Examen 2024/2025

Mercredi 22 janvier 2025, 9h00 – 12h00 (3 heures)
Documents et internet non autorisés
Il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir 20/20

Exercice 1 (Diffusion et sauts – Les questions sont indépendantes)**.**
Soit $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus de Poisson simple issu de 0 et d'intensité $\lambda > 0$, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi μ, et $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien réel issu de 0, trois ingrédients indépendants. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus défini par

$$X_t = B_t + \sum_{1\le n\le N_t} Z_n.$$

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi de X_t en fonction de t, λ, et μ.
2. Déterminer le comportement asymptotique p.s. de X_t quand $t\to\infty$ lorsque μ a pour moyenne $m \neq 0$.
3. Montrer que $X_t \to 0$ quand $t \to 0$, p.s., et dans L^2 quand μ a un moment d'ordre 2.
4. Exotisme : déterminer les limsup et liminf p.s. de $N_{|B_t|}$ quand $t\to\infty$.

Exercice 2 (Problème de Dirichlet inhomogène, fonction de Green sur un domaine, champ libre gaussien)**.**
Cet exercice est à la confluence des chaînes de Markov, des martingales, et des vecteurs gaussiens.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov d'espace sur E au plus dénombrable, de noyau $\mathbf{P}$, et de générateur $\mathbf{L} = \mathbf{P} - \mathbf{I}$.
Soit $D \subset E$ et $\overline{D} = D \cup \partial D$ où $\partial D = \{y \notin D : \exists x \in D, \mathbf{P}(x, y) > 0\}$ est son bord extérieur pour $\mathbf{P}$.
Supposons que D et ∂D sont finis non-vides, et $\mathbb{E}^x(\tau) < \infty$ pour tout $x \in \overline{D}$, où $\tau := \inf\{n\in\mathbb{N} : X_n \in \partial D\} < \infty$.

1. Montrer que pour tous $g : D\to\mathbb{R}$ et $h : \partial D \to \mathbb{R}$, la fonction $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ donnée par
$$f(x) = \mathbb{E}^x\Big(h(X_\tau) - \sum_{0\le k<\tau} g(X_k)\Big) \quad \text{est bien définie, et solution de} \quad \begin{cases}\mathbf{L}f = g & \text{sur } D\\ f = h & \text{sur } \partial D\end{cases}.$$
2. Montrer que la fonction f de la question 1 est l'unique solution.
3. Soit $\mathbf{G}_D(x, y)$ le nombre moyen de passages en y, partant de x, avant de sortir de D.
Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions $\overline{D} \to \mathbb{R}$ nulles sur ∂D, identifiable à $\mathbb{R}^D \equiv \mathbb{R}^{|D|}$.
Déduire de la question 1 que vus comme des opérateurs sur $\mathscr{F}$,
$$\mathbf{G}_D = -\mathbf{L}^{-1}.$$
4. Nous supposons dans la suite de l'exercice que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible et admet une mesure réversible μ.
Montrer que pour tout $\varphi \in \mathscr{F}$,
$$-\sum_{x,y} \mu(x)\mathbf{L}(x, y)\varphi(x)\varphi(y) = \frac{1}{2}\sum_{x,y}\mu(x)\mathbf{P}(x, y)(\varphi(x) - \varphi(y))^2.$$
5. En déduire que l'application bilinéaire suivante définit un produit scalaire sur $\mathscr{F}$:
$$(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathscr{F}\times\mathscr{F} \mapsto \langle -\mathbf{L}\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu = -\sum_{x,y}\mu(x)\mathbf{L}(x, y)\varphi_1(x)\varphi_2(y).$$
6. Soit $\mathscr{G}$ la loi gaussienne sur $\mathscr{F}$ de densité donnée à la constante de normalisation près par
$$\varphi \in \mathscr{F} \mapsto \exp\Big(-\frac{1}{2}\langle -\mathbf{L}\varphi, \varphi\rangle_\mu\Big).$$
En déduire que la matrice de covariance de $\mathscr{G}$ est donnée par $\mathrm{Cov}(x, y) = \mathbf{G}_D(x, y)/\mu(y)$.
7. Montrer que dans le cas de la marche aléatoire simple sur $E = \mathbb{Z}^d$, $d \ge 1$, la densité précédente s'écrit
$$\varphi \mapsto \exp\Big(-\beta\sum_{x\sim y}(\varphi(x) - \varphi(y))^2\Big) \quad \text{pour une constante } \beta > 0 \text{ à déterminer.}$$

