Examen 2022/2023

Lundi 16 janvier 2023, 14h-17h, documents et internet non-autorisés
Faites ce que vous pouvez, et ne vous en faites pas, il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir 20/20

Ce sujet comporte quatre parties : exercice 1, problème 1, exercice 2, exercice 3, traitables indépendamment.
Le résultat du problème 1 est explicitement admis dans l'exercice 2.
Le résultat de la question 1 de l'exercice 1 et le résultat de l'exercice 2 sont explicitement admis dans l'exercice 3.

Exercice 1 (Théorème d'existence de Peano via schéma d'Euler et théorème d'Arzelà–Ascoli)**.**
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant : *Si $f : I \times O \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est continue, $I \times O$ ouvert, et $(t_0, x_0) \in I \times O$, alors l'EDO $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $x(t_0) = x_0$, admet une solution locale.* D'après le théorème fondamental du calcul, cela revient à trouver $x \in \mathscr{C}(J, O)$, $t_0 \in J \subset I$, et $x_t = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\mathrm{d}s$ pour tout $t \in J$.

1. Montrer qu'il existe $T > 0, r_* > 0$ t.q. $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r_*) \subset I \times O$ et $M := \sup_{(t,x)\in C} \|f(t,x)\| < \infty$.
2. Montrer que si x est solution sur $[t_0 - T_*, t_0 + T_*]$, $T_* < \min(T, \frac{r_*}{M})$, alors $(t, x(t)) \in C$ pour tout $t \in [t_0 - T_*, t_0 + T_*]$.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $(t_i^{(n)})_{0 \leq i \leq n}$ la subdivision de $[t_0, t_0 + T_*]$ telle que $t_0^{(n)} := t_0 < \cdots < t_n^{(n)} := t_0 + T_*$ et $t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)} = h_n := \frac{T_*}{n}$ pour tout i. On définit la fonction continue affine par morceaux $x^{(n)} : [t_0, t_0 + T_*] \to \mathbb{R}^d$, par récurrence sur i en posant (on parle de *schéma d'Euler explicite*)
$$\begin{cases} x^{(n)}(t_0) & := x_0 \\ x^{(n)}(t) & := x^{(n)}(t_i^{(n)}) + (t - t_i^{(n)}) f(t_i^{(n)}, x^{(n)}(t_i^{(n)})) \quad \text{pour tout } t \in [t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}] \end{cases}$$
Montrer que $x^{(n)}(t) \in \overline{B}(x_0, r_*)$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T_*]$ et $\|x^{(n)}\|_{\mathrm{Lip}} \leq M$.
4. Déduire de la question précédente que $x^{(n)}$ est continue uniformément en t et n (équicontinuité uniforme).
5. Déduire des deux question précédentes qu'il existe une sous-suite $(x^{(n_k)})$ qui converge uniformément vers une fonction $x_* : [t_0, t_0 + T_*] \to \overline{B}(x_0, r)$ continue et vérifiant $x_*(t_0) = x_0$.
6. Considérons le module de continuité de f sur C défini pour $u > 0$ assez petit par
$$\omega_f(u) := \sup\{\|f(s_1, y_1) - f(s_2, y_2)\| : |s_1 - s_2| + \|y_1 - y_2\| \leq u\}.$$
Montrer que $\lim_{u\to 0} \omega_f(u) = 0$.
7. Montrer que tout tout $t \in \bigcup_i (t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})$, $\|(x^{(n)})'(t) - f(t, x^{(n)}(t))\| \leq \omega_f(h_n + h_n M)$.
8. En déduire que x_* vérifie la formulation intégrale de l'EDO sur $[t_0, t_0 + T_*]$.
9. En déduire l'existence d'une solution locale.

Éléments de solution de l'exercice 1.

1. L'existence de C découle du fait que $I \times O$ est ouvert dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ localement compact.
La finitude de M découle du fait que f est continue et C compact.
Alternativement on peut utiliser la continuité de f et la compacité locale de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$: $f^{-1}(B(f(t_0, x_0), \varepsilon))$.
2. La formulation intégrale (première question) pour la solution locale x donne, quand $t \in [t_0 - T_*, t_0 + T_*]$,
$$\|x(t) - x_0\| \leq \int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \|f(s, x(s))\|\mathrm{d}s \leq |t - t_0| M \leq T_* M \leq r_*.$$
On dit que C est un *cylindre de sécurité* pour l'équation différentielle.
3. Découle par récurrence sur i de la définition de T_*, M, r_*.
4. Découle du fait que $\sup_n \|x^{(n)}\|_{\mathrm{Lip}} \leq M < \infty$.
5. Découle du théorème d'Arzelà–Ascoli sur $\mathscr{C}([t_0, t_0 + T_*], \overline{B}(x_0, r_*))$.
6. Découle du fait que f est uniformément continue sur le compact C (théorème de Heine).

