Autour d'une inégalité de concentration de la mesure

Djalil Chafaï

Paris-Dauphine

Exposé culturel
Groupe de travail statistique et imagerie
Lundi 20 janvier 2014

Plan de l’exposé

Plan de l'exposé

Plan de l’exposé

Outline

Théorème (Inégalité de concentration de Azuma-Hoeffding)

- *Variable aléatoire intégrable Y* : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$

Théorème (Inégalité de concentration de Azuma-Hoeffding)

- *Variable aléatoire intégrable* $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$
- *Filtration interpolation* $\{\varnothing, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$

Théorème (Inégalité de concentration de Azuma-Hoeffding)

- *Variable aléatoire intégrable* $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$
- *Filtration interpolation* $\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$
- *Accroissements* $d_1, \ldots, d_n$ *de la martingale de Doob :*

$$Y - \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

Théorème (Inégalité de concentration de Azuma-Hoeffding)

- *Variable aléatoire intégrable* $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$
- *Filtration interpolation* $\{\varnothing, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$
- *Accroissements* $d_1, \ldots, d_n$ *de la martingale de Doob :*

$$Y - \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y \,|\, \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \,|\, \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

- *Alors pour tout* $r \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant r) \leqslant 2 \exp\left(-\frac{2r^2}{\operatorname{osc}(d_1)^2 + \cdots + \operatorname{osc}(d_n)^2} \right).$$

Théorème (Inégalité de concentration de Azuma-Hoeffding)

- *Variable aléatoire intégrable* $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$
- *Filtration interpolation* $\{\varnothing, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$
- *Accroissements* $d_1, \ldots, d_n$ *de la martingale de Doob :*

$$Y - \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y \,|\, \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \,|\, \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

- *Alors pour tout* $r \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant r) \leqslant 2 \exp\left(-\frac{2r^2}{\mathrm{osc}(d_1)^2 + \cdots + \mathrm{osc}(d_n)^2}\right).$$

- $\mathrm{osc}(d_k) = \sup d_k - \inf d_k = \mathrm{Diam}(\mathrm{support}\,(d_k)) \leqslant 2\|d_k\|_\infty$

Optimalité pour les variables de Bernoulli

- $Y = F(X_1, \ldots, X_n) = n^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_n)$

Optimalité pour les variables de Bernoulli

- $Y = F(X_1, \ldots, X_n) = n^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_n)$
- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. centrées à valeurs dans $[-1, 1]$

Optimalité pour les variables de Bernoulli

- $Y = F(X_1, \dots, X_n) = n^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_n)$
- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. centrées à valeurs dans $[-1, 1]$
- $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \dots, X_k)$

Optimalité pour les variables de Bernoulli

- $Y = F(X_1, \ldots, X_n) = n^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_n)$
- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. centrées à valeurs dans $[-1, 1]$
- $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \ldots, X_k)$
- $d_k = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_{k-1}) = n^{-1/2} X_k$

Optimalité pour les variables de Bernoulli

- $Y = F(X_1, \ldots, X_n) = n^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_n)$
- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. centrées à valeurs dans $[-1, 1]$
- $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \ldots, X_k)$
- $d_k = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_{k-1}) = n^{-1/2} X_k$
- $\operatorname{osc}(d_k) = 2n^{-1/2}$ et $\operatorname{osc}(d_1)^2 + \cdots + \operatorname{osc}(d_n)^2 = 4$

Optimalité pour les variables de Bernoulli

- $Y = F(X_1, \ldots, X_n) = n^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_n)$
- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. centrées à valeurs dans $[-1, 1]$
- $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \ldots, X_k)$
- $d_k = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_{k-1}) = n^{-1/2} X_k$
- $\operatorname{osc}(d_k) = 2n^{-1/2}$ et $\operatorname{osc}(d_1)^2 + \cdots + \operatorname{osc}(d_n)^2 = 4$
- Azuma-Hoeffding $\Rightarrow$ borne sous-gaussienne $\exp(-\frac{1}{2}r^2)$

Optimalité pour les variables de Bernoulli

- $Y = F(X_1, \ldots, X_n) = n^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_n)$
- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. centrées à valeurs dans $[-1, 1]$
- $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \ldots, X_k)$
- $d_k = \mathbb{E}(Y \,|\, \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \,|\, \mathcal{F}_{k-1}) = n^{-1/2} X_k$
- $\operatorname{osc}(d_k) = 2n^{-1/2}$ et $\operatorname{osc}(d_1)^2 + \cdots + \operatorname{osc}(d_n)^2 = 4$
- Azuma-Hoeffding $\Rightarrow$ borne sous-gaussienne $\exp(-\frac{1}{2}r^2)$
- TCL pour plus grande variance possible (Bernoulli) !

Oscillation partielle conditionnelle (McDiarmid)

- Bien souvent F n'est pas linéaire

Oscillation partielle conditionnelle (McDiarmid)

- Bien souvent F n'est pas linéaire
- $Y = F(X_1, \ldots, X_n)$, $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \ldots, X_k)$, $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d.

