

**Examen 2023/2024**

Mercredi 17 janvier 2024, 9h-12h (3h)

Documents et internet non autorisés

Ce sujet vise à sonder votre niveau en topologie et calcul différentiel

Faites ce que vous pouvez, et ne vous en faites pas

Il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir 20/20

**Exercice 1** (Revêtements). Le cercle  $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$  est muni de la topologie trace de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

1. Montrer que  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  définie par  $\pi(x) = (\sin(2\pi x), \cos(2\pi x))$  est un revêtement de  $B = S^1$  par  $X = \mathbb{R}$  :  
 —  $\pi$  est surjective.  
 — pour tout  $b \in B$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $b$  et une famille au plus dénombrable  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $X$  deux à deux disjoints t.q.  $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$  et  $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow V$  est un homéomorphisme pour tout  $i \in I$ .
2. Montrer que pour tout entier  $n$ , l'application  $z \in \mathbb{C}^* \mapsto z^n \in \mathbb{C}^*$  est un revêtement de  $\mathbb{C}^*$  par  $\mathbb{C}^*$ .  
 Montrer que l'application  $z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}^*$  est un revêtement de  $\mathbb{C}^*$  par  $\mathbb{C}$ .  
 Construire un revêtement de la bande de Möbius  $[0, 1]^2 / ((0, y) \sim (1, 1 - y))$  par le cylindre  $X = S^1 \times [0, 1]$ .
3. Montrer que si  $\pi : X \rightarrow B$  est un revêtement alors  $\pi$  est un homéomorphisme local :  
 tout point de  $X$  a un voisinage ouvert  $U$  tel que  $\pi(U)$  est ouvert et  $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$  est un homéomorphisme.
4. Montrer si  $\pi : X \rightarrow B$  est un homéomorphisme local alors  $\pi$  est continue et ouverte.
5. Montrer que si  $\pi : X \rightarrow B$  est un homéomorphisme local entre un espace topologique  $X$  séparé et quasi-compact et un espace topologique  $B$  séparé et connexe, alors  $\pi$  est un revêtement de  $B$  par  $X$ .

**Exercice 2** (EDO linéaires : monotonie et stabilité).

Cet exercice ne nécessite pas la connaissance du chapitre du cours sur la stabilité au sens de Lyapunov.

Dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , on considère l'EDOL  $x'(t) = A(t)x(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , où l'application  $t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est continue.

1. Montrer la décroissance de  $\|x(t)\|$  si  $A(t)$  est symétrique négative.
2. Considérons le cas où  $n = 2$  et  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & (\lambda_2 - \lambda_1) \cot(\theta) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  avec  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq 0$ , et  $\theta \in (0, \pi)$ .  
 Montrer que  $\langle Ax, x \rangle > 0$  pour un  $x \in \mathbb{R}^2$  ssi  $|\theta - \frac{\pi}{2}| > \theta_*$  avec  $\theta_*$  à préciser en fonction de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .  
 D'où l'absence de décroissance de  $\|x(t)\|$  avec  $A$  non-symétrique à valeurs propres négatives.
3. Montrer que dans le cas autonome ( $A$  ne dépend pas du temps), et si  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ , alors il existe une norme  $\|\cdot\|_A$  telle que  $\|x(t)\|_A$  ne dépend du spectre de  $A$  qu'à travers les parties réelles des valeurs propres de  $A$ , et que si ces parties réelles sont  $< 0$  alors  $\|x(t)\|_A$  décroît vers 0, exponentiellement, quand  $t \rightarrow \infty$ .
4. Montrer que dans le cas autonome général, il existe une norme  $\|\cdot\|_A$  t.q. si les parties réelles des valeurs propres de  $A$  sont  $< 0$  alors  $\|x(t)\|_A \rightarrow 0$  exponentiellement quand  $t \rightarrow \infty$ , mais pas forcément de manière monotone.
5. On considère à présent le cas non-autonome de dimension  $n = 2$  suivant :

$$A(t) = P(t)A(0)P(t)^{-1} \quad \text{où} \quad P(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad A(0) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Montrer que

$$P(t)^{-1}x(t) = e^{t(A(0)-Q)}P(t)^{-1}x(0) \quad \text{où} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Que se passe-t-il pour  $\omega = -6$ , et  $A(0)$  égal au  $A$  de la question 2 avec  $\lambda_1 = -10$ ,  $\lambda_2 = -1$ , et  $\cot(\theta) = -4/3$ ?