7. Si $t \in (t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})$, alors
$$|t - t_i^{(n)}| + \|x^{(n)}(t) - x^{(n)}(t_i^{(n)})\| = h_n + (t - t_i^{(n)})\|f(t_i^{(n)}, x^{(n)}(t_i^{(n)}))\| \leq h_n + h_n M,$$
d'où, par définition du module de continuité,
$$\|(x^{(n)})'(t) - f(t, x^{(n)}(t))\| = \|f(t_i^{(n)}, x^{(n)}(t_i^{(n)})) - f(t, x^{(n)}(t))\| \leq \omega_f(h_n + h_n M).$$
8. De la question précédente on obtient, pour tout $t \in [t_0, t_0 + T_*]$, par l'inégalité des accroissements finis,
$$\left\|(x^{(n_k)})(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x^{(n_k)}(s))\mathrm{d}s\right\| \leq T_* \omega_f(h_{n_k} + h_{n_k} M).$$
Par convergence uniforme, on en déduit que x_* vérifie la formulation intégrale de l'EDO.
9. En symétrisant, on obtient une solution sur $[t_0 - T_*, t_0]$, et donc une solution sur $[t_0 - T_*, t_0 + T_*]$.

Problème 1 (Théorème de point fixe de Brouwer)**.**
Le but de ce problème est de démontrer le théorème de point fixe de Brouwer : *si C est une partie convexe, compacte, non-vide dans $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to C$ est continue, alors f admet un point fixe.*
Dans ce problème, on note $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$, $\overline{B}_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, $S_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.
On dit que $f : A \to A' \subset A$ est une rétraction de $A \to A'$ lorsque $f(x) = x$ pour tout $x \in A'$.

1. Démontrer le théorème de Brouwer en dimension $n = 1$ lorsque $C = [0, 1]$.
2. Montrer que si $f : \overline{B}_n \to \overline{B}_n$ est continue et n'a pas de point fixe alors $\inf_{x \in \overline{B}_n} \|f(x) - x\| > 0$.
3. Montrer que si $f : \overline{B}_n \to \overline{B}_n$ est continue et sans point fixe alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme à n variables P_ε tel que $P_\varepsilon(\overline{B}_n) \subset \overline{B}_n$, sans point fixe sur $\overline{B}_n$, tel que $\|f - P_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ sur $\overline{B}_n$.
4. Supposons que $f : \overline{B}_n \to \overline{B}_n$ est continue et sans point fixe. Montrer que pour tout $x \in \overline{B}_n$, la demi-droite $\Delta_x := \{f(x) + \lambda(x - f(x)) : \lambda > 0\}$ coupe S_n en un unique point
$$f(x) + \frac{\sqrt{a^2 + 1 - \|f(x)\|^2} - a}{\|x - f(x)\|}(x - f(x)) \quad \text{où} \quad a := \frac{\langle f(x), x - f(x)\rangle}{\|x - f(x)\|}.$$
En déduire qu'il existe une rétraction $g : \overline{B}_n \to S_n$ de même régularité que f.
5. Déduire des deux questions précédentes que si $f : \overline{B}_n \to \overline{B}_n$ est continue et sans point fixe, alors on peut construire une rétraction $g : \overline{B}_n \to S_n$ $\mathscr{C}^0(\overline{B}_n) \cap \mathscr{C}^1(B_n)$ avec Dg prolongeable par continuité à $\overline{B}_n$.
Dans la suite du problème, on considère une telle fonction g.
6. Soit $g_t(x) := (1-t)x + t g(x)$. Montrer que $c := \sup_{x \in B_n} \|Dg(x)\| < \infty$ et que pour tout $t \in (0, 1/(1+c))$, l'application $g_t : B_n \to B_n$ est bien définie et est injective.
7. Montrer que g_t, vue comme fonction $\overline{B}_n \to \overline{B}_n$, est bien définie, continue, et $g_t(x) = x$ pour tout $x \in S_n$.
8. Montrer que pour $t \in (0, 1/(1+c))$, $g_t : B_n \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme local, c'est-à-dire que pour tout $x \in B_n$, il existe des voisinages ouverts U et V de x et $g_t(x)$ tels que la restriction $g_t : U \to V$ est un difféomorphisme.
9. Montrer que pour $t \in (0, 1/(1+c))$, $g_t(B_n)$ est ouvert et que $g_t : B_n \to g_t(B_n)$ est un difféomorphisme.
10. Montre que pour $t \in (0, 1/(1+c))$, $g_t(B_n)$ est fermé puis que $g_t(B_n) = B_n$ (d'où $g_t : B_n \to B_n$ difféomorphisme).
11. Montrer que le polynôme suivant est constant et non-nul : $P(t) := \displaystyle\int_{B_n} \det(Dg_t(x))\mathrm{d}x$.
Indication : montrer que $P(t) = \text{volume}(B_n)$ pour tout $t \in (0, 1/(1+c))$.
Note : question bonus qui nécessite un résultat abordé dans le cours d'intégration et probabilités.
12. En déduire, par l'absurde, le théorème de Brouwer quand $C = \overline{B}_n$.
Indication : S_n est de dimension $n - 1$.
13. Soit C une partie convexe compacte dans $\mathbb{R}^m$, dont l'intérieur contient 0. Soit $j(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\}$.
Montrer qu'il existe $r, R \in (0, \infty)$ tels que pour tous $\lambda \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^m$, on a $j(\lambda x) = \lambda j(x)$, $\frac{1}{R}\|x\| \leq j(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|$, et $j(x + y) \leq j(x) + j(y)$. En déduire que j est Lipschitz. Indication : choisir r, R tels que $\overline{B}(0, r) \subset C \subset \overline{B}(0, R)$.
14. En déduire que toute partie C convexe compacte non-vide dans $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\overline{B}_m$, pour un $m \leq n$.

