\cdots\mathbb{E}(W_{a_1})\mathscr{E}_\varnothing = 2^{-k}\mathscr{E}_\varnothing$ pour tout $(a_1,\ldots,a_k) \in \{1,2\}^k$, et $\mathrm{card}(\{1,2\}^k) = 2^k$.
2. Nous avons $\mathbb{E}(e_k) = 2^k 2^{-k}\mathbb{E}(W_1)\cdots\mathbb{E}(W_{1\cdots 1})\mathscr{E}_\varnothing = \mathscr{E}_\varnothing$. D'autre part, $e_k = \mathscr{E}_\varnothing \exp(X_1 + \cdots + X_k)$ où $X_i = \log W_{\underbrace{1,\ldots,1}_{i\text{ fois}}}$, qui sont des v.a. i.i.d. de même loi que $\log W_1$, intégrable par hypothèse. Comme $\mathbb{P}(W_1 = 1) < 1$, par l'inégalité de Jensen, $\mathbb{E}(X_i) < \log\mathbb{E}(W_{1,\ldots,1}) = 0$. La LGN donne alors $\frac{1}{k}(X_1 + \cdots + X_k) \to \mathbb{E}(X_1) < 0$ p.s. d'où $e_k \to 0$ p.s.

3. Comme $\overline{\mathscr{E}}_k = \sum_{a_1,\dots,a_k} \frac{W_{a_1,\dots,a_k}}{2}\mathscr{E}_{a_1,\dots,a_{k-1}}$, il vient que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\overline{\mathscr{E}}_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) &= \sum_{a_1,\dots,a_k} \mathbb{E}\Big(\frac{W_{a_1,\dots,a_k}}{2}\mathscr{E}_{a_1,\dots,a_{k-1}} \mid \mathscr{F}_{k-1}\Big)\\ &= \sum_{a_1,\dots,a_k} \mathbb{E}\Big(\frac{W_{a_1,\dots,a_k}}{2}\Big)\mathscr{E}_{a_1,\dots,a_{k-1}} = \sum_{a_1,\dots,a_k} \frac{1}{2}\mathscr{E}_{a_1,\dots,a_{k-1}} = \sum_{a_1,\dots,a_{k-1}} \mathscr{E}_{a_1,\dots,a_{k-1}} = \overline{\mathscr{E}}_{k-1}.\end{aligned}$$

4. D'après le cours, une martingale positive, en tant que sous-martingale bornée dans L^1 ou en tant que surmartingale positive, converge p.s. vers une v.a. intégrable.
5. Il vient, par indépendance, et du fait que $\mathbb{E}(W_1) = \mathbb{E}(W_2) = 1$ et $\mathbb{E}(\overline{\mathscr{E}}_{k-1}) = \mathscr{E}_\varnothing$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\overline{\mathscr{E}}_k^2) &= \frac{1}{4}\mathbb{E}(W_1^2)\mathbb{E}(\overline{\mathscr{E}}_{k-1}^2) + \frac{1}{4}\mathbb{E}(W_2^2)\mathbb{E}(\overline{\mathscr{E}}_{k-1}^2) + \frac{2}{4}\mathbb{E}(W_1)\mathbb{E}(W_2)\mathbb{E}(\overline{\mathscr{E}}_{k-1})^2\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(W_1^2)\mathbb{E}(\overline{\mathscr{E}}_{k-1}^2) + \frac{1}{2}\mathscr{E}_\varnothing^2.\end{aligned}$$

Donc si $\mathbb{E}(W_1^2) < 2$, alors $\rho := \frac{1}{2}\mathbb{E}(W_1^2) < 1$, et la martingale $(\overline{\mathscr{E}}_k)_{k\geq 1}$ est bornée dans L^2.
Elle converge donc p.s. et dans L^2 vers une v.a. $\overline{\mathscr{E}}_\infty$ de carré intégrable, de moyenne $\mathbb{E}(\overline{\mathscr{E}}_1) = \mathscr{E}_\varnothing$.
6. Supposons que $\mathbb{E}(W_1^2) < 2$ et que de plus $\mathbb{P}(W_1 > 0) = 1$ (est utilisé ci-dessous pour $\stackrel{*}{=}$). Nous avons

$$\overline{\mathscr{E}}_\infty = \frac{W_1}{2}A + \frac{W_2}{2}B$$

où A et B sont indépendantes, de même loi que $\overline{\mathscr{E}}_\infty$, et indépendantes de W_1 et W_2, d'où

$$\mathbb{P}(\overline{\mathscr{E}}_\infty = 0) = \mathbb{P}(W_1 A = 0 \text{ et } W_2 B = 0) = \mathbb{P}(W_1 A = 0)^2 \stackrel{*}{=} \mathbb{P}(A = 0)^2 = \mathbb{P}(\overline{\mathscr{E}}_\infty = 0)^2$$

Donc $\mathbb{P}(\overline{\mathscr{E}}_\infty = 0) \in \{0,1\}$. Or comme $\overline{\mathscr{E}}_\infty$ est une v.a. positive de moyenne $\mathscr{E}_\varnothing > 0$, il vient que $\mathbb{P}(\overline{\mathscr{E}}_\infty = 0) = 0$.