Oscillation partielle conditionnelle (McDiarmid)

- Bien souvent F n'est pas linéaire
- $Y = F(X_1, \dots, X_n)$, $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \dots, X_k)$, $X_1, \dots, X_n$ i.i.d.
- $d_k = \mathbb{E}(F(X_1, \dots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(F(X_1, \dots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1})$

Oscillation partielle conditionnelle (McDiarmid)

- Bien souvent F n'est pas linéaire
- $Y = F(X_1, \ldots, X_n)$, $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \ldots, X_k)$, $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d.
- $d_k = \mathbb{E}(F(X_1, \ldots, X_n) \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(F(X_1, \ldots, X_n) \mid \mathcal{F}_{k-1})$
- $(X'_1, \ldots, X'_n)$ copie indépendante de $(X_1, \ldots, X_n)$

$$\mathbb{E}(F(X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_n) \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(F(X_1, \ldots, X'_k, \ldots, X_n) \mid \mathcal{F}_k)$$

Oscillation partielle conditionnelle (McDiarmid)

- Bien souvent F n'est pas linéaire
- $Y = F(X_1, \ldots, X_n)$, $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \ldots, X_k)$, $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d.
- $d_k = \mathbb{E}(F(X_1, \ldots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(F(X_1, \ldots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1})$
- $(X'_1, \ldots, X'_n)$ copie indépendante de $(X_1, \ldots, X_n)$

$$\mathbb{E}(F(X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(F(X_1, \ldots, X'_k, \ldots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_k)$$

- Oscillation partielle conditionnelle de F

$$d_k = \mathbb{E}(F(X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_n) - F(X_1, \ldots, X'_k, \ldots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_k)$$

Oscillation partielle conditionnelle (McDiarmid)

- Bien souvent F n'est pas linéaire
- $Y = F(X_1, \dots, X_n)$, $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \dots, X_k)$, $X_1, \dots, X_n$ i.i.d.
- $d_k = \mathbb{E}(F(X_1, \dots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(F(X_1, \dots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1})$
- $(X'_1, \dots, X'_n)$ copie indépendante de $(X_1, \dots, X_n)$

$$\mathbb{E}(F(X_1, \dots, X_k, \dots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(F(X_1, \dots, X'_k, \dots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_k)$$

- Oscillation partielle conditionnelle de F

$$d_k = \mathbb{E}(F(X_1, \dots, X_k, \dots, X_n) - F(X_1, \dots, X'_k, \dots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_k)$$

- $\operatorname{osc}(d_k) \leqslant 2\|d_k\|_\infty \leqslant 2\mathbb{E}(\|F\|_{\mathrm{Lip}_k}(X_1, \dots, X_n) \,|\, \mathcal{F}_k)$

Preuve de Azuma-Hoeffding (1/2)

- Idée : Markov, Laplace, conditionement, v.a. bornées

Preuve de Azuma-Hoeffding (1/2)

- Idée : Markov, Laplace, conditionement, v.a. bornées
- $a \leqslant U \leqslant b$, $\mathbb{E}(U) = 0$

Preuve de Azuma-Hoeffding (1/2)

- Idée : Markov, Laplace, conditionement, v.a. bornées
- $a \leqslant U \leqslant b, \mathbb{E}(U) = 0$
- Convexité de $u \mapsto e^u$

$$\forall t \geqslant 0, \forall a \leqslant u \leqslant b, \quad e^{tu} \leqslant \frac{u-a}{b-a} e^{tb} + \frac{b-u}{b-a} e^{ta}$$

Preuve de Azuma-Hoeffding (1/2)

- Idée : Markov, Laplace, conditionement, v.a. bornées
- $a \leqslant U \leqslant b$, $\mathbb{E}(U) = 0$
- Convexité de $u \mapsto e^u$

$$\forall t \geqslant 0, \forall a \leqslant u \leqslant b, \quad e^{tu} \leqslant \frac{u-a}{b-a} e^{tb} + \frac{b-u}{b-a} e^{ta}$$

- $p = -a/(b-a)$, $f(x) = -px + \log(1 - p + pe^x)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{tU}) &\leqslant \frac{b}{b-a} e^{ta} - \frac{a}{b-a} e^{tb} \\ &= e^{ta}\left((1-p) + pe^{t(b-a)}\right) \\ &= e^{f(t(b-a))}\end{aligned}$$

Preuve de Azuma-Hoeffding (1/2)

- Idée : Markov, Laplace, conditionement, v.a. bornées
- $a \leqslant U \leqslant b$, $\mathbb{E}(U) = 0$
- Convexité de $u \mapsto e^u$

$$\forall t \geqslant 0, \forall a \leqslant u \leqslant b, \quad e^{tu} \leqslant \frac{u-a}{b-a} e^{tb} + \frac{b-u}{b-a} e^{ta}$$

- $p = -a/(b-a)$, $f(x) = -px + \log(1 - p + pe^x)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{tU}) &\leqslant \frac{b}{b-a} e^{ta} - \frac{a}{b-a} e^{tb} \\ &= e^{ta}\left((1-p) + pe^{t(b-a)}\right) \\ &= e^{f(t(b-a))}\end{aligned}$$

- $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(x) \leqslant \frac{1}{4}$ donc $f(x) \leqslant \frac{1}{8}x^2$ et

$$\mathbb{E}(e^{tU}) \leqslant e^{\frac{t^2}{8}(b-a)^2}.$$

Preuve de Azuma-Hoeffding (2/2)

