

Questions/réponses simples de calcul stochastique

Djalil CHAFAÏ

<http://djalil.chafai.net/>

Décembre 2008 – Compilé le 22 décembre 2008

Résumé

Ce court document donne des réponses simples à des questions concrètes de calcul stochastique posées par des statisticien(ne)s. N'hésitez pas à faire part de vos commentaires par courrier électronique.

0 À faire

Expliquer que la translatée d'une mesure de Wiener est absolument continue par rapport à la mesure de Wiener d'origine si et seulement si la translation est dans l'espace de Hilbert de Cameron-Martin des fonctions dont le carré de la dérivée est intégrable (absolue continuité), et donner le théorème de Cameron-Martin-Girsanov *in extenso*.

1 Liste de questions/réponses

Question 1.1 (Anne-Laure Fougères, décembre 2008). *Qu'elle est la meilleure manière de simuler la loi de la variable aléatoire $Z = \int_0^1 f(t) dB_t$ où $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction déterministe sympathique et où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard issu de 0 ?*

Réponse. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle de $(B_t)_{t \geq 0}$ définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s)_{0 \leq s \leq t}$ pour tout $t \geq 0$. Soit $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r \leq 1$ une suite de temps. Considérons une fonction aléatoire $F : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$F(t, \omega) = \sum_{i=1}^{r-1} E_i(\omega) \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$$

où pour tout $1 \leq i \leq r-1$ la variable aléatoire E_i est \mathcal{F}_{t_i} mesurable. On dispose alors de la formule stochastique suivante :

$$I(F) = \int_0^1 F(t, \cdot) dB_t = \sum_{i=1}^{r-1} E_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Cette formule permet de définir par un procédé d'approximation des intégrales stochastiques plus générales pour des fonctions F plus complexes, cf. par exemple [12] pour une introduction accessible, et [13, 6, 2] pour des introductions moins accessibles. Lorsque les

variables aléatoires $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont déterministes, la variable aléatoire $I(F)$ est gaussienne centrée et sa variance se calcule directement par bilinéarité. Revenons à la question posée. La fonction F est déterministe ($F(\cdot, \omega) = f$) et la variable aléatoire Z est **gaussienne centrée**. La variance de Z se calcule au moyen de l'**isométrie d'Itô** :

$$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^1 f(t) dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^1 f(t)^2 dt \right] = \int_0^1 f(t)^2 dt.$$

Pour simuler Z , il suffit donc de pré-calculer ou d'approcher par une méthode numérique l'intégrale **déterministe** $\iota = \int_0^1 f(t)^2 dt$ puis de **simuler la loi gaussienne** $\mathcal{N}(0, \iota)$. Pour s'en convaincre, lorsque $f = \mathbb{1}_{[0,t]}$ on trouve $\iota = t$ et donc $Z \sim \mathcal{N}(0, t)$, ce qui est bien normal car pour cette fonction f la variable aléatoire Z vaut B_t .

On peut également voir l'intégrale stochastique Z comme la valeur au temps 1 de la solution $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ de l'équation différentielle stochastique (ÉDS) très simple $dX_t = f(t)dB_t$ avec condition initiale $X_0 = 0$. Ainsi, toute méthode de simulation approchée de cette ÉDS permet en particulier de simuler de manière approchée Z . Une méthode classique pour les ÉDS : les **schémas d'Euler**, cf. par exemple [9, 8] ou [5]. Cependant, pour la question posée, l'ÉDS est si simple que la méthode explicite gaussienne évoquée précédemment est préférable. Les schémas d'Euler permettent de simuler de manière approchée la solution d'ÉDS plus générales de la forme

$$dX_t = f(t, X_t)dB_t + g(t, X_t)dt$$

dont la solution n'est pas forcément gaussienne (dès lors que $f(t, x)$ dépend de x où que $g(t, x)$ n'est pas affine en x . Lorsque $f(t, x) = \alpha$ et $g(t, x) = -\beta x$ on obtient un processus gaussien d'Ornstein-Uhlenbeck) :

$$X_1 = \int_0^1 f(t, X_t) dB_t + \int_0^1 g(t, X_t) dt.$$

Ces méthodes numériques sont utilisées en finance mathématique [7]. En statistique, les intégrales stochastiques gaussiennes apparaissent par exemple dans des théorèmes limites du type TCL, cf. également les problèmes statistiques liés aux processus de diffusion [10].