Éléments de solution du problème 1.

1. (a) D'après le cours, une chaîne irréductible qui admet une loi invariante est forcément récurrente positive, et de plus, il s'agit forcément de l'unique loi invariante.
   (b) D'après le cours, une chaîne irréductible récurrente nulle admet des mesures invariantes, toutes proportionnelles, mais pas de loi invariante. Un exemple familier est celui de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, dont les mesures invariantes sont les multiples de la mesure de comptage (elles sont de plus réversibles).
   (c) Le processus de Derman, vu en cours, est irréductible mais n'admet pas de mesure invariante. Il est donné par $E = \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(x, x+1) = p_x$, $\mathbf{P}(x, 0) = 1 - p_x$, $x \geq 1$, et $\mathbf{P}(0,1) = 1$, avec $0 < p_x < 1$ et $\prod_{x=1}^\infty p_x > 0$.
2. (a) Soit $T_i = \inf\{n \geq 1 : \mathrm{card}\{Z_1, \dots, Z_n\} = i\}$, pour tout $1 \leq i \leq d$. Alors (jeu de pile ou face) $T_1 = 1 \sim \mathrm{Geo}_{\mathbb{N}^*}(d/d)$, $T_2 - T_1 \sim \mathrm{Geo}_{\mathbb{N}^*}((d-1)/d)$, ..., $T_d - T_{d-1} \sim \mathrm{Geo}_{\mathbb{N}^*}(1/d)$.
   (b) Soit $c > 0$. Soit $A_i := \cap_{1\leq k \leq \lceil d\log d + cd\rceil}\{Z_k \neq i\}$, pour tout $1 \leq i \leq d$. Nous avons

$$\mathbb{P}(T > \lceil d\log d + cd\rceil) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^d A_i) \leq \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(A_i).$$

Comme $\mathbb{P}(Z_k \neq i) = 1 - 1/d$ et comme les événements $\{Z_k \neq i\}$ sont indépendants, nous avons

$$\sum_{i=1}^d \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^d \Big(1 - \frac{1}{d}\Big)^{\lceil d\log d + cd\rceil} \leq d\exp\Big(-\frac{d\log d + cd}{d}\Big) = \mathrm{e}^{-c}.$$

3. (a) Il s'agit bien d'une CM car suite récurrente aléatoire de la forme $X_{n+1} = f(X_n, \varepsilon_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, avec $\varepsilon_{n+1} = (I_{n+1}, B_{n+1})$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de v.a. i.i.d. indépendante de X_0. Son noyau de transition est

$$\mathbf{P}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{si } |x-y| = 1\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = y\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

On reconnaît la marche aléatoire paresseuse sur l'hypercube $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d = \{0,1\}^d = E$.
Ce noyau est symétrique sur E fini, donc la loi uniforme est réversible donc invariante.
L'apériodicité est garantie par le fait que la marche est paresseuse (la diagonale du noyau est non nulle).

(b) La v.a. T est un temps d'arrêt pour $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, I_1, \ldots, I_n, B_1, \ldots, B_n)$. De plus X_T a des coordonnées i.i.d. de loi de Bernoulli μ symétrique sur $\{0,1\}$, donc suit la loi $\mu^{\otimes d}$, qui se trouve être la loi uniforme sur $E = \{0,1\}^d$. Enfin, la loi de X_T ne dépend pas de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, tandis que T ne dépend que de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, d'où l'indépendance.

4. (a) L'ensemble de transpositions $\mathscr{T} = \{(d, d-1), \ldots, (2,1)\} \cup \{(d,1)\}$ engendre Σ_d. D'autre part $(2,1)$ et $(d, \ldots, 1)$ engendrent $\mathscr{T}$. Ainsi l'ensemble des cycles $\{(k, \ldots, 1) : 2 \le k \le d\}$ engendre Σ_d, et X est bien irréductible. Comme $E = \Sigma_d$ est fini, elle est donc récurrente positive. Comme $(U_k, \ldots, 1) = \mathrm{id}$ si $U_k = 1$, il vient que la chaîne peut rester sur place avec probabilité non nulle, elle est donc apériodique.