Problème 1 (Renforcement)**.** Considérons deux chemins distincts α et β reliant les mêmes points de départ et d'arrivée, empruntés par des passants successifs. Pour chaque instant $n \in \mathbb{N}$, le chemin emprunté lors du n^{e} passage est codé par une variable aléatoire X_n à valeurs dans $\{\alpha, \beta\}$. L'attractivité des chemins α et β pour déterminer le $(n+1)^{\text{e}}$ passage est codée par des variables aléatoires A_n et B_n. Fixons X_0 dans $\{\alpha,\beta\}$, $A_0 = B_0 = 1$, et donnons nous une fonction $r : (0,\infty) \to (0,\infty)$ telle que $r(x) \geq x$ pour tout $x > 0$. Nous modélisons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(X_{n+1}, A_{n+1}, B_{n+1}) = \begin{cases} (\alpha, r(A_n), B_n) & \text{si } U_{n+1} \leq \frac{A_n}{A_n+B_n}, \\ (\beta, A_n, r(B_n)) & \text{si } U_{n+1} > \frac{A_n}{A_n+B_n}, \end{cases}$$

où $(U_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Notre but est d'étudier le comportement asymptotique quand $n \to \infty$ du nombre de passages par les chemins α et β à l'instant n :

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=\alpha\}} \quad \text{et} \quad S_n(\beta) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=\beta\}}.$$

Nous adoptons la convention $S_0(\alpha) = 0$ et $S_0(\beta) = 0$. Nous avons $S_n(\alpha) + S_n(\beta) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Absence de renforcement : nous supposons que $r(x) = x$ pour tout $x > 0$.
   - (a) Montrer que $S(\alpha)$ et $S(\beta)$ sont des marches aléatoires sur $\mathbb{N}$ d'incréments de loi symétrique sur $\{0,1\}$.
   - (b) Montrer que presque sûrement, $S_n(\alpha)/n \to 1/2$ et $S_n(\beta)/n \to 1/2$ quand $n \to \infty$.
   - (c) Montrer que $S(\alpha) - S(\beta)$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ d'incréments de loi symétrique sur $\{-1,1\}$.
   - (d) En déduire que $\underline{\lim}_{n\to\infty} |S_n(\alpha) - S_n(\beta)| = 0$ presque sûrement.
2. Renforcement linéaire : nous supposons que $r(x) = 1 + x$ pour tout $x > 0$.
   - (a) Montrer que $A_n = 1 + S_n(\alpha)$ et $B_n = 1 + S_n(\beta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - (b) Montrer que $M_n = \frac{1+S_n(\alpha)}{n+2}$ définit une martingale pour la filtration canonique de la suite U.
   - (c) Montrer que cette martingale converge p.s. vers une v.a. M_∞ à valeurs dans $[0,1]$.
   - (d) Montrer que M_n suit la loi uniforme sur $\left\{\frac{1+k}{n+2} : 0 \leq k \leq n\right\}$ et en déduire la loi de M_∞.
3. Renforcement géométrique : nous supposons que $r(x) = \rho x$ pour tout $x > 0$, où $\rho > 1$.
   - (a) Montrer que $A_n = \rho^{S_n(\alpha)}$ et $B_n = \rho^{S_n(\beta)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - (b) Soit $\Delta_n = S_n(\alpha) - S_n(\beta)$, et $\mathscr{F}_n = \sigma(U_0, \ldots, U_n)$, $U_0 = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\mathbb{P}(|\Delta_{n+1}| = |\Delta_n| + 1 \,|\, \mathscr{F}_n) = \frac{\rho^{|\Delta_n|}}{1+\rho^{|\Delta_n|}} \mathbb{1}_{\{\Delta_n \neq 0\}} + \mathbb{1}_{\{\Delta_n = 0\}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(|\Delta_{n+1}| = |\Delta_n| - 1 \,|\, \mathscr{F}_n) = \frac{1}{1+\rho^{|\Delta_n|}} \mathbb{1}_{\{\Delta_n \neq 0\}}.$$
   - (c) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $f(1) \geq f(0)$ et $\rho^\ell\big(f(\ell+1) - f(\ell)\big) = f(\ell) - f(\ell-1)$ pour tout $\ell \geq 1$.
   Montrer que $(f(|\Delta_n|))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.
   - (d) Considérons à partir de maintenant le cas où $f(0) = 0$ et $f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho^{-\frac{k(k+1)}{2}}$ pour tout $n \geq 1$.
   Montrer que $(f(|\Delta_n|))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale qui converge presque sûrement.
   - (e) Montrer que $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = \infty$ presque sûrement.
   - (f) Montrer que pour tous $N, d \geq 1$, la probabilité que $|\Delta|$ soit croissante à partir du rang N, sachant que $|\Delta_N| = d$, ne dépend pas de N, et tend vers 1 quand $d \to \infty$.
   - (g) En déduire que presque sûrement $|\Delta|$ est croissante à partir d'un certain rang (aléatoire).
   - (h) En déduire le comportement asymptotique de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, presque sûrement et en loi.