**Problème 1** (Entre Hahn–Banach et calcul différentiel). Sauf mention explicite du contraire,  $(X, \|\cdot\|)$  est un evn réel.

1. On dit que  $X$  est strictement convexe lorsque pour tous  $x \neq y \in X$  tels que  $\|x\| = \|y\| = 1$ , on a  $\|x + y\| < 2$ .  
 Géométriquement, cela signifie que la sphère unité ne contient aucun segment de longueur non nulle.
  - (a) Montrer que  $X$  est strictement convexe ssi la boule unité fermée est strictement convexe :  
 pour tous  $x \neq y \in X$  tels que  $\|x\| \leq 1$ ,  $\|y\| \leq 1$ , et tout  $t \in (0, 1)$ , on a  $\|tx + (1 - t)y\| < 1$ .  
 Autrement dit, pour tous  $x \neq y \in X$  et tout  $z \in (x, y)$ , on a  $\|z\| < \max(\|x\|, \|y\|)$ .

- (b) Montrer que  $X$  est strictement convexe ssi le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire est co-linéaire positif : pour tous  $x, y \in X$ ,  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  implique qu'il existe  $\lambda \geq 0$  tel que  $x = \lambda y$  ou  $y = \lambda x$ .  
En particulier, l'espace  $\ell^p(I, \mathbb{R})$  avec  $1 < p < \infty$  et  $I$  au plus dénombrable est strictement convexe.
- (c) Montrer que ce n'est plus vrai quand  $p \in \{1, \infty\}$  dès que  $\text{card}(I) \geq 2$ .
- (d) Montrer que tout espace de Hilbert est strictement convexe.
- (e) (Bonus) Montrer que  $X$  est strictement convexe ssi il existe  $p > 1$  tel que  $\|\cdot\|^p$  est strictement convexe : pour tous  $x \neq y \in X$ , on a  $\|\frac{1}{2}(x + y)\|^p < \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p)$ ,  
et que si cela est vrai pour un  $p > 1$ , cela est vrai pour tout  $p > 1$ . Que se passe-t-il pour  $p = 1$  ?
2. Cette partie est consacrée à l'unicité dans le théorème de Hahn–Banach. On note  $(X', \|\cdot\|)$  le dual topologique de  $(X, \|\cdot\|)$ . Soit  $X_1 \subset X$  un sous-espace et  $f \in X'_1$ . On dit que  $g \in X'$  prolonge  $f$  lorsque  $g|_{X_1} = f$  et  $\|g\| = \|f\|$ .
- (a) Montrer que si  $g$  et  $h$  sont deux prolongements de  $f$  alors  $\|g + h\| \geq 2\|f\|$ .
- (b) En déduire que si  $X'$  est strictement convexe, alors il y a unicité du prolongement.
- (c) Montrer que  $X'$  est strictement convexe quand  $X$  est un espace de Hilbert.
- (d) Montrer que  $X'$  est strictement convexe quand  $X = \ell^p(I, \mathbb{R})$  avec  $1 < p < \infty$  et  $I$  au plus dénombrable.
- (e) Construire un contre exemple à l'unicité du prolongement lorsque  $p = 1$  et  $\text{Card}(I) \geq 2$ .
3. Cette partie est consacrée à un lien entre Hahn–Banach et Gateaux dérivabilité de la norme.
- (a) Montrer que pour tout  $x \in X$ ,  $\|x\| = 1$ , il existe  $g_x \in X'$  tel que  $g_x(x) = \|g_x\| = 1$ .  
Montrer que si  $X'$  est strictement convexe, alors  $g_x$  est unique.
- (b) Montrer que pour tout  $x \in X$  tel que  $\|x\| = 1$ ,  $y \in X$ ,  $t > 0$ , et  $g_x$  comme précédemment, on a

$$g_x(y) \leq \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}.$$

- (c) En déduire sous les mêmes hypothèses que (existence des limites et inégalités)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x - ty\| - \|x\|}{-t} \leq g_x(y) \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}.$$

Il en découle le fait remarquable suivant : si la norme  $\|\cdot\|$  de  $X$  est Gateaux dérivable en tout point de la sphère de  $X$  et dans toute direction, alors la forme linéaire  $g_x$  est unique pour tout  $x$  sur la sphère.

