

# Agrégation limitée par diffusion interne

Sébastien Blachère

25 novembre 2003

Soit  $\mathcal{G}$  un **graphe**, c'est-à-dire un couple  $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$  où  $\mathcal{S}$  est un ensemble discret dont les éléments sont appelés les **sommets**, et  $\mathcal{A}$  est une application de  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  dans  $\{0, 1\}$  qui définit une relation de **voisinage**  $\sim$  entre les sommets :

$$x, y \in \mathcal{S}, x \sim y \iff \mathcal{A}(x, y) = 1.$$

Lorsque 2 sommets  $x$  et  $y$  sont voisins, cette relation est représentée par une **arête** entre  $x$  et  $y$ . L'application  $\mathcal{A}$  peut alors être vue comme l'ensemble des arêtes du graphe  $\mathcal{G}$ . Enfin, un graphe infini est dit **localement fini** lorsque chaque sommet possède un nombre fini de voisins.

Un exemple simple de graphe localement fini est le couple  $\mathcal{G}^d \stackrel{\text{déf.}}{=} (\mathbb{Z}^d, \mathcal{A})$  où

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, \mathcal{A}(x, y) = 1 \iff \sum_{i=1}^d |y_i - x_i| = 1.$$

Chaque sommet possède ainsi  $2d$  voisins. Soit  $(S^j(\cdot))$  une suite de **marches aléatoires simples** indépendantes sur  $\mathcal{G}^d$  issues de l'origine  $O$ . Cela signifie que, pour tout  $j$ ,  $S(0) = O$  et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ t.q. } x \sim y, \mathbf{P}(S^j(k+1) = y | S^j(k) = x) = \frac{1}{2d}.$$

L'**Agrégation limitée par diffusion interne** est un **modèle de croissance** aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$  défini à partir de la suite  $(S^j(\cdot))$  de marches aléatoires simples sur  $\mathcal{G}^d$ . Un modèle de croissance est une suite croissante de sous-ensembles  $A(n)$  de  $\mathbb{Z}^d$ , c'est-à-dire  $A(n) \subset A(n+1) \subset \mathbb{Z}^d$  pour tout  $n$ . L'aléa vient du fait que les ensembles  $A(n)$  sont aléatoires.

**Définition 0.0.1.** L'Agrégation limitée par diffusion interne est une chaîne de Markov  $A(n)$  d'ensembles de  $\mathbb{Z}^d$  définie par récurrence par :

$$A(1) = \{O\}, \text{ et } \mathbf{P}(A(n+1) = A(n) \cup \{x\} | A(n)) = \mathbf{P}(S^{n+1}(\xi_{A(n)}^{n+1}) = x | A(n)),$$

où  $\xi_{A(n)}^{n+1} = \min\{k \geq 0 : S^{n+1}(k) \notin A(n)\}$  est le temps de sortie de  $A(n)$ .

Ce modèle peut être compris comme un agrégation de points dont l'expansion est contrôlée par une diffusion de particules issues d'un point fixe à l'intérieur du modèle. Chaque particule diffuse (se déplace) en sautant d'un voisin à l'autre avec une probabilité de transition uniforme. Cette interprétation permet de comprendre le nom (prédestiné a ce concours!) de ce modèle. La figure illustre le passage de  $A(n)$  à  $A(n+1)$ .

Historiquement, ce modèle est d'abord apparu dans une version « externe » appelée **Agrégation limitée par diffusion**. Cette version, introduite par Witten et Sander en 1981 [9], suit le même principe, mais les particules diffusent à partir de l'« infini » (cette notion un peu floue est assez complexe à définir, voir [5] pour plus d'explications).

La similitude entre les deux modèles (interne et externe) s'arrête à leur définition. En effet, l'Agrégation limitée par diffusion (externe) a un comportement fractal (voir la figure en dimension 2) extrêmement compliqué à étudier.

La version interne du modèle remonte à un article de Diaconis et Fulton en 1991 [4]. Très vite, ce modèle est apparu plus sympathique, sa forme possédant une forte tendance régularisante.