—

Richard Feynman : « *Sans les mathématiques, la physique n'aurait été en retard que d'une semaine!* »
Mark Kac : « *Dieu a créé le monde en sept jours!* »

– oOo –

Éléments de solution de l'exercice 1.

1. En utilisant les indépendances et le fait que $B_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $N_t \sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$, nous avons

$$\varphi_{X_t}(\theta) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X_t}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta B_t})\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\sum_{k=1}^{N_t} Z_k} \mid N_t)) = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(\sqrt{t}\theta)\mathbb{E}(\varphi_\mu(\theta)^{N_t}) = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(\sqrt{t}\theta)\mathrm{e}^{-\lambda t+\lambda t\varphi_\mu(\theta)}.$$

Comme $\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(\theta) = \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}}$, cela donne $\varphi_{X_t}(\theta) = \mathrm{e}^{-t\left(\frac{\theta^2}{2}+\lambda(1-\varphi_\mu(\theta))\right)}$.

2. La LGN pour B, N, et la suite i.i.d. Z donnent (notons que $N_t > 0$ pour t assez grand p.s. en fait $N_t \to +\infty$ p.s.)

$$\frac{X_t}{t} = \frac{B_t}{t} + \frac{N_t}{t}\frac{Z_1+\cdots+Z_{N_t}}{N_t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} 0+\lambda\mu.$$

Par conséquent, comme $\mu \neq 0$, il vient que $X_t \sim t\lambda\mu$ converge vers $+\infty$ ou $-\infty$ en fonction du signe de μ.

3. On a $\lim_{t\to 0} N_t = 0$ p.s. (continuité à droite [1]) et $\lim_{t\to 0} B_t = B_0 = 0$ p.s. (continuité) d'où $\lim_{t\to 0} X_t = 0$ p.s.
On a $\mathbb{E}(B_t^2) = t \to 0$ quand $t \to 0$ donc $B_t \to 0$ dans L^2. D'autre part, si μ a une moyenne m et une variance σ^2 alors $X_t - B_t \to 0$ dans L^2 car par conditionnement et indépendance,

$$\mathbb{E}((X_t-B_t)^2) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{1\le k\le N_t} Z_k\Big)^2 \mid N_t\Big)\Big) = \mathbb{E}(N_t(\sigma^2+m^2)+N_t(N_t-1)m^2) = \lambda t(\sigma^2+m^2)+(\lambda t)^2 m^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

4. Une conséquence de la loi du zéro-un de Blumenthal est que $\overline{\lim}_{t\to\infty}|B_t| = +\infty$ p.s. Comme $\lim_{t\to\infty} N_t = +\infty$ p.s., il vient que $\overline{\lim}_{t\to\infty} N_{|B_t|} = +\infty$ p.s. Nous avons également $\underline{\lim}_{t\to\infty}|B_t| = -\infty$ p.s. Comme par ailleurs $t \mapsto B$ est continue p.s., le théorème des valeurs intermédiaire indique que $\{t : B_t = 0\}$ est non borné, p.s. donc $\underline{\lim}_{t\to\infty}|B_t| = 0$ p.s. Comme $\inf_{t\ge 0} N_t = N_0 = 0$, il vient que $\underline{\lim}_{t\to\infty} N_{|B_t|} = 0$ p.s.