4. Cette partie est consacrée à la dérivée au sens de Carathéodory. Ici  $O \subset X$  est un ouvert de  $X$  et  $(Y, \|\cdot\|)$  est un evn réel. On dit que  $f : O \rightarrow Y$  est Carathéodory dérivable en  $x \in O$  quand il existe  $\Phi_x : O \rightarrow L(X, Y)$  telle que

$$\Phi_x \text{ est continue en } x \text{ et } f(y) = f(x) + \Phi_x(y)(y - x) \text{ pour tout } y \in O.$$

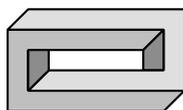
Cette notion généralise aux evn le familier taux d'accroissement  $(f(y) - f(x))/(y - x)$  du cas unidimensionnel  $X = Y = \mathbb{R}$ . Le but est d'établir que dérivabilité au sens de Carathéodory et au sens de Fréchet sont équivalentes.

- (a) Montrer que si  $f$  est Carathéodory dérivable en  $x$ , alors  $f$  est continue en  $x$ .
- (b) Montrer que si  $f$  est Carathéodory dérivable en  $x$ , alors elle est Fréchet dérivable en  $x$  et  $(Df)(x) = \Phi_x(x)$ .
- (c) Montrer que si  $f$  est Fréchet dérivable en  $x$ , alors elle est Carathéodory dérivable en  $x$ , et pour tout  $z \in X$ ,

$$\Phi_x(y)(z) := \begin{cases} \ell_{x,y}(z) \frac{f(y) - f(x) - (Df)(x)(y - x)}{\|y - x\|} + (Df)(x)(z) & \text{si } x \neq y \\ (Df)(x)(z) & \text{si } x = y \end{cases},$$

avec  $\ell_{x,y} \in X'$  bien choisi et à préciser.

- (d) Donner une condition sur  $X$  qui assure l'unicité de la construction de la dérivée ci-dessus.



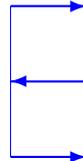
Brique d'Escher

Peu d'erreurs dans les copies, mais en voici deux :

- $\ell^p$ ,  $1 < p < \infty$ , est un Hilbert  
Ce n'est vrai que pour  $p = 2$
- Si  $H$  Hilbert alors  $H$  est isomorphe à  $\ell^2(I)$  avec  $I$  au plus dénombrable  
Ce n'est vrai que pour  $H$  Hilbert séparable

**Éléments de solution de l'exercice 1.** Voir par exemple un bon cours de base de topologie algébrique.

1. À compléter.
2. À compléter. Pour la bande de Möbius, il est possible de coller deux copies pour en faire un rectangle, qui peut donner un cylindre en quotientant une fois, et une bande de Möbius en quotientant deux fois. Le revêtement de la bande de Möbius obtenu de la sorte vérifie que l'image réciproque de tout point est de cardinal 2.



3. Soit  $x \in X$ , et  $b := \pi(x)$ . Comme  $\pi$  est un revêtement, il existe un voisinage  $V$  de  $b$  et une famille  $(U_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $X$  tels que  $x \in \pi^{-1}(V) = \cup_{i \in I} U_i$  et  $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow V$  est un homéomorphisme pour tout  $i \in I$ . Il suffit donc de poser  $U = U_i$  où  $i$  est choisi de sorte que  $x \in U_i$ . Le caractère au plus dénombrable de  $I$  n'a pas été utilisé, ni le fait que les  $U_i$  sont deux à deux disjoints (ce qui rend le choix de  $U_i$  unique).

