
Feuille de TP n°13

Transformée de Laplace en modélisation

1 Transformée de Laplace

Définition 1.1. On appelle transformée de Laplace d'une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R}^d la fonction $\mathbf{L}_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ par

$$\mathbf{L}_\mu(t) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle t, x \rangle} d\mu(x).$$

La transformée de Laplace d'un vecteur aléatoire X de \mathbb{R}^d n'est rien d'autre que $\mathbf{L}_{\mathcal{L}(X)}$ et on a $\mathbf{L}_\mu(t) = \mathbf{E}(e^{\langle t, X \rangle})$. On définit également l'ensemble

$$\mathcal{D}_\mu := \{t \in \mathbb{R}^d, \mathbf{L}_\mu(t) < +\infty\},$$

et on notera $\text{int}(\mathcal{D}_\mu)$ son intérieur pour la topologie de \mathbb{R}^d .

Proposition 1.2. L'ensemble \mathcal{D}_μ est un ensemble convexe non vide de \mathbb{R}^d contenant l'origine 0 et on a toujours $\mathbf{L}_\mu(0) = 1$. De plus, $\log \mathbf{L}_\mu$ est convexe sur \mathcal{D}_μ . Enfin, lorsque $d = 1$, si le support de μ est inclus dans \mathbb{R}_+ , alors $\mathbb{R}_- \subset \mathcal{D}_\mu$; symétriquement, si le support de μ est inclus dans \mathbb{R}_- , alors $\mathbb{R}_+ \subset \mathcal{D}_\mu$.

Dans la suite, on considèrera essentiellement les transformées de Laplace de variables aléatoires, i.e. $d = 1$.

Théorème 1.3. Soit X une v.a.r. de loi μ . Si $0 \in \text{int}(\mathcal{D}_\mu)$, alors \mathbf{L}_μ est analytique sur $\text{int}(\mathcal{D}_\mu)$ et X possède des moments de tout ordre, donnés pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathbf{E}(X^n) = \mathbf{L}_\mu^{(n)}(0)$. De plus, pour tout $t \in \text{int}(\mathcal{D}_\mu)$, on a

$$\mathbf{L}_\mu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{E}(X^n).$$

Théorème 1.4 (Caractérisation de la loi). La transformée de Laplace $\mu \mapsto \mathbf{L}_\mu$ est en quelque sorte injective. Ainsi, si \mathbf{L}_μ et \mathbf{L}_ν coïncident sur un ensemble ouvert non vide en prenant des valeurs finies, alors $\mu = \nu$.

Théorème 1.5 (Théorème des moments de Stieltjes¹). FIXME: à faire.

Remarque 1.6 (Transformée de Laplace – Fonction caractéristique – Fonction génératrice). FIXME: à faire.

2 Transformée de Cramér

Définition 2.1. Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} , de transformée de Laplace \mathbf{L}_μ . On appelle transformée de Cramér \mathbf{I}_μ de μ la transformée de Legendre de $\varphi_\mu := \log \mathbf{L}_\mu$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mathbf{I}_\mu(x) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \{xt - \varphi_\mu(t)\}.$$

La transformée de Cramér d'une v.a.r. X n'est rien d'autre que $\mathbf{I}_{\mathcal{L}(X)}$. La fonction φ_μ est parfois qualifiée de « log-Laplace » de μ .

Remarque 2.2. Comme $\varphi_\mu(0) = 0$, \mathbf{I}_μ est à valeurs dans $[0; +\infty]$. De plus, $\mathbf{I}_\mu(x) = \sup_{t \in \mathcal{D}} \{xt - \varphi_\mu(t)\}$ et, si $\mathcal{D}_\mu = \{0\}$, \mathbf{I}_μ est identiquement nulle.

¹Thomas Jan Stieltjes (1856-1894) est un mathématicien hollandais qui a vécu une bonne partie de sa vie à Toulouse, cf. <http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Stieltjes.html>.

Remarque 2.3. Soit X une v.a.r. de loi μ . Alors φ_μ et \mathbf{I}_μ sont convexes. De plus, si X est intégrable avec $m = \mathbf{E}(X)$, alors $\mathbf{I}_\mu(m) = 0$, \mathbf{I}_μ est croissante sur $[m; +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty; m]$. Enfin, on a

$$\mathbf{I}_\mu(x) = \begin{cases} \sup_{t \geq 0} \{xt - \varphi_\mu(t)\} & \text{si } x \geq m, \\ \sup_{t \leq 0} \{xt - \varphi_\mu(t)\} & \text{si } x \leq m. \end{cases}$$

3 Grandes Déviations et concentration de la mesure

Theorème 3.1 (Inégalité de concentration de Hoeffding). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes et bornées à valeurs dans $[a_k, b_k]$ respectivement. Si $S_n := X_1 + \dots + X_n$, alors pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbf{E}(S_n) \geq x) \leq \exp\left(-\frac{2x^2}{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_k - a_k)^2}\right).$$

