Feuille de TP n°6
Martingales en modélisation

1 Martingales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n$ où $\mathcal{F}_n$ représente la tribu des événements antérieurs à l'instant n. Soit $(M_n)_n$ une suite des variables aléatoires adaptée à $\mathcal{F}$.

Définition 1. On dit que $(M_n)_n$ est une *martingale* (resp. *sous-martingale*, resp. *sur-martingale*), si $(M_n)_n$ (resp. $(M_n^+)_n$, resp. $(M_n^-)_n$) est intégrable et pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = M_n$ (resp. $\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) \geqslant M_n$, resp. $\mathbb{E}(M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) \leqslant M_n$). On note alors respectivement (MG), (sMG), (SMG).

Exemple. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi, d'espérance m et de variance σ^2. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $M_n = S_n - nm$ et $N_n = M_n^2 - n\sigma^2$. Alors, $(M_n)_n$ et $(N_n)_n$ sont deux martingales.

Théorème de Doob. Soit $(M_n)_n$ une MG, sMG, ou SMG, bornée dans $\mathbf{L}^1(\mathcal{A})$. On a $M_n \to M_\infty$ p.s. avec $M_\infty \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$. En particulier, toute sMG majorée ou SMG minorée converge p.s.

Définition 2. Soit $(M_n)_n$ une MG de carré intégrable. On appelle *processus croissant* associé à $(M_n)_n$, la suite $(<M>_n)_n$ définie par $<M>_0 = M_0^2$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $<M>_{n+1} - <M>_n = \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - M_n^2 \,|\, \mathcal{F}_n)$. La suite $(<M>_n)_n$ est prévisible, intégrable, positive et croissante. Si $N_n = M_n^2 - <M>_n$, alors $(N_n)_n$ est une MG centrée donc $\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}(<M>_n)$.

Inégalités de Kolmogorov. Soit $(M_n)_n$ une MG de carré intégrable et $M_n^* = \sup_{k \leqslant n} |M_k|$. Alors, pour tout $a > 0$, $a\mathbb{P}(M_n^* \geqslant a) \leqslant \mathbf{E}(|M_n|)$ et $a^2\mathbb{P}(M_n^* \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}(<M_n>)$. En particulier, on obtient que $\mathbb{E}((M_n^*)^2) \leqslant 4\mathbb{E}(<M_n>)$.

Loi des Grands Nombres. Soit $(M_n)_n$ une MG de carré intégrable.

1. Sur $\{<M>_\infty < +\infty\}$, $M_n \to M_\infty$ p.s. avec M_∞ finie.
2. Sur $\{<M>_\infty = +\infty\}$, $M_n = o(<M>_n)$ p.s. Plus précisement, pour tout $\gamma > 0$, on a

$$\Big(\frac{M_n}{<M_n>}\Big)^2 = o\Big(\frac{(\log <M_n>)^{1+\gamma}}{<M_n>}\Big) \quad \text{p.s.}$$

Théorème Limite Centrale. Soit $(M_n)_n$ une MG de carré intégrable et soit $(a_n)_n$ une suite réelle, positive, déterministe croissante vers l'infini. On suppose que

1. Il existe $\lambda \geqslant 0$ déterministe tel que $a_n^{-1} <M>_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \lambda$.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\Delta M_k^2 \, \mathrm{I}_{\{|\Delta M_k| \geqslant \varepsilon\sqrt{a_n}\}} \,|\, \mathcal{F}_{k-1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$$

   avec $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$ (condition de Lindeberg).

Alors, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda) \quad \text{et si } \lambda > 0 \quad \sqrt{a_n}\,\frac{M_n}{<M>_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^{-1}).$$

2 Utilisation en modélisation.

Exercice 2.1 (Bandit à deux bras). Le *bandit à deux bras* est une machine à sous à deux leviers A et B. Pour le levier A, le gain est 1 avec probabilité θ^A et 0 avec probabilité $1-\theta^A$. De même pour le levier B. On suppose que $0 < \theta^A, \theta^B < 1$ avec $\theta^A \neq \theta^B$. À l'instant n, le joueur choisit le levier $U_n \in \{A, B\}$ au vu des observations antérieures. Soit $(X_n)_n$ la suite des gains du joueur. Pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \,|\, U_n) = \theta^{U_n}$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \,|\, U_n) = 1 - \theta^{U_n}$. Soit $(G_n)_n$ la suite des gains moyens du joueur, $G_n = \sum_{k=1}^n X_k/n$. Le joueur va chercher à optimiser son gain moyen. S'il connaissait θ^A et θ^B, la stratégie optimale serait de jouer toujours avec le levier A si $\theta^A > \theta^B$ et avec le levier B sinon. On aurait donc $G_n \to \sup(\theta^A, \theta^B)$ p.s. Pour $n \geqslant 0$, soit N_n^A le nombre de fois où le joueur choisi le levier A avant l'instant n et $N_n^B = n - N_n^A$. Soit $M_n = nG_n - \theta^A N_n^A - \theta^B N_n^B$. Montrer que $(M_n)_n$ est une martingale de processus croissant $(<M>_n)_n$ avec $<M>_n = \theta^A(1-\theta^A)N_n^A + \theta^B(1-\theta^B)N_n^B$. En déduire que $M_n = o(n)$ p.s. et $\inf(\theta^A, \theta^B) \leqslant \liminf G_n \leqslant \limsup G_n \leqslant \sup(\theta^A, \theta^B)$ p.s. On estime θ^A et θ^B par

$$\widehat{\theta}_n^A = \frac{1}{N_n^A} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{I}_{\{U_k = A,\ X_{k+1}=1\}} \quad \text{et} \quad \widehat{\theta}_n^B = \frac{1}{N_n^B} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{I}_{\{U_k = B,\ X_{k+1}=1\}}.$$