4. Montrons que  $\pi$  est ouverte. Soit  $O$  un ouvert de  $X$ . Pour tout  $x \in O$ , il existe un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  tel que  $\pi|_{U_x} : U_x \rightarrow \pi(U_x)$  est un homéomorphisme, donc en particulier  $\pi(U_x)$  est ouvert. D'autre part, comme  $O$  est ouvert, il existe un voisinage ouvert  $U'_x$  de  $x$  tel que  $U'_x \subset O$ . Comme  $\pi|_{U_x}$  est un homéomorphisme,  $\pi(U_x \cap U'_x)$  est ouvert dans l'ouvert  $\pi(U_x)$ , il est donc ouvert dans  $B$ . Donc  $\pi(O) = \cup_{x \in O} \pi(U_x \cap U'_x)$  est ouvert dans  $B$ .

Montrons que  $\pi$  est continue. Soit  $x \in X$  et  $V$  un voisinage de  $b := \pi(x)$ . Soit  $U_x$  un voisinage de  $x$  tel que  $\pi|_{U_x} : U_x \rightarrow \pi(U_x)$  est un homéomorphisme. Alors  $\pi(U_x) \cap V$  est un voisinage ouvert de  $b$ . C'est un ouvert de  $\pi(U_x)$  donc  $U := \pi^{-1}(\pi(U_x) \cap V)$  est un ouvert de  $U_x$  donc de  $X$ , voisinage de  $x$ , et on a  $\pi(U) \subset V$ .

5. Montrons que  $\pi$  est surjective. Par la question précédente,  $\pi$  est continue et ouverte, et comme  $X$  est quasi-compact, il vient que  $\pi(X)$  est à la fois quasi-compact et ouvert. Comme  $B$  est séparé, il vient que  $\pi(X)$  est en fait fermé, et comme  $B$  est connexe, et  $\pi(X)$  non-vide, on obtient que  $\pi(X) = B$ .

Montrons que pour tout  $b \in B$ , l'ensemble  $\pi^{-1}(b)$  est fini. Comme  $B$  est séparé, le singleton  $\{b\}$  est fermé, donc  $\pi^{-1}(b)$  est fermé dans  $X$  quasi-compact, donc quasi-compact. Pour tout  $x \in \pi^{-1}(b)$ , soit  $U_x$  un ouvert tel que  $\pi|_{U_x} : U_x \rightarrow \pi(U_x)$  soit un homéomorphisme. Comme  $\pi^{-1}(b)$  est quasi-compact, il existe un sous-recouvrement fini par des ouverts (qu'on peut prendre deux à deux disjoints)  $f^{-1}(b) = \cup_{i=1}^n U_{x_i}$ . Comme  $\pi$  est injective sur chaque  $U_{x_i}$ , le point  $b$  contient un unique antécédant par  $\pi$  dans chaque  $U_{x_i}$ , et donc  $\pi^{-1}(b)$  est fini.

Construction du voisinage  $V$  de  $b \in B$  et une famille au plus dénombrable d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$  qui partitionne  $\pi^{-1}(V)$ . Avec la construction précédente, l'ensemble  $V := \cap_{i=1}^n \pi(U_{x_i})$  est un voisinage ouvert de  $b$ , et  $\{\pi^{-1}(V) \cap U_{x_i} : 1 \leq i \leq n\}$  est une famille d'ouverts de  $X$ , deux à deux disjoints, homéomorphes à  $V$  par  $\pi$ .

**Éléments de solution de l'exercice 2.** Pour en savoir plus <https://djalil.chafai.net/blog/2023/07/19/unstable-sol>

1. Si  $f(x) := \|x\|^2$  et  $a(t) := f(x(t))$  alors  $(Df)(x)(h) = 2\langle x, h \rangle$  et par dérivation des fonctions composées

$$a'(t) = (Df)(x(t))(x'(t)) = 2\langle x(t), x'(t) \rangle = 2\langle x(t), A(t)x(t) \rangle \leq 0.$$

2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , la quantité  $\langle Ax, x \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + (\lambda_2 - \lambda_1)x_1 x_2 \cot(\theta)$  atteint son maximum  $\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1) \cot(\theta)}{2}$  en  $x = (\sin(a), \cos(a))$  où  $a = \frac{2\theta + \pi}{4}$ . Donc avec  $\rho := \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in [0, 1)$ , on a

$$\langle Ax, x \rangle > 0 \text{ pour un } x \in \mathbb{R}^2 \text{ ssi } \sin(\theta) < \frac{1 - \rho}{1 + \rho},$$

(condition impossible à réaliser quand  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire que  $A$  est symétrique). On pose  $\theta_* := \arcsin \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$ .