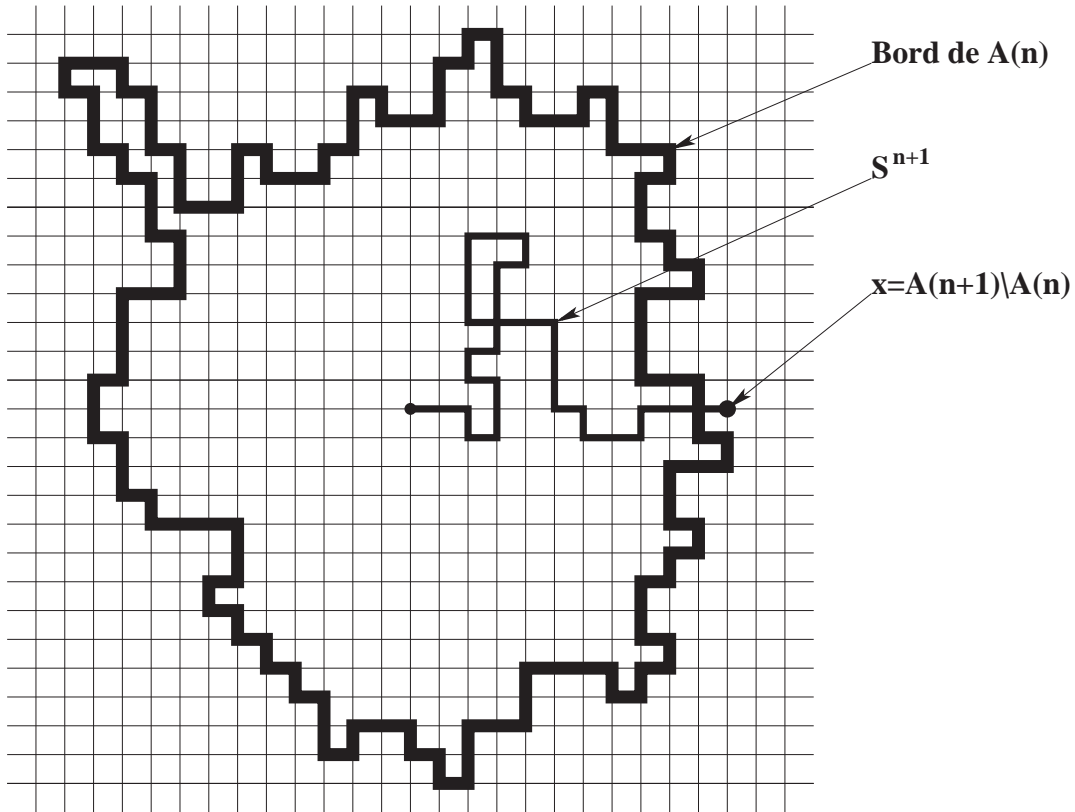


FIG. 1 – Passage de  $A(n)$  à  $A(n+1)$

En effet, dans la figure , l'ensemble  $A(n)$  possède une forte irrégularité (quadrant supérieur gauche), et ainsi la marche aléatoire simple  $S^{n+1}(\cdot)$  a une probabilité très faible d'accroître cette irrégularité car il faudrait qu'elle suive un chemin à l'intérieur de celle-ci, et donc avec très peu de latitude. Cette tendance régularisante peut se constater par des simulations (Figure , issue de [8]).

Il existe également des résultats mathématiques qui illustrent ce phénomène en comparant les formes des ensembles  $A(n)$  avec la trace, sur  $\mathbb{Z}^d$ , des boules euclidiennes de  $\mathbb{R}^d$ . Précisément, si on note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ , et  $\omega_d$  le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^d$ , ces résultats comparent la forme de  $A([\omega_d n^d])$  avec celle de  $B(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\| < n\}$ . Cette comparaison se traduit à l'aide de 2 variables aléatoires,  $\delta_I(n)$  l'erreur interne, et  $\delta_E(n)$  l'erreur externe, définies pour chaque  $n$  par

$$\begin{aligned} n - \delta_I(n) &= \inf\{\|x\| : x \notin A([\omega_d n^d])\}, \\ n + \delta_E(n) &= \sup\{\|x\| : x \in A([\omega_d n^d])\}. \end{aligned}$$

Ces variables aléatoires représentent les fluctuations entre  $A([\omega_d n^d])$  et  $B(n)$  car, par définition,

$$B(n - \delta_I(n)) \subset A([\omega_d n^d]) \subset B(n + \delta_E(n)).$$

Ainsi, la suite  $(B(n))$  est appelée **forme limite** du modèle lorsque

$$\mathbf{P}(\delta_I(n) = o(n)) = 1 = \mathbf{P}(\delta_E(n) = o(n)). \quad (1)$$