15. En déduire le théorème de Brouwer.

Des références bibliographiques et une liste de preuves se trouvent pas exemple sur `https://en.wikipedia.org/wiki/Brouwer_fixed-point_theorem` La preuve étudiée dans ce problème semble être due à Władysław Kulpa (1989), variante de celle de Morris Hirsch qui elle se termine par un appel au théorème de Sard.

Éléments de solution du problème 1.

1. La fonction $F : [0,1] \to [0,1]$ définie par $F(x) := f(x) - x$ est continue et vérifie $F(0) = f(0) \geq 0$ et $F(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $v \in [F(1), F(0)]$, il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = v$. En particulier, pour $v = 0$, c est un point fixe de f.
2. Comme f est continue et $\overline{B}_n$ est compact, l'infimum est atteint, et n'est pas nul car f n'a pas de point fixe.
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, le théorème de Stone–Weierstrass fournit un polynôme Q_ε tel que $\|Q_\varepsilon - f\|_\infty \leq \varepsilon$ sur $\overline{B}_n$. Comme Q_ε ne prend pas forcément ses valeurs dans $\overline{B}_n$, on pose $P_\varepsilon := \frac{1}{1+\varepsilon} Q_\varepsilon$. On a alors
$$\|P_\varepsilon\|_\infty \leq \frac{1}{1+\varepsilon}(\|Q_\varepsilon - f\|_\infty + \|f\|_\infty) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}(\varepsilon+1) = 1,$$
tandis que
$$\|P_\varepsilon - f\|_\infty \leq \frac{1}{1+\varepsilon}\|Q_\varepsilon - (1+\varepsilon)f\|_\infty \leq \|Q_\varepsilon - (1+\varepsilon)f\|_\infty \leq \|Q_\varepsilon - f\|_\infty + \varepsilon\|f\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$
Pour faire en sorte que P_ε n'ait pas de point fixe, on prend $0 < \varepsilon < \varepsilon_f$ où $\varepsilon_f := \frac{1}{2}\min_{x\in\overline{B}_n}\|f(x) - x\|$, et cela est possible var $\varepsilon_f > 0$ d'après la question précédente.
4. Pour tout $x \in \overline{B}_n$, on a $f(x) \neq x$, donc Δ_x coupe S_n en un unique point noté $r(x)$, qui vérifie
$$r(x) = f(x) + \lambda_x(x - f(x)), \quad \lambda_x \geq 0, \quad \|r(x)\| = 1.$$
Donc λ_x est l'unique solution positive de l'équation en λ
$$\lambda^2\|x - f(x)\|^2 + 2\lambda\langle f(x), x - f(x)\rangle + \|f(x)\|^2 - 1 = 0,$$
d'où
$$r(x) := f(x) + \frac{\sqrt{a^2 + 1 - \|f(x)\|^2} - a}{\|x - f(x)\|}(x - f(x)) \quad \text{où} \quad a := \frac{\langle f(x), x - f(x)\rangle}{\|x - f(x)\|}.$$
Comme le dénominateur est minoré par $\min_{x\in\overline{B}_n}\|f(x) - x\| > 0$ (seconde question), il vient que r a la même régularité que f. Comme r est une rétraction, on peut poser $g := r$.
5. S'obtient en utilisant la question précédente avec le P_ε de la question d'avant.