Éléments de solution de l'exercice 2.

1. Comme $\overline{D}$ est borné, les fonctions h et g sont bornée, et comme $\mathbb{E}^x(\tau) < \infty$ pour tout $x \in \overline{D}$, tandis que nous avons $|h(X_\tau) - \sum_{0\le k<\tau} g(X_k)| \le \|h\|_\infty + \|g\|_\infty \tau$, il vient que f est bien définie.
Si $x \in \partial D$, alors $\tau = 0$ et donc $f(x) = h(x)$.
Soit à présent $x \in D$. La définition de ∂D donne $\tau \ge 1$ sur $\{X_0 = x\}$. La propriété de Markov faible donne

$$\mathbb{E}^x\big(h(X_\tau)\big) = \sum_{y\in\overline{D}} \mathbb{E}^x\big(h(X_\tau)\mathbb{1}_{\{X_1=y\}}\big) = \sum_{y\in\overline{D}} \mathbb{E}^y\big(h(X_\tau)\big)\mathbf{P}(x,y)$$

et

$$\mathbb{E}^x\Big(\sum_{0\le k<\tau} g(X_k)\Big) = g(x) + \sum_{y\in\overline{D}} \mathbb{E}^x\Big(\sum_{1\le k<\tau} g(X_k)\mathbb{1}_{\{X_1=y\}}\Big) = g(x) + \sum_{y\in\overline{D}} \mathbb{E}^y\Big(\sum_{0\le k<\tau} g(X_k)\Big)\mathbf{P}(x,y),$$

d'où, en faisant la somme, $f(x) = -g(x) + (\mathbf{P}f)(x)$, c'est-à-dire $(\mathbf{P}-\mathbf{I})(f)(x) = g(x)$.

2. Si $\widetilde{f}$ est une autre solution, alors par linéarité, $\mathbf{L}(f-\widetilde{f}) = 0$ sur D et $f-\widetilde{f} = 0$ sur ∂D. Par unicité de la solution du problème de Dirichlet homogène (sans second membre) vu en cours : $f-\widetilde{f} = 0$ sur D. Il est également possible de répéter la preuve de cette unicité, voici deux méthodes pour y parvenir :
   - Unicité en utilisant le principe du maximum. Soit donc $\widetilde{f}$ solution avec $h = 0$ et $g = 0$. Comme $\overline{D}$ est fini, $\widetilde{f}$ atteint son maximum sur $\overline{D}$. Il suffit d'établir que $\widetilde{f}$ ne peut atteindre son maximum que sur ∂D. Car dans ce cas, par symétrie, il en sera de même pour le minimum, or $\widetilde{f} = 0$ sur ∂D, d'où $\widetilde{f} = 0$ sur $\overline{D}$. Supposons donc qu'il existe $x \in D$ tel que $\widetilde{f}(x) = M := \max_{y\in\overline{D}} \widetilde{f}(y)$. Comme $\widetilde{f}$ est solution, il vient, pour tout $n \ge 1$,

$$M = \widetilde{f}(x) = \sum_{y\in\overline{D}} \mathbf{P}(x,y)\widetilde{f}(y) = \sum_{y\in D} \mathbf{P}(x,y)\widetilde{f}(y) = \sum_{y\in D} \mathbf{P}^n(x,y)\widetilde{f}(y) \le M\mathbf{P}^n(x,D).$$

   Or comme $\tau < \infty$ p.s. il vient que $\mathbf{P}^n(x,\partial D) > 0$ pour n assez grand, donc $\mathbf{P}^n(x,D) < 1$, d'où la contradiction.