Ce résultat a été établi en dimension 1 dans l'article fondateur [4], puis en dimension supérieure en 1992 [7]. En dimension 1, le résultat est beaucoup plus précis :

**Théorème 0.0.2.** [4, Prop. 3.2] *Soit  $A^+(n)$  le nombre d'éléments positifs de  $A(n)$ , alors, lorsque  $n$  tend vers l'infini,*

$$\mathbf{P}\left(\frac{|A^+(n)| - n/2}{\sqrt{n/12}} \leq t\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp(-u^2/2) du.$$

En dimension supérieure, (1) a été amélioré en 1995 [6], puis en 2001 [3] :

**Théorème 0.0.3.** [3, Th. 2.1] *Si  $d \geq 2$ , alors avec probabilité 1,*

$$\begin{cases} \delta_I(n) = O((\ln n)^{1/2}) & \text{pour } d \geq 3, \\ \delta_I(n) = O((\ln n \ln(\ln n))^{1/2}) & \text{pour } d = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \delta_O(n) = O((\ln n)^{3/2}) & \text{pour } d \geq 4, \\ \delta_O(n) = O((\ln n)^{5/3}) & \text{pour } d = 3, \\ \delta_O(n) = O((\ln n)^2) & \text{pour } d = 2. \end{cases}$$

Enfin, remarquons que la définition de ce modèle peut s'appliquer à n'importe quel graphe localement fini et n'importe quelle marche aléatoire sur ce graphe (la structure de graphe n'est nécessaire qu'à la définition de la marche aléatoire simple). Des résultats sur la forme du modèle existent ainsi dans le cas de marches aléatoires plus générales sur  $\mathbb{Z}^d$  [1], et dans le cas de la marche aléatoire simple sur des arbres homogènes [7], ou sur des graphes stables par action d'un groupe discret nilpotent [2].