6. La régularité de g fait que $c := \sup_{x\in B_n}\|Dg(x)\| < \infty$.
On a $g_t(B_n) \subset B_n$ car si $x \in B_n$, comme $g(x) \in S_n$, il vient que $g_t(x) \in B_n$ (combinaison convexe stricte).
g_t est injective, car si $x, y \in B_n$ tels que $g_t(x) = g_t(y)$, alors par l'inégalité des accroissements finis,
$$(1-t)\|x - y\| = t\|g(x) - g(y)\| \leq tc\|x - y\|,$$
et lorsque $0 < t < 1/(1+c)$, il vient que $\|x - y\| = 0$.
7. On a $g_t(B_n) \subset B_n$, tandis que $g_t(x) = x$ pour tout $x \in S_n$ car g est une rétraction, donc en particulier $g_n(\overline{B}_n) \subset \overline{B}_n$. La continuité de g_t sur $\overline{B}_n$ découle de celle de g.
8. Si $x \in B_n$, alors $(Dg_t)(x) = (1-t)\mathrm{id} + t(Dg)(x) = \mathrm{id} + t((Dg)(x) - \mathrm{id})$ donc si $0 < t < 1/(1+c)$ alors $Dg_t(x)$ est inversible, et d'après le théorème d'inversion locale, $g_t : B_n \to B_n$ est un difféomorphisme local.
9. Comme g_t est un difféomorphisme local, c'est une application ouverte, donc $g_t(B_n)$ est ouvert. Comme $g_t : B_n \to B_n$ est un difféomorphisme local injectif, il vient que $g_t : B_n \to g_t(B_n)$ est un difféomorphisme.
10. Il suffit d'établir que $g_t : B_n \to B_n$ est surjective, c'est-à-dire que $g_t(B_n) = B_n$. Or comme B_n est connexe et $g_t(B_n)$ est un ouvert non-vide de B_n, il suffit d'établir que $g_t(B_n)$ est fermé dans B_n. Soit donc $(g_t(x_n))$ une suite dans $g_t(B_n)$ qui converge vers $y \in B_n$. Comme $\overline{B}_n$ est compact, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $x \in \overline{B}_n$, et comme g_t est continue sur $\overline{B}_n$, on a $y = g_t(x)$. Or $x \in S_n$ est impossible car cela donnerait $x = g_t(x) = y \in B_n$. Donc $x \in B_n$, et $g_t(B_n)$ est bien fermé dans B_n.

11. Grâce à la question précédente, pour $t \in (0, 1/(1+c))$, le changement de variable $y = g_t(x)$ est licite, vérifie $\det(Dg_t(x)) > 0$, et donne $P(t) = \mathrm{volume}(B_n)$, donc P est constant et non-nul.
12. Supposons par l'absurde que $f : \overline{B}_n \to \overline{B}_n$ continue et sans point fixe. On construit alors g_t et $P(t)$ comme précédemment. L'application $Dg(x)$ ne peut pas être de rang plein car le théorème d'inversion locale donnerait alors une boule de $\mathbb{R}^n$ incluse dans S_n (impossible). Comme $Dg(x)$ n'est pas de rang plein, son déterminant est nul, et donc $P(1) = 0$, ce qui est impossible car $P(1) = \mathrm{volume}(B_n)$. Donc f admet un point fixe.
13. L'application j est la jauge du corps convexe C, ou fonctionnelle de Minkowski. Elle est < 1 sur l'intérieur de C, $= 1$ sur la frontière de C, et > 1 à l'extérieur de C.