3. Soit  $A = PDP^{-1}$ ,  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  inversible,  $D := \text{diag}(\lambda_k) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  diagonale. Alors

$$x(t) = e^{tA}x(0) = Pe^{tD}P^{-1}x(0) = P\text{diag}(e^{t\Re\lambda_k})\text{diag}(e^{t\Im\lambda_k})P^{-1}x(0)$$

donc en posant  $y(t) := P^{-1}x(t)$ , il vient

$$\|y(t)\| = \|\text{diag}(e^{t\Re\lambda_k})y(0)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n e^{2t\Re\lambda_k}|y_k(0)|^2}.$$

On peut donc poser  $\|\cdot\|_A := \|P^{-1}\cdot\|$ , restriction à  $\mathbb{R}^n$  d'une norme sur  $\mathbb{C}^n$ .

4. La décomposition de Jordan s'écrit  $A = P(D + N)P^{-1}$  où  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est inversible,  $D$  diagonale portant les valeurs propres de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ , et  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  nilpotente commutant avec  $D$  (la structure de  $N$  est plus précise : blocs de Jordan). On a donc  $e^{tA} = Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}$ , et on peut procéder comme pour la première question :

$$y(t) := P^{-1}x(t) = e^{tD}e^{tN}y(0) \quad \text{où} \quad e^{tN} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} N^k \text{ car } N \text{ est nilpotent.}$$

Cette fois-ci  $\|x(t)\|_A = \|y(t)\|$  dépend de  $x(0)$ ,  $D$ , mais aussi de  $N$  qui n'est pas spectrale. Si les parties réelles des valeurs propres de  $A$  sont  $< 0$  alors  $\|y(t)\|$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ , mais pas forcément de manière monotone car la présence de  $N$  contribue avec des termes polynomiaux qui brisent la monotonie exponentielle.

5. Comme  $x'(t) = A(t)x(t) = P(t)A(0)P(t)^{-1}x(t)$ , en posant  $y(t) := P(t)^{-1}x(t)$ , il vient

$$y'(t) = Ty(t) + (P(t)^{-1})'x(t) = A(0)y(t) - QP(t)^{-1}x(t) = (A(0) - Q)y(t)$$

car  $P(t) = e^{tQ}$  donc  $(P(t)^{-1})' = -QP(t)^{-1}$ . Donc  $y(t) = e^{t(A(0)-Q)}y(0)$  et donc  $x(t) = P(t)e^{t(A(0)-Q)}P(t)^{-1}x(0)$ . Ceci montre que  $P(t)^{-1}x(t)$  est solution d'une EDLO autonome de matrice  $A(0) - Q$ .

Lorsque  $\omega = -6$ , et  $A(0)$  égal au  $A$  de la question 2 avec  $\lambda_1 = -10$ ,  $\lambda_2 = -1$ , et  $\cot(\theta) = -4/3$ , on trouve

$$A(0) - Q = \begin{pmatrix} -10 & 6 - 12 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$$

qui a pour valeurs propres  $-13$  et  $2$ , et la présence d'une valeur propre  $> 0$  fait que  $x(t)$  peut exploser quand  $t \rightarrow \infty$  pour  $x(0)$  bien choisi, alors même que les valeurs propres de  $A(t)$  (qui sont celle de  $A(0)$ ) sont toutes  $< 0$ .

### Éléments de solution du problème 1.

1. La stricte convexité de l'espace signifie aussi que les points de la sphères sont tous des points extrémaux de la boule fermée. La Gateaux dérivabilité de la norme de  $X$  implique la stricte convexité de  $X'$ . Pour en savoir plus, page 31 de Lindenstrauss et Johnson, *Handbook of the geometry of Banach spaces*, volume 1.