- $U = d_k = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_{k-1})$ sachant $\mathcal{F}_{k-1}$

$$\mathbb{E}(e^{td_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leqslant e^{\frac{t^2}{8}\operatorname{osc}(d_k)^2}.$$

Preuve de Azuma-Hoeffding (2/2)

- $U = d_k = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_{k-1})$ sachant $\mathcal{F}_{k-1}$

$$\mathbb{E}(e^{td_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leqslant e^{\frac{t^2}{8}\mathrm{osc}(d_k)^2}.$$

- $c = \mathrm{osc}(d_1)^2 + \cdots + \mathrm{osc}(d_n)^2$

Preuve de Azuma-Hoeffding (2/2)

- $U = d_k = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_{k-1})$ sachant $\mathcal{F}_{k-1}$

$$\mathbb{E}(e^{td_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leqslant e^{\frac{t^2}{8}\operatorname{osc}(d_k)^2}.$$

- $c = \operatorname{osc}(d_1)^2 + \cdots + \operatorname{osc}(d_n)^2$
- Somme télescopique $Y - \mathbb{E}(Y) = d_n + \cdots + d_1$

$$\mathbb{E}(e^{t(Y-\mathbb{E}(Y))}) = \mathbb{E}(e^{t(d_{n-1}+\cdots+d_1)}\mathbb{E}(e^{td_n} \mid \mathcal{F}_{n-1})) \quad \leqslant \cdots \leqslant e^{\frac{ct^2}{8}}.$$

Preuve de Azuma-Hoeffding (2/2)

- $U = d_k = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_{k-1})$ sachant $\mathcal{F}_{k-1}$

$$\mathbb{E}(e^{td_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leqslant e^{\frac{t^2}{8}\operatorname{osc}(d_k)^2}.$$

- $c = \operatorname{osc}(d_1)^2 + \cdots + \operatorname{osc}(d_n)^2$
- Somme télescopique $Y - \mathbb{E}(Y) = d_n + \cdots + d_1$

$$\mathbb{E}(e^{t(Y-\mathbb{E}(Y))}) = \mathbb{E}(e^{t(d_{n-1}+\cdots+d_1)}\mathbb{E}(e^{td_n} \mid \mathcal{F}_{n-1})) \quad \leqslant \cdots \leqslant e^{\frac{ct^2}{8}}.$$

- Inégalité de Markov $\mathbb{P}(Z \geqslant R) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Z\geqslant R}) \leqslant R^{-1}\mathbb{E}(Z)$

$$\mathbb{P}(Y - \mathbb{E}(Y) \geqslant r) = \mathbb{P}(e^{t(Y-\mathbb{E}(Y))} \geqslant e^{tr}) \leqslant e^{-tr}\mathbb{E}(e^{t(Y-\mathbb{E}(Y))})$$

$$\leqslant e^{-tr+\frac{ct^2}{8}} \leqslant e^{\inf_{t>0}\left(-tr+\frac{ct^2}{8}\right)} = e^{-\frac{2r^2}{c}}.$$

Preuve de Azuma-Hoeffding (2/2)

- $U = d_k = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_{k-1})$ sachant $\mathcal{F}_{k-1}$

$$\mathbb{E}(e^{td_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leqslant e^{\frac{t^2}{8}\operatorname{osc}(d_k)^2}.$$

- $c = \operatorname{osc}(d_1)^2 + \cdots + \operatorname{osc}(d_n)^2$
- Somme télescopique $Y - \mathbb{E}(Y) = d_n + \cdots + d_1$

$$\mathbb{E}(e^{t(Y-\mathbb{E}(Y))}) = \mathbb{E}(e^{t(d_{n-1}+\cdots+d_1)}\mathbb{E}(e^{td_n} \mid \mathcal{F}_{n-1})) \quad \leqslant \cdots \leqslant e^{\frac{ct^2}{8}}.$$

- Inégalité de Markov $\mathbb{P}(Z \geqslant R) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Z\geqslant R}) \leqslant R^{-1}\mathbb{E}(Z)$

$$\mathbb{P}(Y - \mathbb{E}(Y) \geqslant r) = \mathbb{P}(e^{t(Y-\mathbb{E}(Y))} \geqslant e^{tr}) \leqslant e^{-tr}\mathbb{E}(e^{t(Y-\mathbb{E}(Y))})$$

$$\leqslant e^{-tr+\frac{ct^2}{8}} \leqslant e^{\inf_{t>0}\left(-tr+\frac{ct^2}{8}\right)} = e^{-\frac{2r^2}{c}}.$$

- Y et $-Y$ donne $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant r) \leqslant 2e^{-\frac{2r^2}{c}}.\square$

Wassily Hoeffding

1914 – 1991

Outline

Valeurs singulières

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A^* = \bar{A}^\top$

Valeurs singulières

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A^* = \bar{A}^\top$
- $s_k = \lambda_k(\sqrt{AA^*})$, $s_1(A) \geqslant \cdots \geqslant s_n(A) \geqslant 0$