---

1. Alternativement, si $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ est le premier temps de saut de N, alors $N_t = N_0 = 0$ si $t < T_1$, et $T_1 > 0$ p.s. car $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

— Unicité en utilisant une martingale. Soit $\widetilde{f}$ une solution avec $h=0$ et $g=0$, prolongée par 0 en dehors de $\overline{D}$. Comme $\overline{D}$ est borné, $\widetilde{f}$ est bornée, et d'après le cours, le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $M_n=\widetilde{f}(X_n)-\sum_{0\le k<n}\mathbf{L}(\widetilde{f})(X_k)$, est une martingale. Considérons le cas où $X_0=x\in D$. La définition de τ donne alors $X_k\in D$ pour tout $0\le k<n\wedge\tau$, et comme $\mathbf{L}(\widetilde{f})=0$ sur D, il vient que $M_{n\wedge\tau}=\widetilde{f}(X_n)$. Or $\widetilde{f}$ est bornée et $\tau<\infty$ p.s. donc par le théorème d'arrêt de Doob, $\widetilde{f}(x)=\mathbb{E}^x(M_0)=\mathbb{E}^x(M_\tau)$, et $M_\tau=\widetilde{f}(X_\tau)=0$ car $\widetilde{f}=0$ sur ∂D, d'où $\widetilde{f}(x)=0$.

3. Si $h\equiv 0$ et $g=-\mathbb{1}_{\{y\}}$, alors $f(x)=\mathbb{E}^x(\sum_{0\le k<\tau}\mathbb{1}_{\{X_k=y\}})=\mathbf{G}_D(x,y)$, d'où $-\mathbf{L}\mathbf{G}_D(\cdot,y)=\mathbb{1}_{\{y\}}$ et $\mathbf{G}_D(\cdot,y)=0$ sur ∂D. On parle de fonction de Green (d'où la notation) et de conditions au bord de Dirichlet. L'ensemble des fonctions $\overline{D}\to\mathbb{R}$ qui s'annulent sur ∂D s'identifie avec $\mathbb{R}^D\equiv\mathbb{R}^{|D|}$, dont la base canonique est formée par $\mathbb{1}_y$, $y\in D$. Alternativement, comme $\mathbf{G}_D(x,y)=\mathbb{E}^x(\sum_{0\le k<\tau}\mathbb{1}_{X_k=y})$, il vient que pour tous $g:D\to\mathbb{R}$ et $x\in\overline{D}$,

$$(\mathbf{G}_D g)(x)=\sum_{y\in D}\mathbb{E}^x\Big(\sum_{0\le k<\tau}\mathbb{1}_{\{X_k=y\}}\Big)g(y)=\mathbb{E}^x\Big(\sum_{0\le k<\tau}g(X_k)\Big)=-f(x)$$

où f est solution du PD avec $h=0$, tandis que $(\mathbf{G}_D g)(x)=0$ si $x\in\partial D$. Donc $\mathbf{L}\mathbf{G}_D g=-\mathbf{L}f=-g$. Donc $\mathbf{G}_D=\mathbf{L}^{-1}$.

4. Comme $\mathbf{P}(x,y)=\mathbf{L}(x,y)$ si $x\neq y$, il vient que

$$\begin{aligned}\sum_{x,y}\mu(x)\mathbf{P}(x,y)(\varphi(x)-\varphi(y))^2&=\sum_{x,y}\mu(x)\mathbf{L}(x,y)(\varphi(x)-\varphi(y))^2\\&=\sum_{x,y}\mu(x)\mathbf{L}(x,y)\varphi(x)^2-2\sum_{x,y}\mu(x)\mathbf{L}(x,y)\varphi(x)\varphi(y)+\sum_{x,y}\mu(x)\mathbf{L}(x,y)\varphi(y)^2\\&=\sum_x\mu(x)\Big(\sum_y\mathbf{L}(x,y)\Big)\varphi(x)^2-2\sum_{x,y}\mu(x)\mathbf{L}(x,y)\varphi(x)\varphi(y)+\sum_y\mu(y)\Big(\sum_x\mathbf{L}(y,x)\Big)\varphi(y)^2\\&=0-2\sum_{x,y}\mu(x)\mathbf{L}(x,y)\varphi(x)\varphi(y)-0\\&=2\langle-\mathbf{L}\varphi,\varphi\rangle_\mu\end{aligned}$$

où la réversibilité a été utilisée pour traiter le troisième terme comme le premier.