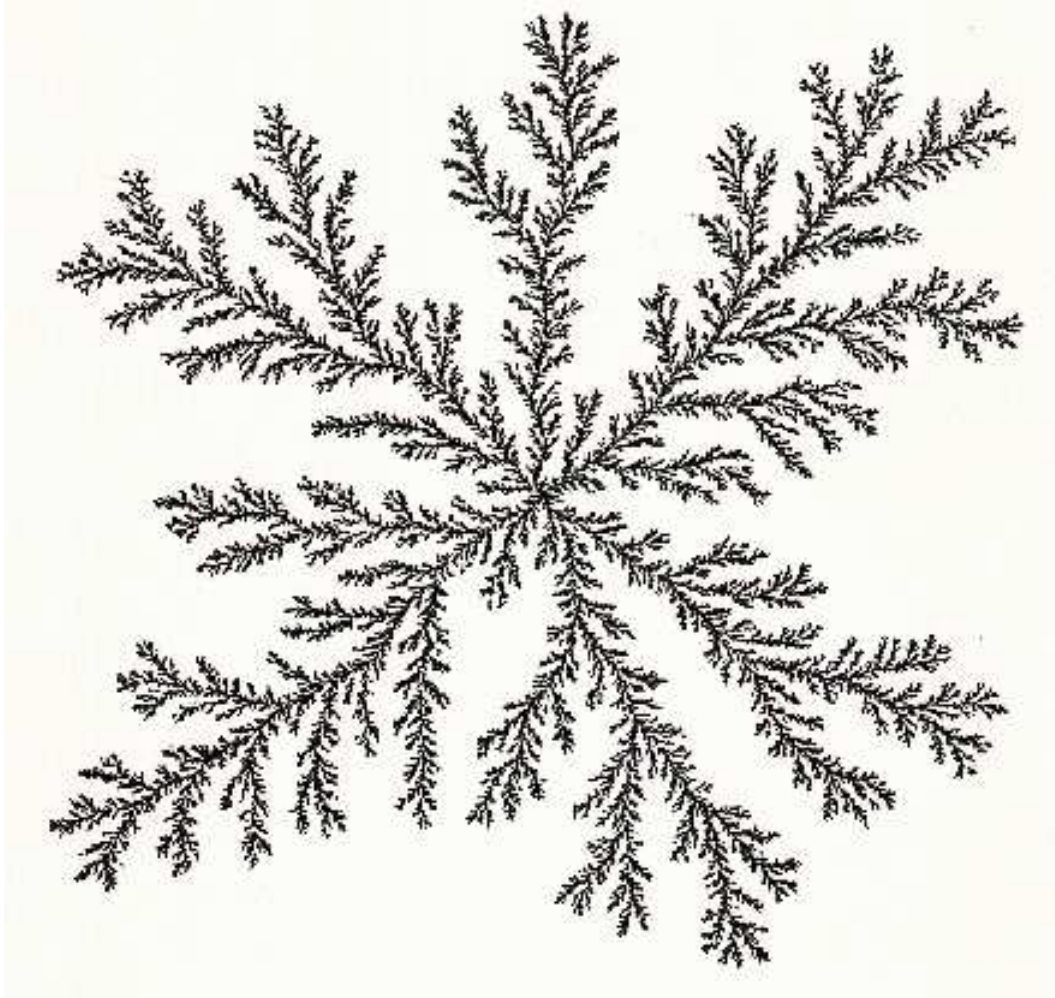


FIG. 2 – Agrégation limitée par diffusion (externe) avec 100 millions de particules

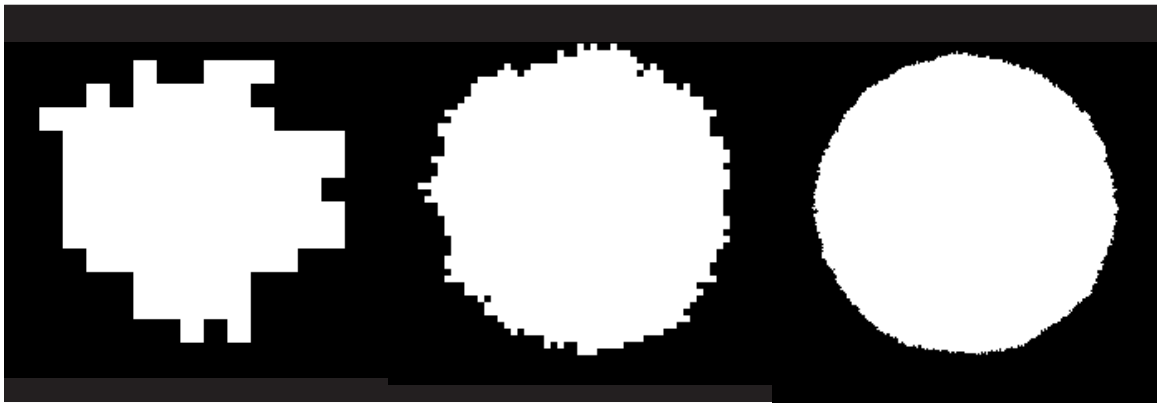


FIG. 3 –  $A(n)$  (normalisé) aux temps 100, 1600, et 25600

# Bibliographie

- [1] S. Blachère, *Agrégation limitée par diffusion interne sur  $\mathbb{Z}^d$* , À paraître dans Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. [4](#)
- [2] ———, *Internal diffusion limited aggregation on discrete groups having polynomial growth*, pré-publication. [4](#)
- [3] ———, *Logarithmic fluctuations for the internal diffusion limited aggregation*, pré-publication. [4](#)
- [4] P. Diaconis and W. Fulton, *A growth model, a game, an algebra, Lagrange inversion, and characteristic classes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **49** (1991), no. 1, 95–119 (1993), Commutative algebra and algebraic geometry, II (Italian) (Turin, 1990). MR 94d:60105 [2](#), [4](#)
- [5] G. Lawler, *Intersection probabilities for random walks*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991. MR 93f:60105 [2](#)
- [6] ———, *Subdiffusive fluctuations for internal diffusion limited aggregation*, Ann. Probab. **23** (1995), no. 1, 71–86. MR 96c:60086 [4](#)
- [7] G. Lawler, M. Bramson, and D. Griffeath, *Internal diffusion limited aggregation*, Ann. Probab. **20** (1992), no. 4, 2117–2140. MR 94a:60105 [4](#)
- [8] C. Moore and J. Machta, *Internal diffusion-limited aggregation: parallel algorithms and complexity*, J. Statist. Phys. **99** (2000), no. 3-4, 661–690. MR 2001c:82076 [3](#)
- [9] T. Witten and L. Sander, *Diffusion-limited aggregation*, Phys. Rev. B (3) **27** (1983), no. 9, 5686–5697. MR 84f:82030 [2](#)