Valeurs singulières

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A^* = \bar{A}^\top$
- $s_k = \lambda_k(\sqrt{AA^*})$, $s_1(A) \geqslant \cdots \geqslant s_n(A) \geqslant 0$
- Singular Value Decomposition (SVD)

$$A = V\mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)U^* = \sum_{k=1}^{n} s_k(A) v_k u_k^*$$

Valeurs singulières

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A^* = \bar{A}^\top$
- $s_k = \lambda_k(\sqrt{AA^*})$, $s_1(A) \geqslant \cdots \geqslant s_n(A) \geqslant 0$
- Singular Value Decomposition (SVD)

$$A = V\mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)U^* = \sum_{k=1}^{n} s_k(A) v_k u_k^*$$

- Empirical spectral distribution (ESD) (sur $\mathbb{R}_+$)

$$\nu_A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{s_k(A)}$$

Valeurs singulières

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A^* = \bar{A}^\top$
- $s_k = \lambda_k(\sqrt{AA^*})$, $s_1(A) \geqslant \cdots \geqslant s_n(A) \geqslant 0$
- Singular Value Decomposition (SVD)

$$A = V\mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)U^* = \sum_{k=1}^{n} s_k(A) v_k u_k^*$$

- Empirical spectral distribution (ESD) (sur $\mathbb{R}_+$)

$$\nu_A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{s_k(A)}$$

- $\nu_A(J) = \frac{1}{n}\mathrm{card}\{1 \leqslant k \leqslant n \ : \ s_k(A) \in J\}$

Valeurs singulières

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A^* = \bar{A}^\top$
- $s_k = \lambda_k(\sqrt{AA^*})$, $s_1(A) \geqslant \cdots \geqslant s_n(A) \geqslant 0$
- Singular Value Decomposition (SVD)

$$A = V\mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)U^* = \sum_{k=1}^{n} s_k(A) v_k u_k^*$$

- Empirical spectral distribution (ESD) (sur $\mathbb{R}_+$)

$$\nu_A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{s_k(A)}$$

- $\nu_A(J) = \frac{1}{n}\mathrm{card}\{1 \leqslant k \leqslant n \ : \ s_k(A) \in J\}$
- $\displaystyle\int f \, d\nu_A = \frac{1}{n}(f(s_1(A)) + \cdots + f(s_n(A)))$

Variation d'une fonction

- *Variation* de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$V(f) = \sup_{x \in \mathcal{S}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \in [0, +\infty]$$

Variation d'une fonction

- *Variation* de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$V(f) = \sup_{x \in \mathcal{S}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \in [0, +\infty]$$

- Ici $\mathcal{S} = \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \nearrow\}$

Variation d'une fonction

- *Variation* de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$V(f) = \sup_{x \in \mathcal{S}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \in [0, +\infty]$$

- Ici $\mathcal{S} = \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \nearrow\}$
- Si $f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ alors $V(f) = \|f'\|_1$

Variation d'une fonction

- *Variation* de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$V(f) = \sup_{x \in \mathcal{S}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \in [0, +\infty]$$

- Ici $\mathcal{S} = \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \nearrow\}$
- Si $f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ alors $V(f) = \|f'\|_1$
- Si $f = \mathbf{1}_{]-\infty, s]}$ avec $s \in \mathbb{R}$ alors $V(f) = 1$.

Concentration

Théorème (Concentration pour mesures spectrales)

- *M matrice aléatoire $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à lignes indépendantes*

Note : par exemple $(M_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ i.i.d.
But : ramener analyse asymptotique de ν_M à sa celle de $\mathbb{E}\nu_M$.

Concentration

Théorème (Concentration pour mesures spectrales)

- *M matrice aléatoire $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à lignes indépendantes*
- *Alors pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée et tout $r \geqslant 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\int f\,d\nu_M - \mathbb{E}\int f\,d\nu_M\right| \geqslant r\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{nr^2}{2V(f)^2}\right).$$

Note : par exemple $(M_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ i.i.d.
But : ramener analyse asymptotique de ν_M à sa celle de $\mathbb{E}\nu_M$.

Preuve (1/3) Entrelacement

- Norme d'opérateur

$$s_1(A) = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2, \quad s_n(A) = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

Preuve (1/3) Entrelacement

- Norme d'opérateur

$$s_1(A) = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2, \quad s_n(A) = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

- Formule variationnelle de Courant-Fischer

$$s_k(A) = \max_{V \in \mathcal{G}_k} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2 = \min_{V \in \mathcal{G}_{n-k+1}} \max_{\substack{x \in V \\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2$$

Preuve (1/3) Entrelacement

- Norme d'opérateur

$$s_1(A) = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2, \quad s_n(A) = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

- Formule variationnelle de Courant-Fischer

$$s_k(A) = \max_{V\in\mathcal{G}_k} \min_{\substack{x\in V\\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2 = \min_{V\in\mathcal{G}_{n-k+1}} \max_{\substack{x\in V\\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2$$

- $\mathcal{G}_k$ sous-espaces de dimension k

Preuve (1/3) Entrelacement

- Norme d'opérateur

$$s_1(A) = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2, \quad s_n(A) = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

- Formule variationnelle de Courant-Fischer

$$s_k(A) = \max_{V\in\mathcal{G}_k} \min_{\substack{x\in V \\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2 = \min_{V\in\mathcal{G}_{n-k+1}} \max_{\substack{x\in V \\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2$$