(a) La condition est suffisante car il suffit de la spécialiser au cas  $\|x\| = \|y\| = 1$  et  $t = 1/2$ . Réciproquement, soit  $t \in (0, 1)$  et  $x \neq y$  avec  $\|x\| \leq 1$  et  $\|y\| \leq 1$ . Si  $\|x\| < 1$  ou  $\|y\| < 1$ , il vient

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| < 1.$$

Reste à considérer le cas  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Comme  $x \neq y$  et comme l'espace est strictement convexe, on a  $\|x + y\| < 2$ , donc  $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$ . Maintenant, si  $t \in [1/2, 1)$ , alors

$$tx + (1-t)y = sx + (1-s)\frac{x+y}{2} \quad \text{où} \quad s := 2t - 1 \in [0, 1/2),$$

et comme  $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$ , il vient que  $\|tx + (1-t)y\| < 1$ . Idem quand  $t \in (0, 1/2]$  en permutant  $x$  et  $y$ .

(b) Supposons que  $X$  est strictement convexe. Soit  $x, y \in X$  tels que  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ . Si  $x = 0$  ou  $y = 0$  alors ils sont colinéaires positifs. Supposons donc que  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ . Alors, avec  $t := \|x\| / (\|x\| + \|y\|)$ ,

$$\left\| t \frac{x}{\|x\|} + (1-t) \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x+y\|} + \frac{y}{\|x+y\|} \right\| = 1,$$

et la caractérisation de la question précédente de la stricte convexité donne alors que  $x/\|x\| = y/\|y\|$  ce qui est une manière de dire que  $x$  et  $y$  sont colinéaires positifs.

Réciproquement, supposons que le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire est co-linéaire positif. Soient  $x \neq y \in X$  tels que  $\|x\| = \|y\| = 1$ . On raisonne par l'absurde en supposant que  $\|x + y\| \geq 2$ , en fait  $= 2$  par l'inégalité triangulaire, et le cas d'égalité donne par exemple  $x = \lambda y$  avec  $\lambda \geq 0$ , d'où  $\lambda = 1$  car  $x$  et  $y$  sont de même norme, d'où  $x = y$ , ce qui contredit le fait que  $x \neq y$ .

Remarque : l'inégalité triangulaire  $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$  dans  $\ell^p$  porte le nom d'inégalité de Minkowski. Si  $1 < p < \infty$ , son cas d'égalité « co-linéaire positif » découle de l'inégalité de Hölder et de son cas d'égalité, conséquence de l'inégalité de Young  $|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$ ,  $q := 1/(1 - 1/p)$ , et de son cas d'égalité  $|a|^p = |b|^q$ .

- (c) Pour  $p = 1$  et  $\text{card}(I) \geq 2$ , on peut prendre  $x := e_i$  et  $y := e_j$  avec  $i \neq j$ , ce qui donne  $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ ,  $x \neq y$  et  $\|x + y\|_1 = 2$ , en fait tout le segment  $[e_i, e_j]$  est contenu dans la sphère unité de  $\ell^1$ . De même, pour  $p = \infty$  et  $\text{card}(I) \geq 2$ , on peut prendre  $x := e_i$  et  $y := e_i + e_j$ , avec  $i \neq j$ , ce qui donne  $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$  et  $\|x + y\|_\infty = 2$ , en fait tout le segment  $[e_i - e_j, e_i + e_j]$  est contenu dans la sphère unité de  $\ell^\infty$ . Géométriquement, en  $\dim \geq 2$ , les sphères  $\ell^1$  et  $\ell^\infty$  sont des polytopes, un diamant et un cube respectivement, et contiennent en particulier des segments de longueur non nulle, au contraire de la sphère  $\ell^p$  quand  $1 < p < \infty$ , le cas le plus symétrique étant la sphère  $\ell^2$ , hilbertienne, invariante par rotation.
- (d) Soit  $X$  Hilbert,  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ ,  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Par l'absurde : si  $\|x + y\| \geq 2$ , en fait  $= 2$  par inégalité triangulaire, alors par identité du parallélogramme  $\|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 \leq 0$ , d'où  $x = y$ , impossible. Alternativement, on peut observer que  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$  donc si  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  alors  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$  d'où le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui est connu comme étant colinéaire positif. Mais cette preuve est moins autonome.
- (e) Supposons que  $X$  est strictement convexe. Soient  $x \neq y \in X$ , et  $p > 1$ . Considérons pour l'instant le cas  $y \neq 0$  et  $x/\|x\| \neq y/\|y\|$ . Comme  $x$  et  $(\|x\|/\|y\|)y$  sont différents et de même norme, on obtient, via l'inégalité triangulaire, la croissance de  $u \mapsto u^p$ , la stricte convexité de l'espace, et la convexité de  $u \mapsto u^p$ ,