    L'homogénéité $j(\lambda x) = \lambda j(x)$ découle de la définition de j.

    Comme 0 est à l'intérieur de C, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(0, r) \subset C$. Donc $\|y\| \leq r$ implique $j(y) \leq 1$. Donc pour tout x, $j(x) = \frac{\|x\|}{r} j(r\frac{x}{\|x\|}) \leq \frac{1}{r}\|x\|$.

    Comme C est compact, il existe $R > 0$ tel que $C \subset \overline{B}(0, R)$. Donc pour tout x, si $\lambda > 0$ vérifie $x \in \lambda C$ alors $\frac{1}{R}\|x\| \leq \lambda$, et en prenant l'infimum sur λ on obtient $\frac{1}{R}\|x\| \leq j(x)$.

    Pour la sous-additivité, on remarque que si $j(x) < a$ et $j(y) < b$ alors $j(x+y) \leq a+b$ car comme C est convexe,

    $$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a\frac{x}{a} + b\frac{y}{b}}{a+b} \in C,$$

    donc $j(\frac{x+y}{a+b}) \leq 1$ et donc $j(x+y) = (a+b)j(\frac{x+y}{a+b}) \leq a+b$.

    Pour le caractère Lipschitz, on écrit, pour tous x, y, par sous-additivité

    $$j(x) \leq j(x-y) + j(y) \quad \text{et} \quad j(y) \leq j(y-x) + j(x)$$

    d'où $|j(x) - j(y)| \leq \max(j(x-y), j(y-x)) \leq \frac{1}{R}\|x-y\|$.
14. En considérant le sous-espace affine engendré par C, qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ pour un $m \leq n$, on peut supposer que C est d'intérieur non-vide, et en translatant (les translation sont des homéomorphismes), supposer de plus que 0 est dans l'intérieur de C. L'application $h(x) := j(x)\frac{x}{\|x\|}$ si $x \neq 0$ et $h(0) := 0$ est continue car j est continue car Lipschitz. De plus elle est inversible d'inverse donné par $h^{-1}(y) = \frac{\|y\|}{j(y)} y$ si $y \neq 0$ et $h^{-1}(0) = 0$. Cet inverse est continu, et h est un homéomorphisme de C dans B_m.
15. Soit $h : \overline{B}_m \to C$ un homéomorphisme, $1 \leq m \leq n$. Si $x \in \overline{B}_n$ est le point fixe de la fonction continue $h^{-1} \circ f \circ h : \overline{B}_n \to \overline{B}_n$ fourni par la question précédente, alors $h(f(h(x))) = h(x)$, donc $h(x)$ est un point fixe de f.

Exercice 2 (Théorème de point fixe de Schauder)**.**
Cet exercice est consacré à la preuve du théorème de point fixe de Schauder : *si C est une partie convexe compacte non-vide d'un espace vectoriel normé X, et si $f : C \to C$ est continue, alors f admet un point fixe.*
Ce théorème généralise celui de Brouwer à un espace vectoriel normé de dimension quelconque.
Nous allons le démontrer en utilisant le théorème de point fixe de Brouwer que l'on admet dans cet exercice.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n \in C$ tels que $C \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.
2. Soit C_0 l'enveloppe convexe de $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que $C_0 \subset C$ et

   $$g(x) := \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^n g_i(x)} \quad \text{où} \quad g_i(x) := (\varepsilon - \|x - x_i\|)\mathbb{1}_{\|x-x_i\| \leq \varepsilon}$$

   définit bien une fonction $g : C \to C_0$ continue, vérifiant $\|g(x) - x\| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in C$.
3. Soit h la restriction de $g \circ f$ à C_0. Montrer que h possède un point fixe $z \in C_0$.
   Indication : $\mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est de dimension finie c'est-à-dire isomorphe à $\mathbb{R}^n$.
4. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z = z_\varepsilon \in C_0$ tel que $\|f(z) - z\| \leq \varepsilon$.
5. En déduire que f possède un point fixe.

Éléments de solution de l'exercice 2.

1. Propriété de Borel–Lebesgue (quasi-compacité) de C à partir du recouvrement $C \subset \cup_{x \in C} B(x, \varepsilon)$.