- $\mathcal{G}_k$ sous-espaces de dimension k
- Entrelacement : si $r = \mathrm{rang}(A-B)$ alors pour tout k

$$s_{k+r}(A) \leqslant s_k(B) \leqslant s_{k-r}(A)$$

Preuve (1/3) Entrelacement

- Norme d'opérateur

$$s_1(A) = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2, \quad s_n(A) = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

- Formule variationnelle de Courant-Fischer

$$s_k(A) = \max_{V \in \mathcal{G}_k} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2 = \min_{V \in \mathcal{G}_{n-k+1}} \max_{\substack{x \in V \\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2$$

- $\mathcal{G}_k$ sous-espaces de dimension k
- Entrelacement : si $r = \mathrm{rang}(A - B)$ alors pour tout k

$$s_{k+r}(A) \leqslant s_k(B) \leqslant s_{k-r}(A)$$

- $s_k = 0$ si $k > n$ et $s_k = +\infty$ si $k < 1$

Preuve (2/3)

- $F_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonction de répartition de ν_A

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_A(t) = \frac{\mathrm{card}\{1 \leqslant k \leqslant n : s_k(A) \leqslant t\}}{n}.$$

Preuve (2/3)

- $F_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonction de répartition de ν_A

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_A(t) = \frac{\mathrm{card}\{1 \leqslant k \leqslant n : s_k(A) \leqslant t\}}{n}.$$

- Si $\mathrm{rang}(A - B) \leqslant 1$ alors par entrelacement

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_A(t) - F_B(t)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Preuve (2/3)

- $F_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonction de répartition de ν_A
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_A(t) = \frac{\mathrm{card}\{1 \leqslant k \leqslant n : s_k(A) \leqslant t\}}{n}.$$
- Si $\mathrm{rang}(A-B) \leqslant 1$ alors par entrelacement
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_A(t) - F_B(t)| \leqslant \frac{1}{n}.$$
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable avec $f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ alors, par IPP
$$\left| \int f\, d\nu_A - \int f\, d\nu_B \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} f'(t)(F_A(t) - F_B(t))\, dt \right| \leqslant \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|\, dt.$$

Preuve (2/3)

- $F_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonction de répartition de ν_A
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_A(t) = \frac{\mathrm{card}\{1 \leqslant k \leqslant n : s_k(A) \leqslant t\}}{n}.$$
- Si $\mathrm{rang}(A-B) \leqslant 1$ alors par entrelacement
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_A(t) - F_B(t)| \leqslant \frac{1}{n}.$$
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable avec $f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ alors, par IPP
$$\left|\int f\,d\nu_A - \int f\,d\nu_B\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f'(t)(F_A(t) - F_B(t))\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|\,dt.$$
- Approximation : pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée
$$\left|\int f\,d\nu_A - \int f\,d\nu_B\right| \leqslant \frac{V(f)}{n}.$$

Preuve (3/3)

- Fixons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée

Preuve (3/3)

- Fixons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée
- Soit $A(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_n$ avec lignes $x_1, \ldots, x_n$

Preuve (3/3)

- Fixons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée
- Soit $A(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_n$ avec lignes $x_1, \ldots, x_n$
- Soit $F : (\mathbb{C}^n)^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int f \, d\nu_{A(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Preuve (3/3)

- Fixons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée
- Soit $A(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_n$ avec lignes $x_1, \ldots, x_n$
- Soit $F : (\mathbb{C}^n)^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int f \, d\nu_{A(x_1,\ldots,x_n)}.$$

- Pour tous $x_1, \ldots, x_n$ et $x_1', \ldots, x_n'$ et tout $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\operatorname{rang}\{A(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - A(x_1, \ldots, x_k', \ldots, x_n)\} \leqslant 1$$

Preuve (3/3)

- Fixons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée
- Soit $A(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_n$ avec lignes $x_1, \ldots, x_n$
- Soit $F : (\mathbb{C}^n)^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int f \, d\nu_{A(x_1, \ldots, x_n)}.$$

- Pour tous $x_1, \ldots, x_n$ et $x'_1, \ldots, x'_n$ et tout $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\mathrm{rang}\{A(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - A(x_1, \ldots, x'_k, \ldots, x_n)\} \leqslant 1$$

- Grâce à l'entrelacement

$$|F(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x'_k, \ldots, x_n)| \leqslant \frac{V(f)}{n}.$$

Preuve (3/3)

- Fixons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée
- Soit $A(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_n$ avec lignes $x_1, \ldots, x_n$
- Soit $F : (\mathbb{C}^n)^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int f \, d\nu_{A(x_1,\ldots,x_n)}.$$

- Pour tous $x_1, \ldots, x_n$ et $x'_1, \ldots, x'_n$ et tout $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\mathrm{rang}\{A(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - A(x_1, \ldots, x'_k, \ldots, x_n)\} \leqslant 1$$

- Grâce à l'entrelacement

$$|F(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x'_k, \ldots, x_n)| \leqslant \frac{V(f)}{n}.$$

- Azuma-Hoeffding : $Y = F(R_1, \ldots, R_n)$

Preuve (3/3)