5. La positivité vient de la question précédente. La symétrie vient de la réversibilité. Rester à démontrer la définie-positivité. Comme la chaîne est irréductible et μ est invariante, il vient que $\mu(x)>0$ pour tout x. Donc si $\varphi\in\mathscr{F}$ vérifie $\langle-\mathbf{L}\varphi,\varphi\rangle_\mu=0$, alors $\varphi(x)=\varphi(y)$ pour tous x,y tels que $\mathbf{P}(x,y)>0$. Or comme $\mathbf{P}(x,y)$ est irréductible, il vient que φ est constante, et comme φ s'annule sur ∂D, cela donne $\varphi=0$.

6. Nous avons $\mu(x)\mathbf{L}(x,y)=\mathbf{DL}(x,y)$, où $\mathbf{D}(x,y)=\mu(x)\mathbb{1}_{x=y}$ (matrice diagonale $\mathrm{diag}(\mu(x):x\in\overline{D})$. La matrice de covariance de $\mathscr{G}$ est donc donnée par $(-\mathbf{DL})^{-1}$. Or d'après la q. 3, $\mathbf{L}^{-1}=\mathbf{G}_D$, d'où $(-\mathbf{DL})^{-1}=\mathbf{G}_D\mathbf{D}^{-1}$.

$$(\mathbf{G}_D\mathbf{D}^{-1})(x,y)=\mathbf{G}_D(x,y)/\mu(y)\quad\text{où}\quad\mathbf{G}_D(x,y)=\mathbb{E}^x\Big(\sum_{0\le k<\tau}\mathbb{1}_{\{X_k=y\}}\Big).$$

La loi $\mathscr{G}$ décrit un champ aléatoire sur D, le *champ libre gaussien discret* (Discrete Gaussian Free Field). Cela peut être vu comme un modèle d'*interface aléatoire*, et φ comme *fonction de hauteur*.

7. Pour la marche aléatoire simple $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $E=\mathbb{Z}^d$, $\mathbf{L}(x,y)=\frac{1}{2d}\mathbb{1}_{x\sim y}-\mathbb{1}_{x=y}$, il y a bien irréductibilité, la mesure de comptage est réversible, d'où la formule, avec $\beta_d=\frac{\alpha}{4d}$ où $\alpha>0$ est la valeur prise pas μ sur chaque état.

Éléments de solution du problème 1 (Renforcement, tiré d'un texte de Thierry Lévy)**.**
Nous reconnaissons des urnes de Pólya à peine déguisées.

1. Absence de renforcement : nous supposons que $r(x)=x$ pour tout $x>0$.
   (a) $(A_n)_{n\ge0}$ et $(B_n)_{n\ge0}$ sont constantes et égales à 1, et $A_0/(A_0+B_0)=1/2$.
   (b) Loi forte des grands nombres pour des v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli ;
   (c) Découle de la réécriture avec $(U_n)_{n\ge1}$.
   (d) C'est une chaîne de Markov irréductible récurrente : presque sûrement chaque état est visité une infinité de fois, et en particulier l'état 0 (la marche revient en 0 presque sûrement).
2. Renforcement linéaire : nous supposons que $r(x)=1+x$ pour tout $x>0$.

(a) Se démontre par récurrence sur n.