$$\|x + y\|^p \leq \left( \left\| x + \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| + \left(1 - \frac{\|x\|}{\|y\|}\right) \|y\| \right)^p < \left(2\|x\| + \|y\| - \|x\|\right)^p \leq 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p),$$

ce qui est l'inégalité attendue. Dans le cas  $y = 0$ , l'inégalité attendue s'écrit  $\|x\| < 2^{p-1}\|x\|$ , et comme  $x \neq 0$  car  $x \neq y$ , cela impose  $p > 1$ . Dans le cas où  $y \neq 0$  et  $x/\|x\| = y/\|y\|$ , les vecteurs  $x$  et  $y$  sont co-linéaires strictement positifs, par exemple  $y = \lambda x$  avec  $\lambda > 0$ , en particulier  $x \neq 0$ , et dans ce cas l'inégalité attendue s'écrit  $(1 + \lambda)^p \|x\|^p < 2^{p-1}(1 + \lambda^p)\|x\|^p$ , qui a bien lieu par stricte convexité de  $u \mapsto u^p$  quand  $p > 1$ .

Réciproquement, s'il existe  $p > 1$  tel que  $\|\cdot\|^p$  est strictement convexe, alors en spécialisant à  $\|x\| = \|y\| = 1$ ,  $x \neq y$ , on obtient  $\|x + y\|^p < 2^p$ , donc  $\|x + y\| < 2$  car  $u \mapsto u^p$  est strictement croissante.

Quid du cas  $p = 1$ , c'est-à-dire que la norme elle-même? Son homogénéité positive et l'inégalité triangulaire entraînent sa convexité. En revanche elle n'est jamais strictement convexe, car elle est positivement homogène : comme  $\|tx\| = t\|x\|$ , la propriété de convexité stricte n'est jamais vérifiée si  $y = 0$ .

2. Voir aussi Exercice 1.1 dans Brézis, *Functional analysis, Sobolev spaces, and PDE*, Springer.

- (a) On a  $\|g + h\| = \sup_{x \in X: \|x\|=1} \|g(x) + h(x)\| \geq \sup_{x \in X_1: \|x\|=1} \|g(x) + h(x)\| = 2\|f\|$ .
- (b) Si  $f = 0$ , il n'y a rien à démontrer car l'unique prolongement est identiquement nul car de norme 0. Supposons que  $f \neq 0$ , c'est-à-dire que  $\|f\| > 0$ . Soit  $g$  et  $h$  deux prolongements de  $f$ . On raisonne par l'absurde en supposant que  $g \neq h$ . La stricte convexité de  $X'$  utilisée avec  $g/\|f\|$  et  $h/\|f\|$ , qui sont distincts et de norme unité donne  $\|g + h\| < 2\|f\|$ , ce qui contredit le résultat de la question précédente. Donc  $f = g$ .
- (c) Soit  $X$  Hilbert. La stricte convexité de  $X'$  est équivalente à celle de  $X$  démontrée dans la partie précédente, grâce à l'isométrie surjective anti-linéaire  $\Phi : X \rightarrow X'$  via le théorème de représentation de Riesz. En fait pour établir que  $X'$  est strictement convexe, il suffit que  $X'$  soit Hilbert, peut importe l'isométrie.
- (d) Soit  $X = \ell^p(I, \mathbb{R})$  avec  $1 < p < \infty$  et  $I$  au plus dénombrable. Comme il existe une isométrie linéaire surjective de  $(\ell^p)'$  dans  $\ell^q$  où  $q := 1/(1 - 1/p) \in (1, \infty)$  est le conjugué de Hölder de  $p$ , il vient que  $X'$  est strictement convexe ssi  $X$  l'est, ce qui est le cas d'après la partie précédente.