- Fixons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée
- Soit $A(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_n$ avec lignes $x_1, \ldots, x_n$
- Soit $F : (\mathbb{C}^n)^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int f \, d\nu_{A(x_1,\ldots,x_n)}.$$

- Pour tous $x_1, \ldots, x_n$ et $x'_1, \ldots, x'_n$ et tout $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\mathrm{rang}\{A(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - A(x_1, \ldots, x'_k, \ldots, x_n)\} \leqslant 1$$

- Grâce à l'entrelacement

$$|F(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x'_k, \ldots, x_n)| \leqslant \frac{V(f)}{n}.$$

- Azuma-Hoeffding : $Y = F(R_1, \ldots, R_n)$
- $R_1, \ldots, R_n$ lignes de M, $\mathcal{F}_k = \sigma(R_1, \ldots, R_k)$, $\|d_k\|_\infty \leqslant \frac{V(f)}{n}$.□

Outline

1. Inégalité de Azuma-Hoeffding
2. Application aux matrices aléatoires
3. Application au voyageur de commerce

Traveling Salesman Problem (TSP)

- $X_1, \ldots, X_n$ positions des n villes dans $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$

Traveling Salesman Problem (TSP)

- $X_1, \ldots, X_n$ positions des n villes dans $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$
- Circuit = tournée = parcours cyclique sans redondance

Traveling Salesman Problem (TSP)

- $X_1, \ldots, X_n$ positions des n villes dans $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$
- Circuit = tournée = parcours cyclique sans redondance
- Circuit codé par une permutation $\sigma \in \Sigma_n$

Traveling Salesman Problem (TSP)

- $X_1, \ldots, X_n$ positions des n villes dans $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$
- Circuit = tournée = parcours cyclique sans redondance
- Circuit codé par une permutation $\sigma \in \Sigma_n$
- Longueur du circuit optimal (convention : $\sigma(n+1) = \sigma(1)$)

$$L_n = \min_{\sigma \in \Sigma_n} \sum_{k=1}^{n} \left\| X_{\sigma(k)} - X_{\sigma(k+1)} \right\|_2$$

Traveling Salesman Problem (TSP)

- $X_1, \ldots, X_n$ positions des n villes dans $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$
- Circuit = tournée = parcours cyclique sans redondance
- Circuit codé par une permutation $\sigma \in \Sigma_n$
- Longueur du circuit optimal (convention : $\sigma(n+1) = \sigma(1)$)

$$L_n = \min_{\sigma \in \Sigma_n} \sum_{k=1}^{n} \left\| X_{\sigma(k)} - X_{\sigma(k+1)} \right\|_2$$

- Trouver σ_{opt} (algorithme stochastique : recuit simulé)

Traveling Salesman Problem (TSP)

- $X_1, \ldots, X_n$ positions des n villes dans $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$
- Circuit = tournée = parcours cyclique sans redondance
- Circuit codé par une permutation $\sigma \in \Sigma_n$
- Longueur du circuit optimal (convention : $\sigma(n+1) = \sigma(1)$)

$$L_n = \min_{\sigma \in \Sigma_n} \sum_{k=1}^{n} \left\| X_{\sigma(k)} - X_{\sigma(k+1)} \right\|_2$$

- Trouver σ_{opt} (algorithme stochastique : recuit simulé)
- Trouver $L_n(X_1, \ldots, X_n)$ (si $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., randomisation)

Traveling Salesman Problem (TSP)

- $X_1, \ldots, X_n$ positions des n villes dans $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$
- Circuit = tournée = parcours cyclique sans redondance
- Circuit codé par une permutation $\sigma \in \Sigma_n$
- Longueur du circuit optimal (convention : $\sigma(n+1) = \sigma(1)$)

$$L_n = \min_{\sigma \in \Sigma_n} \sum_{k=1}^{n} \left\| X_{\sigma(k)} - X_{\sigma(k+1)} \right\|_2$$

- Trouver σ_{opt} (algorithme stochastique : recuit simulé)
- Trouver $L_n(X_1, \ldots, X_n)$ (si $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., randomisation)
- Autres problèmes d'optimisation combinatoire (randomisée) : plus longue sous-suite croissante, arbre couvrant minimal, appariement (euclidien) minimal.

Théorème (Bearwood-Halton-Hammersley)

- *Si $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. bornées de densités f sur $\mathbb{R}^d$ alors*

$$\frac{L_n}{n^{(d-1)/d}} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \gamma_d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{(d-1)/d} \, dx.$$

Théorème (Bearwood-Halton-Hammersley)

- *Si* $X_1, \ldots, X_n$ *i.i.d. bornées de densités* f *sur* $\mathbb{R}^d$ *alors*

$$\frac{L_n}{n^{(d-1)/d}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \gamma_d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{(d-1)/d}\,dx.$$

- *En particulier* $L_n \approx c\sqrt{n}$ *si* $d = 2$.