(b) Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(1+S_{n+1}(\alpha)\mid\mathscr{F}_n) &= 1+S_n(\alpha)+\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=a\}}\mid\mathscr{F}_n)\\ &= 1+S_n(\alpha)+\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{U_{n+1}\le\frac{1+S_n(\alpha)}{n+2}\}})\\ &= 1+S_n(\alpha)+\frac{1+S_n(\alpha)}{n+2}=(2+(n+1))\frac{1+S_n(\alpha)}{2+n},\end{aligned}$$

(c) La martingale prend ses valeurs dans $[0,1]$. Elle est donc bornée dans L^2, donc converge p.s. et dans L^2. En fait la bornitude a lieu dans L^p pour tout p donc la convergence a lieu dans L^p pour tout p. Alternativement, il est possible d'évoquer le théorème de convergence p.s. des sous-martingale bornées dans L^1 ou des surmartingales positives. Dan tous les cas, la convergence p.s. assure que la limite est dans $[0,1]$ p.s.

(d) La récurrence n'est pas difficile. La convergence en loi fait le reste.

3. Renforcement géométrique : nous supposons que $r(x)=\rho x$ pour tout $x>0$, où $\rho>1$.

(a) Par récurrence. À la suite de chaque tirage de boule dans l'urne, on modifie l'urne de sorte qu'elle contienne exactement ρ fois le nombre de boules de cette couleur.

(b) Provient de $\Delta_{n+1}=\Delta_n+\mathbb{1}_{\{U_n\le 1/(1+\rho^{-\Delta_n})\}}-\mathbb{1}_{\{U_n>1/(1+\rho^{-\Delta_n})\}}$;

(c) Provient du fait suivant : $\mathbb{E}(f(|\Delta_{n+1}|)\,|\,\mathscr{F}_n)=f(|\Delta_n|)+\mathbb{1}_{\{\Delta_n=0\}}\ge f(|\Delta_n|)$,

(d) Comme f est bornée, il en découle que la sous-martingale $f(|\Delta|)$ est uniformément bornée : elle converge donc presque sûrement (et en moyenne).

(e) Comme f est injective et comme $|\Delta|$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, les valeurs prises par $f(|\Delta|)$ sont discrètes, et comme $|\Delta|$ n'est pas constante à partir d'un certain rang, $f(|\Delta|)$ converge p.s. vers le seul point d'accumulation de $f(\mathbb{N})$ qui est $\lim_{n\to\infty}f(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{-\frac{k(k+1)}{2}}$. D'où $\lim_{n\to\infty}|\Delta_n|=\infty$ presque sûrement.

(f) Pour tous $N,d\ge 0$, la probabilité que $|\Delta|$ soit croissante à partir du rang N sachant que $|\Delta_N|=d$ vaut

$$\mathbb{P}(\forall n\ge N:|\Delta_{n+1}|=|\Delta_n|+1\,|\,|\Delta_N|=d)=\prod_{k=d}^{\infty}\frac{1}{1+\rho^{-k}}=:p_d.$$

La probabilité p_d ne dépend pas de N et vérifie $p_d\nearrow 1$ quand $d\to\infty$.

(g) La probabilité que $|\Delta|$ soit croissante à partir d'un certain rang (aléatoire) s'écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists N\ge 0,\forall n\ge N:|\Delta_{n+1}|=|\Delta_n|+1)&\ge\sup_{N\ge 0}\mathbb{P}(\forall n\ge N,|\Delta_{n+1}|=|\Delta_n|+1)\\ &=\sup_{N\ge 0}\sum_{d=0}^{\infty}p_d\mathbb{P}(|\Delta_N|=d).\end{aligned}$$

Or pour tout $d\ge 0$, on a $\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(|\Delta_N|=d)=0$ car nous savons que presque sûrement $\lim_{N\to\infty}|\Delta_N|=\infty$. Par conséquent, pour tout $D\ge 0$,

$$\sup_{N\ge 0}\sum_{d=0}^{\infty}p_d\mathbb{P}(|\Delta_N|=d)\ge\sup_{N\ge 0}\sum_{d=D}^{\infty}p_d\mathbb{P}(|\Delta_N|=d)\ge p_D.$$

Comme $p_D\to 1$ quand $D\to\infty$, il en découle que p.s. $(|\Delta|)_{n\ge 1}$ est croissante à partir d'un certain rang.

(h) La question précédente implique que presque sûrement X est absorbée par α ou β. La loi limite de X est une loi de Bernoulli symétrique par symétrie du modèle et des conditions initiales.