(e) Si  $p = 1$  et  $\text{card}(I) \geq 2$ , on peut prendre  $X_1 := \mathbb{R}e_i$ ,  $f(\lambda e_i) := \lambda$ ,  $g(x) := e_i^*(x) = x_i$ ,  $h(x) := (e_i^* + e_j^*)(x) = x_i + x_j$ , avec  $i \neq j$ . On a alors  $\|f\| = \|g\| = \|h\| = 1$ ,  $f = g|_{X_1} = h|_{X_1}$ , mais  $g \neq h$ . Alternativement, on peut observer que  $(\ell^1)'$  est isomorphe à  $\ell^\infty$ , qui n'est pas strictement convexe d'après la partie précédente.

3. Pour en savoir plus, p. 31 de Lindenstrauss et Johnson, *Handbook of the geometry of Banach spaces*, vol. 1.

(a) Soit  $X_1 := \mathbb{R}x \subset X$ , et  $f_x : \lambda x \in \mathbb{R}x \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$ . On  $f_x \in X'_1$ ,  $f_x(x) = 1$ , et  $\|f_x\| = 1$ . Le théorème de Hahn–Banach fournit  $g_x \in X'$  tel que  $g_x|_{X_1} = f_x$  et  $\|g_x\| = \|f_x\|$ , ce qui donne  $g_x(x) = f_x(x) = 1$ , et  $\|g_x\| = 1$ .

Si  $X'$  est strictement convexe, alors le prolongement est unique d'après la partie précédente.

(b) Pour tout  $t > 0$ , on a  $1 + tg_x(y) = g_x(x + ty) \leq \|x + ty\|$ , d'où l'inégalité attendue.

(c) La fonction  $t > 0 \mapsto \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$  est croissante car  $\|tx + tsy\| - \|sx + sty\| \leq \|(t-s)x\|$  pour  $0 < s \leq t$  par l'inégalité triangulaire, d'où l'existence de la limite à droite. Idem pour la limite à gauche par symétrie.

4. Source principale : <https://arxiv.org/abs/1910.11531>

(a) L'application  $y \mapsto f(x) + \Phi_x(y)(y - x)$  est continue car composée d'applications continues en  $x$ .

(b) Comme  $f$  est Carathéodory dérivable en  $x$ , on a, en exploitant la définition de  $\Phi_x$  et de  $L(X, Y)$ ,

$$\|f(y) - f(x) - \Phi_x(x)(y - x)\| = \|(\Phi_x(y) - \Phi_x(x))(y - x)\| \leq \|\Phi_x(y) - \Phi_x(x)\| \|y - x\|$$

et  $\lim_{y \rightarrow x} \|\Phi_x(y) - \Phi_x(x)\| = 0$  par continuité en  $x$  de  $y \mapsto \Phi_x(y)$ .

Donc  $f$  est Fréchet dérivable en  $x$  et  $(Df)(x) = \Phi_x(x) \in L(X)$ .

(c) Tout d'abord, la formule proposée donne  $\Phi_x(y)(y - x) = f(y) - f(x)$  à condition que  $\ell_{x,y}(y - x) = \|y - x\|$ . Un tel  $\ell_{x,y} \in X'$  est fourni par le théorème de Hahn–Banach appliqué à la forme linéaire continue

$$\lambda(y - x) \in \{\lambda(y - x) : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset X \mapsto \lambda \|y - x\| \in \mathbb{R}.$$

De plus, lorsque  $x \neq y$ , pour tout  $z \in X$ , en utilisant la Fréchet dérivabilité de  $f$  en  $x$ ,

$$\|\Phi_x(y)(z) - \Phi_x(x)(z)\| = |\ell_{x,y}(z)| \frac{\|f(y) - f(x) - (Df)(x)(y - x)\|}{\|y - x\|} \leq \|\ell'\| \|z\| o_{y \rightarrow x}(1).$$

Par conséquent,  $\Phi_x : O \rightarrow L(X, Y)$  est continue en  $x$  et  $f$  est Carathéodory dérivable en  $x$ .

(d) D'après la partie 1, quand  $X'$  est strictement convexe,  $\ell_{x,y}$  est unique!