Concentration pour le TSP

Théorème (Réduction à l'espérance)

- *Si $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. uniformes sur $[0,1]^d$ alors*

$$\mathbb{P}\left(\frac{|L_n - \mathbb{E}L_n|}{n^{(d-1)/d}} \geqslant t\right) \leqslant 2\exp\begin{cases} -c_d t^2 \frac{n}{\log(n)} & \text{si } d = 2 \\ -c_d t^2 n & \text{si } d \geqslant 3 \end{cases}$$

Note : Lemme de Borel-Cantelli

Théorème (Réduction à l'espérance)

- *Si $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. uniformes sur $[0,1]^d$ alors*

$$\mathbb{P}(|L_n - \mathbb{E}L_n| \geqslant t) \leqslant 2\exp\begin{cases} -c_d t^2 \frac{1}{\log(n)} & si\ d = 2 \\ -c_d t^2 n^{(d-2)/d} & si\ d \geqslant 3 \end{cases}$$

Preuve (1/3) Un peu de géométrie

Lemme (Géométrie)

$$\forall x \in [0,1]^d, \quad g_k(x) := \mathbb{E}\left(\min_{1 \leqslant i \leqslant k} |X_i - x|\right) \leqslant c_d k^{-1/d}.$$

- $\mathbb{E}\left(\min_{1 \leqslant i \leqslant k} |X_i - x|\right) = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\min_{1 \leqslant i \leqslant k} |X_i - x| \geqslant r\right) dr$

Preuve (1/3) Un peu de géométrie

- Si $0 < r \leqslant \sqrt{d}$ alors

$$\mathbb{P}\left(\min_{1\leqslant i\leqslant k} |X_i - x| \geqslant r\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i \in B(x,r)^c)$$
$$= \left(1 - \left|B(x,r) \cap [0,1]^d\right|\right)^k$$
$$\leqslant \left(1 - a_d r^d\right)^k \leqslant \exp\left(-a_d k r^d\right)$$

Preuve (1/3) Un peu de géométrie

- Si $0 < r \leqslant \sqrt{d}$ alors

$$\mathbb{P}\left(\min_{1\leqslant i\leqslant k} |X_i - x| \geqslant r\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i \in B(x,r)^c)$$
$$= \left(1 - |B(x,r) \cap [0,1]^d|\right)^k$$
$$\leqslant \left(1 - a_d r^d\right)^k \leqslant \exp\left(-a_d k r^d\right)$$

- et $\int_0^\infty e^{-br^d}\, dr = \Gamma(1/d)/(db^{1/d})$

Preuve (1/3) Un peu de géométrie

- Si $0 < r \leqslant \sqrt{d}$ alors

$$\mathbb{P}\left(\min_{1\leqslant i\leqslant k} |X_i - x| \geqslant r\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i \in B(x,r)^c)$$

$$= \left(1 - |B(x,r) \cap [0,1]^d|\right)^k$$

$$\leqslant \left(1 - a_d r^d\right)^k \leqslant \exp\left(-a_d k r^d\right)$$

- et $\int_0^\infty e^{-br^d}\, dr = \Gamma(1/d)/(db^{1/d})$
- Si $r > \sqrt{d}$ alors $\mathbb{P}(\min_{1\leqslant i\leqslant k} |X_i - x| \geqslant r) = 0$

Preuve (1/3) Un peu de géométrie

- $V = \min_{x \in [0,1]^d} \left| B(x,r) \cap [0,1]^d \right|$

Preuve (1/3) Un peu de géométrie

- $V = \min_{x\in[0,1]^d} \left|B(x,r)\cap[0,1]^d\right|$
- Minimum atteint sur les coins du cube $[0,1]^d$

Preuve (1/3) Un peu de géométrie

- $V = \min_{x \in [0,1]^d} |B(x,r) \cap [0,1]^d|$
- Minimum atteint sur les coins du cube $[0,1]^d$
- Si $r \leqslant 1$ alors minimum $= 2^{-d}|B(0,r)| = 2^{-d}|B(0,1)|r^d$

Preuve (1/3) Un peu de géométrie

- $V = \min_{x \in [0,1]^d} |B(x,r) \cap [0,1]^d|$
- Minimum atteint sur les coins du cube $[0,1]^d$
- Si $r \leqslant 1$ alors minimum $= 2^{-d}|B(0,r)| = 2^{-d}|B(0,1)|r^d$
- Si $r \geqslant \sqrt{d}$ alors le volume vaut toujours 1

Preuve (1/3) Un peu de géométrie

- $V = \min_{x\in[0,1]^d} |B(x,r) \cap [0,1]^d|$
- Minimum atteint sur les coins du cube $[0,1]^d$
- Si $r \leqslant 1$ alors minimum $= 2^{-d}|B(0,r)| = 2^{-d}|B(0,1)|r^d$
- Si $r \geqslant \sqrt{d}$ alors le volume vaut toujours 1
- Si $1 < r \leqslant \sqrt{d}$ alors minimum $\geqslant$ cas $r = 1$

$$V \geqslant 2^{-d}|B(0,1)|(r/\sqrt{d})^d = a_d r^d$$

Preuve (1/3) Un peu de géométrie

- $V = \min_{x\in[0,1]^d} |B(x,r) \cap [0,1]^d|$
- Minimum atteint sur les coins du cube $[0,1]^d$
- Si $r \leqslant 1$ alors minimum $= 2^{-d}|B(0,r)| = 2^{-d}|B(0,1)|r^d$
- Si $r \geqslant \sqrt{d}$ alors le volume vaut toujours 1
- Si $1 < r \leqslant \sqrt{d}$ alors minimum $\geqslant$ cas $r = 1$

$$V \geqslant 2^{-d}|B(0,1)|(r/\sqrt{d})^d = a_d r^d$$

- Fin de la preuve du lemme de géométrie.