Les schémas d'Euler pour les ÉDS peuvent être poussés à des ordres plus élevés. Le *schéma de Milstein* par exemple correspond à une approximation à l'ordre deux, peu utilisée toutefois en pratique. On distingue l'erreur d'approximation forte de l'erreur d'approximation faible (i.e. en espérance, qui fait gagner un ordre de puissance $n^{1/2}$ où n est le nombre de pas de discrétisation du temps). Pour ces aspects, on pourra consulter par exemple [8, 9] et [1]. Des approches plus originales (utiles ?) figurent dans [3, 4, 11]. \square

Question 1.2 (Béatrice Laurent-Bonneau, septembre 2006). *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard issu de 0 et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ la solution de l'équation différentielle stochastique (ÉDS) suivante : $dX_t = dB_t + f(t)dt$, $X_0 = 0$. Qu'elle est la densité de la loi de $(X_t)_{t \geq 0}$ par rapport à $(B_t)_{t \geq 0}$, sur l'espace des trajectoires ? Comment s'exprime la log-vraisemblance ?*

Réponse. On a $X_t = \int_0^t f(s) ds + B_t \sim \mathcal{N}(\int_0^t f(s) ds, t)$ pour tout $t \geq 0$. Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est gaussien, de même fonction de covariance que $(B_t)_{t \geq 0}$. La densité de la loi de $(X_t)_{t \geq 0}$ par rapport à $(B_t)_{t \geq 0}$, sur l'espace des trajectoires est donnée par la formule de

Cameron-Martin-Girsanov, cf. [12, Théorème 8.6.4 page 162 et exemple 8.6.5 page 164]. Plus précisément, soit H une fonction qui dépend de la trajectoire sur l'intervalle de temps $[0, t]$. Par exemple, une fonction de la forme $H(x_{[0,t]}) = \mathbb{1}_{x_{s_1} \in A_1} \cdots \mathbb{1}_{x_{s_n} \in A_n}$ où les s_i sont fixés dans $[0, t]$ et où les A_i sont des boréliens de \mathbb{R} . Alors on a

$$E [H(X_{[0,t]})] = E [H(W_{[0,t]})Q((W_{[0,t]}))]$$

où

$$\log Q(W_{[0,t]}) := \int_0^t f(s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f(s)^2 ds.$$

La fonction Q est la densité recherchée par rapport à la loi de $(B_t)_{t \geq 0}$ sur $[0, t]$. Comme la motivation de la question est de calculer des vraisemblances, on souhaite surtout exprimer Q en terme de $(X_t)_{t \geq 0}$ plutôt qu'en terme de $(B_t)_{t \geq 0}$. Or l'ÉDS donne immédiatement

$$\log Q = \int_0^t f(s) dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s) ds,$$

qui est la log-vraisemblance recherchée. Au passage, quand f est constante et égale à un réel θ , on trouve bien que le maximum de vraisemblance en θ vaut X_t/t . À présent, pour deux fonctions f et g et une trajectoire observée $X_{[0,t]}$, le logarithme du rapport de vraisemblance vaut :

$$\int_0^t (f - g)(s) dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t (f^2 - g^2)(s) ds.$$

On peut également exprimer $\log(Q)$ encore plus simplement car la dérive $f(t)dt$ dans l'ÉDS considérée est déterministe. Plus précisément, la formule d'Itô donne la formule d'intégration par parties suivante :

$$\int_0^t f(s) dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s f'(s) ds,$$

cf. [12, Théorème 4.1.5 page 46], et en utilisant l'ÉDS, la log-vraisemblance $\log(Q)$ s'écrit :

$$f(t)X_t - \int_0^t X_s f'(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s) ds.$$

□

Références

- [1] N. BOULEAU et D. LÉPINGLE – *Numerical methods for stochastic processes*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994, A Wiley-Interscience Publication.
- [2] K. L. CHUNG et R. J. WILLIAMS – *Introduction to stochastic integration*, second éd., Probability and its Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990.
- [3] J. G. GAINES et T. J. LYONS – « Random generation of stochastic area integrals », *SIAM J. Appl. Math.* **54** (1994), no. 4, p. 1132–1146.
- [4] — , « Variable step size control in the numerical solution of stochastic differential equations », *SIAM J. Appl. Math.* **57** (1997), no. 5, p. 1455–1484.

- [5] S. M. IACUS – *Simulation and inference for stochastic differential equations*, Springer Series in Statistics, Springer, New York, 2008, With „fR examples.
- [6] I. KARATZAS et S. E. SHREVE – *Brownian motion and stochastic calculus*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] — , *Methods of mathematical finance*, Applications of Mathematics (New York), vol. 39, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [8] P. E. KLOEDEN et E. PLATEN – *Numerical solution of stochastic differential equations*, Applications of Mathematics (New York), vol. 23, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [9] P. E. KLOEDEN, E. PLATEN et H. SCHURZ – *Numerical solution of SDE through computer experiments*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1994, With 1 IBM-PC floppy disk (3.5 inch; HD).
- [10] Y. A. KUTOYANTS – *Statistical inference for ergodic diffusion processes*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag London Ltd., London, 2004.
- [11] T. LYONS et N. VICTOIR – « Cubature on Wiener space », *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **460** (2004), no. 2041, p. 169–198, Stochastic analysis with applications to mathematical finance.
- [12] B. ØKSENDAL – *Stochastic differential equations*, sixth éd., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003, An introduction with applications.
- [13] D. REVUZ et M. YOR – *Continuous martingales and Brownian motion*, third éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1999.