Vérifier que si l'on joue une infinité de fois avec le levier A et le levier B, alors $\widehat{\theta}_n^A \to \theta^A$ et $\widehat{\theta}_n^B \to \theta^B$. Soit $(c_n)_n$ une suite de $\mathbb{N}$, croissante, et telle que $n = o(c_n)$. Soit $I_c = \{c_n,\ n \geqslant 1\}$. À l'instant $n \geqslant 1$, on choisit $U_n = A$ si $\widehat{\theta}_n^A \geqslant \widehat{\theta}_n^B$ et $n \notin I_c$, $U_n = B$ si $\widehat{\theta}_n^A < \widehat{\theta}_n^B$ et $n \notin I_c$, $U_n = A$ si $n = c_{2k}$ avec $k \geqslant 1$ et $U_n = B$ si $n = c_{2k+1}$ avec $k \geqslant 0$. Montrer que cette stratégie est optimale i.e. $G_n \to \sup(\theta^A, \theta^B)$ p.s. Créer un code Matlab illustrant le bandit à deux bras où les paramètres θ^A et θ^B sont affectés par l'utilisateur.

Exercice 2.2 (Processus auto-régressif). On considère le processus autorégressif $X_{n+1} = \theta X_n + \varepsilon_{n+1}$ avec $X_0 = 0$, où la suite $(\varepsilon_n)_n$ est i.i.d. centrée, de variance σ^2. On estime les paramètres inconnus θ et σ^2 par

$$\widehat{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k X_{k-1}}{\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2} \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \widehat{\theta}_{k-1} X_{k-1})^2.$$

1. **Cas stable.** $|\theta| < 1$. Montrer que $(\widehat{\theta}_n)_n$ CV p.s. vers θ et que $(\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta))_n$ CV en loi vers $\mathcal{N}(0, 1-\theta^2)$. De plus, $(\widehat{\sigma}_n^2)_n$ CV p.s. vers σ^2 et si les ε_n admettent un moment d'ordre 4 fini τ^4, alors $(\sqrt{n}\,(\widehat{\sigma}_n^2 - \sigma^2))_n$ CV en loi vers $\mathcal{N}(0, \tau^4)$.
2. **Cas instable.** $|\theta| = 1$. Montrer que $(\widehat{\theta}_n)_n$ CV p.s. vers θ et que $(n\,(\widehat{\theta}_n - \theta))_n$ CV en loi vers $\mathcal{L}(\theta L)$ où la v.a. L est donnée par $L := \int_0^1 B_t\, dB_t / \int_0^1 B_t^2 dt$ où $(B_t)_{t \geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard issu de 0. D'autre part, vérifier que $(\widehat{\sigma}_n^2)_n$ CV p.s. vers σ^2 et que si les ε_n admettent un moment d'ordre scritement supérieur à 4 fini, $(\sqrt{n}(\widehat{\sigma}_n^2 - \sigma^2))_n$ CV en loi vers $\mathcal{N}(0, \tau^4)$.
3. **Cas explosif.** $|\theta| > 1$. Montrer que $(\widehat{\theta}_n)_n$ CV p.s. vers θ et que dans le cadre gaussien, $((\theta^2-1)^{-1}|\theta|^n(\widehat{\theta}_n - \theta))_n$ CV en loi vers une loi de Cauchy. D'autre part, vérifier que $(\widehat{\sigma}_n^2)_n$ CV p.s. vers σ^2 et que si les ε_n admettent un moment d'ordre strictement supérieur à 4 fini, $(\sqrt{n}\,(\widehat{\sigma}_n^2 - \sigma^2))_n$ CV en loi vers $\mathcal{N}(0, \tau^4)$.

Créer un code Matlab illustrant ces résultats de convergence lorsque $(\varepsilon_n)_n$ est associée à la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Essayer d'autres lois.

Exercice 2.3 (Nombre de records). Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi de densité f. Pour tout $n \geqslant 1$, on note R_n le rang relatif de X_n, défini par $R_n = 1 + \sum_{k=1}^n \mathrm{I}_{\{X_k > X_n\}}$. Montrer que les variables aléatoires $R_1, \ldots, R_n$ sont indépendantes avec, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(R_n = r_n) = 1/n$ où $r_n \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $n \geqslant 1$, si $R_n = 1$, on dit qu'il se produit un record à l'instant n. On s'intéresse à la variable aléatoire Z_n comptant le nombre de records jusqu'à l'instant n, $Z_n = \sum_{k=1}^n \mathrm{I}_{\{R_k = 1\}}$. Montrer que $Z_n / \log n \to 1$ p.s. et

$$\frac{Z_n - \log(n)}{\sqrt{\log n}} \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Créer un code Matlab illustrant ces résultats de convergence