Trucs probabilistes élémentaires

X MAP 432 PC 17

Automne 2013

Compter. Compter peut se faire en sommant des indicatrices : $\sum_n \mathbf{1}_{A_n}$

Probabilités. On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)$. Ceci ramène les probabilités à de l'intégration. Si $(B_n)_n$ est une partition de Ω alors la partition de l'unité $1 = \sum_n \mathbf{1}_{B_n}$ donne $\mathbf{1}_A = \sum_n \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B_n}$ et correspond à la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(A) = \sum_n \mathbb{P}(A \cap B_n)$.

Intégration. Les espérances et les sommes sont des intégrales. Ceci permet ensuite par exemple de les permuter avec le théorème de Fubini-Tonelli, et d'utiliser les théorèmes de convergence : convergence monotone, convergence dominée, lemme de Fatou.

Presque sûr. Si X est une v.a.r. à valeurs dans $[0,\infty]$ alors $\mathbb{E}(X)$ fait sens dans $[0,\infty]$, et $\mathbb{E}(X) < \infty$ implique que $\mathbb{P}(X < \infty) = 1$. Lorsque $X = \sum_n Y_n$, ceci permet de montrer que $\sum_n Y_n$ converge p.s. et en particulier que $Y_n \to 0$ p.s. Voici deux exemples remarquables :

— