
Feuille de TP n°4

Calcul approché d'intégrales – Méthodes de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo permet le calcul de valeurs approchées d'intégrales multiples dont le calcul purement algébrique est impossible ou très difficile. Le fondement de la méthode repose sur la Loi des Grands Nombres (LGN) et le calcul de l'erreur associée à la méthode s'obtient à partir du Théorème Limite Centrale (TLC). On cherche à évaluer une intégrale multiple de la forme

$$I = \int_A f(x) dx$$

où A est un pavé de \mathbf{R}^d avec $d \geq 1$ de mesure de Lebesgue connue m_A et f est une fonction mesurable de \mathbf{R}^d dans \mathbf{R} , intégrable sur A . Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur A . On a par la LGN

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} I_A.$$

avec $I_A = I/m_A$. De plus, si f est de carré intégrable sur A , on a par le TLC

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) - I_A \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

avec

$$\sigma^2 = \frac{1}{m_A} \int_A f^2(x) dx - I_A^2.$$

On a donc un intervalle de confiance pour I_A donné, avec un niveau de confiance de 95%, par

$$I_A \in \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Ce résultat n'a d'intérêt que si l'on sait majorer convenablement σ^2 . Toutefois, si σ^2 est difficile à majorer, on peut l'estimer par la variance empirique

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (f(X_k) - \overline{f(X)})^2 \text{ avec } \overline{f(X)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k).$$

On peut montrer que S_n^2 converge en probabilité vers σ^2 et l'intervalle de confiance ci-dessus reste encore valable en remplaçant σ par S_n . Finalement, on obtient un erreur d'approximation de l'ordre de $1/\sqrt{n}$. Cette vitesse est assez lente, comparée aux méthodes déterministes classiques, en particulier pour $d = 1$. En effet, si $d = 1$, alors l'erreur d'approximation de la méthode des rectangles ou du point central est de l'ordre de $1/n$. Pour la méthode des trapèzes, elle est en $1/n^2$ et pour la méthode de Simpson en $1/n^4$. La méthode de Monte-Carlo est intéressante si $d \geq 3$ ou bien si f est très irrégulière car on peut observer qu'elle ne demande aucune hypothèse de régularité sur f .

1 Exercices

Exercice 1.1. On cherche à évaluer, pour tout $a > 0$, l'intégrale

$$I(a) = \int_0^a \exp(-x^2) dx.$$

Créer un code Matlab permettant d'évaluer $I(a)$ par les méthodes déterministes classiques des rectangles, du point central, des trapèzes et de Simpson. Évaluer également $I(a)$ par la méthode de Monte-Carlo puis grâce à la fonction `erf` de Matlab. Dresser, pour différentes valeurs de a et pour $n = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$, un tableau comparatif de vos six évaluations.

Exercice 1.2. Effectuer le même exercice sur l'intégrale $I(a)$ définie, pour tout $a > 0$, par

$$I(a) = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(-x) dx$$

en comparant vos évaluations à celle obtenue grâce à la fonction `pchisq` de Matlab.

Exercice 1.3. Évaluer la valeur de π à partir des trois intégrales suivantes par la méthode de Monte-Carlo.

$$\int_{[-1,+1]} 4\sqrt{1-x^2} dx$$

$$\int_{[-1,+1]^2} \mathbb{I}_{(x^2+y^2 \leq 1)} dx dy \quad \text{et} \quad \int_{[-1,+1]^3} \frac{3}{4} \mathbb{I}_{(x^2+y^2+z^2 \leq 1)} dx dy dz.$$

Comparer vos trois résultats avec les évaluations obtenues grâce aux fonctions `quad`, `dblquad` et `triplequad` de Matlab.

Exercice 1.4. Pour $a > 0$, soit f_a la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f_a(x) = x(1-x) \sin^2(ax(1-x)).$$

Pour $a = 1, 10, 50, 100$, créer un code Matlab permettant d'évaluer l'intégrale

$$I(a) = \int_0^1 f_a(x) dx$$

par les méthodes déterministes classiques, par la méthode de Monte-Carlo sur l'intervalle $[0, 1]$ et par la méthode de Monte-Carlo avec rejet sur le rectangle $[0, 1] \times [0, 1/4]$.

Exercice 1.5. Effectuer le même exercice sur la fonction f_a définie par

$$f_a(x) = x \sin^2(a/x) \mathbb{I}_{x \in [0.5, 1]}$$

en proposant une méthode de Monte-Carlo avec rejet adaptée à f_a .

Remarque 1.6. On trouvera dans [?, Chapitre IX] quelques exemples intéressants d'utilisation de méthodes de Monte-Carlo.

Références

[1] N. BOULEAU – *Probabilités de l'ingénieur, variables aléatoires et simulation*, Hermann, 1986.