Theorème 3.2 (Inégalité de concentration de Bennett). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes, de carré intégrable, et à valeurs dans $] -\infty, c]$. Si $S_n := X_1 + \dots + X_n$, alors pour tout $V_n \geq \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k^2)$ et tout $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbf{E}(S_n) \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2(V_n + \frac{1}{3}xc)}\right).$$

Theorème 3.3 (Théorème de Cramér-Chernov). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi commune μ de transformée de Cramér \mathbf{I}_μ . Soit $S_n := X_1 + \dots + X_n$. On a alors les bornes asymptotiques suivantes.

Majoration. Pour tout ensemble fermé F de \mathbb{R} ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in F\right) \leq -\inf_{x \in F} \mathbf{I}_\mu(x),$$

Minoration. Pour tout ensemble ouvert G de \mathbb{R} ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in G\right) \geq -\inf_{x \in G} \mathbf{I}_\mu(x).$$

On dit que la suite $(\frac{1}{n} S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait à un principe de grandes déviations (PGD) de vitesse $a_n := n$ et de fonction de taux \mathbf{I}_μ .

Remarque 3.4. Le théorème de Cramér-Chernov est vrai sans aucune hypothèse d'intégrabilité sur les X_n . Cependant, lorsque les X_n sont intégrables avec $m = \mathbf{E}(X_1)$ alors,

$$\forall x \geq m, \quad \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\mathbf{I}_\mu(x) \quad \text{et} \quad \forall x \leq m, \quad \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \leq nx) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\mathbf{I}_\mu(x).$$

4 Exercices et utilisation en modélisation

Exercice 4.1 (Qui est le plus fort ?). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$ et soit $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq x\right) \sim \frac{2\sigma}{x\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-n \frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Écrire un programme permettant de comparer, pour différentes valeurs de n , la probabilité ci-dessus avec l'approximation donnée par le TLC, le PGD de Cramér-Chernov, ainsi que le développement asymptotique précis, où les paramètres x , m et σ^2 sont affectés par l'utilisateur.

Exercice 4.2 (PGD de la loi exponentielle). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que $(\frac{1}{n} S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait un PGD de fonction de taux valant $(\lambda x - 1 - \log(\lambda x))$ si $x > 0$ et $+\infty$ sinon. Écrire un programme illustrant ce PGD.

Exercice 4.3 (Records). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. absolument continues. Pour tout $n \geq 1$, on note R_n le rang relatif de X_n , défini par $R_n := 1 + \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_{\{X_k > X_n\}}$. Il est facile de voir que $\mathbb{P}(R_n = r_n) = 1/n$ avec $r_n \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout $n \geq 1$, si $R_n = 1$, on dit qu'il se produit un record à l'instant n . On s'intéresse à la variable aléatoire Z_n comptant le nombre de records jusqu'à l'instant n , définie par $Z_n := \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_{\{R_k=1\}}$. Montrer que

$$\frac{Z_n}{\log n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 1 \quad \text{et que} \quad \frac{Z_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Montrer que $(\frac{1}{\log n} Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait un PGD de vitesse $\log n$ et de fonction de taux valant $x \log x - x + 1$ si $x > 0$ et $+\infty$ sinon. Écrire un programme illustrant ces résultats de convergence.

Exercice 4.4 (Processus auto-régressif). On considère le processus auto-régressif stable $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par $X_n := \theta X_{n-1} + \varepsilon_n$ avec $|\theta| < 1$, $X_0 = 0$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On estime θ par l'estimateur de Yule-Walker

$$\hat{\theta}_n := \frac{\sum_{k=1}^n X_k X_{k-1}}{\sum_{k=0}^n X_k^2},$$

qui est relié aux moindres carrés. Vérifier que

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \theta \quad \text{et que} \quad \sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1 - \theta^2).$$

On peut également montrer à l'aide du théorème de Gartner-Ellis (extension du théorème de Cramér-Chernov) que $(\hat{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait à un PGD de fonction de taux

$$\mathbf{I}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \theta^2 - 2\theta x}{1 - x^2} \right) & \text{si } -1 < x < 1, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Écrire un programme illustrant ces résultats de convergence.

Exercice 4.5 (Temps de sortie d'une bande pour une marche aléatoire simple – Ruine du joueur). FIXME: à faire.

Exercice 4.6 (Familles exponentielles et domaine des moyennes). FIXME: à faire.

Exercice 4.7 (Lois conditionnelles d'un vecteur gaussien). FIXME: à faire.

Exercice 4.8 (Inégalité de Sobolev logarithmique et concentration poissonnienne). On se reportera à la feuille consacrée à la loi exponentielle et au processus de Poisson.