(b) Comme Σ_d est un groupe, il y a exactement d états qui conduisent à chaque état, donc les colonnes de la matrice de transition ont exactement d coefficients non nuls, tous égaux à $1/d$, donc sa transposée est une matrice de transition (la matrice est doublement stochastique), donc la loi uniforme est invariante.

(c) Soit $T_k = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(d) = k\}$ le premier temps au bout duquel la carte initialement en position d est en position k. Par définition, $T_{d-1} = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(d) = d-1\}$ est aussi le premier temps au bout du quel une carte est insérée pour la première fois en position d, ce qui fait remonter d'une position la carte initialement en position d. Ce temps suit la loi $\mathrm{Geo}_{\mathbb{N}^*}(1/d)$. De même, $T_{d-2} = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(d) = d-2\}$ est le premier temps au bout duquel une carte est ensuite insérée pour la première fois en position $d-1$ ou d, ce qui fait remonter à nouveau d'une position la carte initialement en position d. L'écart $T_{d-2} - T_{d-1}$ est indépendant de T_{d-1} et suit la loi $\mathrm{Geo}_{\mathbb{N}^*}(2/d)$. Ce procédé se poursuit jusqu'à $T_1 = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(d) = 1\}$. Ainsi, $T_1 = G_1 + \cdots + G_{d-1}$ où $G_i = T_{d-i} - T_{d-(i-1)}$, $T_d = 0$, $G_1, \ldots, G_{d-1}$ indépendantes, et $G_i \sim \mathrm{Geo}_{\mathbb{N}^*}(i/d)$.

(d) Pour tout $1 \le k \le d-1$, conditionnellement à $T_k = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(d) = k\}$, les $d-k$ cartes qui se trouvent en positions $d, d-1, \ldots, d-k+1$ ont un ordre invariant par permutation. Ainsi, au temps $T = T_1 + 1$, les d cartes du paquet ont un ordre invariant par permutation, ce qui signifie que X_T suit la loi uniforme sur Σ_d. De plus $\mathbb{P}(X_T = \sigma, T = k)$ ne dépend pas de σ. Il vient alors que $\frac{1}{d!}\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(X_T = \sigma, T = k)$, et donc T et X_T sont indépendantes.

5. (a) Nous avons, en utilisant successivement le fait que T est un temps d'arrêt, le fait que X est une $\mathrm{CM}(E, \mathbf{P})$, l'indépendance de T et X_T, le fait que $X_T \sim \mu$, et l'invariance de μ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \le n, X_n = x) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{y \in E} \mathbb{P}(T = k, X_n = x, X_k = y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{y \in E} \mathbf{P}^{n-k}(y, x) \mathbb{P}(T = k, X_k = y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{y \in E} \mathbf{P}^{n-k}(y, x) \mu(y) \mathbb{P}(T = k) = \mu(x) \mathbb{P}(T \le n).
\end{aligned}$$

(b) Fixons $x \in E$. Pour tous $y \in E$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$1 - \frac{\mathbf{P}^n(x,y)}{\mu(y)} = 1 - \frac{\mathbb{P}_x(X_n = y)}{\mu(y)} \le 1 - \frac{\mathbb{P}_x(X_n = y, T \le n)}{\mu(y)}.$$

Comme T est un TFS pour $X_0 \sim \delta_x$, la question précédente donne

$$1 - \frac{\mathbb{P}(X_n = y, T \le n \mid X_0 = x)}{\mu(y)} = 1 - \frac{\mu(y)\mathbb{P}(T \le n)}{\mu(y)} = \mathbb{P}_x(T > n).$$

(c) Comme ν_1 et ν_2 sont de même masse, $(\nu_1 - \nu_2)(A) = (\nu_2 - \nu_1)(A^c)$. Ainsi, avec $A = \{y : \nu_1(y) < \nu_2(y)\}$,

$$d_{\mathrm{VT}}(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{2} \sum_{y \in A} (\nu_2(y) - \nu_1(y)) + \frac{1}{2} \sum_{y \in A^c} (\nu_1(y) - \nu_2(y)) = 2\frac{1}{2} \sum_{y \in A} (\nu_2(y) - \nu_1(y)).$$

(d) Pour tous $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, en posant $A_{x,n} := \{y \in E : \mathbf{P}^n(x,y) < \mu(y)\}$,

$$d_{\mathrm{VT}}(\mathbf{P}^n(x,\cdot), \mu) = \sum_{y \in A_{x,n}} (\mu(y) - \mathbf{P}^n(x,y)) = \sum_{y \in A_{x,n}} \mu(y)\Big(1 - \frac{\mathbf{P}^n(x,y)}{\mu(y)}\Big) \le \sup_{y \in E}\Big(1 - \frac{\mathbf{P}^n(x,y)}{\mu(y)}\Big) = s_x(n).$$