Preuve (2/3)

- Azuma-Hoeffding : $Y = L_n(X_1, \ldots, X_n) = F(X_1, \ldots, X_n) = L_n$

Preuve (2/3)

- Azuma-Hoeffding : $Y = L_n(X_1, \ldots, X_n) = F(X_1, \ldots, X_n) = L_n$
- $S \subset \mathbb{R}^d \mapsto L(S)$

$$L(S) \leqslant L(S \cup \{x\}) \leqslant L(S) + 2 \min_{y \in S} |x - y|.$$

Preuve (2/3)

- Azuma-Hoeffding : $Y = L_n(X_1, \ldots, X_n) = F(X_1, \ldots, X_n) = L_n$
- $S \subset \mathbb{R}^d \mapsto L(S)$

$$L(S) \leqslant L(S \cup \{x\}) \leqslant L(S) + 2 \min_{y \in S} |x - y|.$$

- $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_k\}$ et $x = x_k$ puis $x = x'_k$,

$$\begin{aligned}
&\left|F(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x'_k, \ldots, x_n)\right| \\
&\qquad \leqslant 2 \min_{i \neq k} \left|x'_k - x_i\right| + 2 \min_{i \neq k} |x_k - x_i| \\
&\qquad\qquad \leqslant 2 \min_{i > k} \left|x'_k - x_i\right| + 2 \min_{i > k} |x_k - x_i|.
\end{aligned}$$

Preuve (3/3)

- Rappel : $g_k(x) := \mathbb{E}\left(\min_{1\leqslant i\leqslant k} |X_i - x|\right)$. Donc pour $1 \leqslant k < n$

$$|d_k| \leqslant 2\mathbb{E}\left(\min_{i>k} |X_k - X_i| + \min_{i>k} |X'_k - X_i| \,\middle|\, \mathcal{F}_k\right)$$
$$= 2g_{n-k}(X_k) + 2\mathbb{E}(g_{n-k}(X'_k)).$$

Preuve (3/3)

- Rappel : $g_k(x) := \mathbb{E}\left(\min_{1\leqslant i\leqslant k} |X_i - x|\right)$. Donc pour $1 \leqslant k < n$

$$|d_k| \leqslant 2\mathbb{E}\left(\min_{i>k} |X_k - X_i| + \min_{i>k} |X'_k - X_i| \,\middle|\, \mathcal{F}_k\right)$$
$$= 2g_{n-k}(X_k) + 2\mathbb{E}(g_{n-k}(X'_k)).$$

- Lemme géométrique $\Rightarrow \|d_k\|_\infty \leqslant c_d(n-k)^{-1/d}$

Preuve (3/3)

- Rappel : $g_k(x) := \mathbb{E}\left(\min_{1\leqslant i\leqslant k} |X_i - x|\right)$. Donc pour $1 \leqslant k < n$

$$|d_k| \leqslant 2\mathbb{E}\left(\min_{i>k} |X_k - X_i| + \min_{i>k} |X'_k - X_i| \,\middle|\, \mathcal{F}_k\right) = 2g_{n-k}(X_k) + 2\mathbb{E}(g_{n-k}(X'_k)).$$

- Lemme géométrique $\Rightarrow \|d_k\|_\infty \leqslant c_d(n-k)^{-1/d}$
- D'autre part $\|d_n\|_\infty = \mathcal{O}_d(1)$ car X_i bornées

Preuve (3/3)

- Rappel : $g_k(x) := \mathbb{E}\left(\min_{1\leqslant i\leqslant k} |X_i - x|\right)$. Donc pour $1 \leqslant k < n$

$$|d_k| \leqslant 2\mathbb{E}\left(\min_{i>k} |X_k - X_i| + \min_{i>k} |X'_k - X_i| \,\middle|\, \mathcal{F}_k\right)$$
$$= 2g_{n-k}(X_k) + 2\mathbb{E}(g_{n-k}(X'_k)).$$

- Lemme géométrique $\Rightarrow \|d_k\|_\infty \leqslant c_d(n-k)^{-1/d}$
- D'autre part $\|d_n\|_\infty = \mathcal{O}_d(1)$ car X_i bornées
- Conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \|d_k\|_\infty^2 \leqslant \begin{cases} c_d \log(n) & \text{pour } d = 2, \\ c_d n^{(d-2)/d} & \text{pour } d > 2. \square \end{cases}$$

John Hammersley

1920 – 2004

Épilogue

- Concentration et grande dimension
  `Milman, Maurey, McDiarmid, Talagrand, Ledoux, Boucheron-Lugosi-Massart, Guionnet-Zeitouni, Rudelson-Vershynin, Tropp, ...`
- Superconcentration et concentration non-Lipschitz
  `Talagrand, Chatterjee, Adamczak, ...`
- Contributions
  `C.-Malrieu, Bordenave-C.-Caputo, C.-Guédon-Lecué-Pajor, ...`

Merci pour votre attention !