2. Comme $g_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n g_i(x) > 0$ pour tout $x \in C$, la formule de $g(x)$ fait bien sens. La continuité de g provient de celle des g_i. Enfin g prend ses valeurs dans C_0 par définition, et pour tout $x \in C$, on a $\|g(x) - x\| \leq \varepsilon$ car

$$g(x) - x = \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - x)}{\sum_{i=1}^n g_i(x)}.$$

3. Comme C est convexe et $x_1, \ldots, x_n \in C$, on a $C_0 = \text{EnveloppeConvexe}(x_1, \ldots, x_n) \subset C$. Comme C_0 est convexe compact non-vide dans l'espace vectoriel normé de dimension finie engendré par $x_1, \ldots, x_n$, le théorème de Brouwer s'applique et affirme l'existence d'un point fixe $z \in C_0$ pour h, c'est-à-dire que $h(z) = z$.
4. Pour le $z = z_\varepsilon$ précédent, $h(z) = z$, c'est-à-dire $g(f(z)) = z$, or $\|g(x) - x\| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in C$, d'où $\|f(z) - z\| \leq \varepsilon$.
5. La question précédente donne $\inf_{z \in C_0} \|f(z) - z\| = 0$, et comme f est continue sur C_0 compact, elle atteint son minimum, donc elle possède un point fixe dans C_0.

Exercice 3 (Preuve du théorème de Peano via théorème d'Arzelà–Ascoli et théorème de point fixe de Schauder)**.** Le but de cet exercice est de démontrer, au moyen du théorème d'Arzelà–Ascoli et du théorème de point fixe de Schauder, que l'on admet dans cet exercice, le théorème d'existence de Peano de l'exercice 1.
Aussi on admet qu'il existe $r_* > 0$ et $T > 0$ tels que $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(t_0, r_*) \subset I \times O$ et $M := \sup_{(t,x) \in C} \|f(t,x)\| < \infty$. Soit $0 < T_* < \min(T, \frac{r_*}{M})$ et $\overline{J} := [t_0 - T_*, t_0 + T_*]$.

1. Soit $\mathscr{A} := \{x \in \mathscr{C}(\overline{J}, \overline{B}(x_0, r_*)) : \|x\|_{\text{Lip}} \leq M\}$. Montrer que ce qui suit définit bien un opérateur $A : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$:

$$(Ax)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\mathrm{d}s, \quad t \in \overline{J}.$$

2. Montrer que $\mathscr{A}$ est convexe, fermé, non-vide.
3. Montrer que $\mathscr{A}$ est compact.
4. Montrer que A est continu et en déduire que A admet un point fixe (l'EDO a une solution locale).

Éléments de solution de l'exercice 3.

1. Pour tout $t \in \overline{J}$, Ax est continue et on a $(Ax)(t) \in \overline{B}(x_0, r_*)$ car

$$\|(Ax)(t) - x_0\| \leq |t - t_0| M \leq T_* M \leq \frac{r_*}{M} M = r_*.$$

   De plus $\|(Ax)(s) - (Ax)(t)\| \leq |s - t| M$ pour tous $s, t \in \overline{J}$, donc $\|Ax\|_{\text{Lip}} \leq M$. Ainsi $Ax \in \mathscr{A}$ pour tout $x \in \mathscr{A}$.
2. La convexité et la fermeture sont immédiate. Le caractère non-vide vient de $x_0 \in \mathscr{A}$.
3. La compacité découle de la fermeture, et de la relative compacité donnée par le théorème d'Arzelà–Ascoli. En effet, pour tout $t \in \overline{J}$, $\{x(t) : x \in \mathscr{A}\} \subset \overline{B}(x_0, r_*)$ donc $\mathscr{A}$ ponctuellement relativement compacte, et $\mathscr{A}$ est uniformément équicontinue car tous ses éléments sont de norme Lipschitz uniformément $\leq M < \infty$.
4. Soient $x, y \in \mathscr{A}$ et $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Heine, f continue sur le compact $\overline{J} \times \overline{B}(x_0, r_*)$ est uniformément continue et donc il existe $\eta > 0$ tel que si $\|x - y\|_\infty \leq \eta$ alors $\|f(\cdot, x(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty < \varepsilon$, d'où

$$\|Ax - Ay\|_\infty \leq T_* \varepsilon \leq \frac{r_*}{M} \varepsilon.$$

   Le théorème de Schauder appliqué au convexe compact non-vide $\mathscr{A}$ de l'espace vectoriel normé $\mathscr{C}(\overline{J}, \overline{B}(x_0, r_*))$ assure alors que l'application continue $A : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ a un point fixe.

– oOo –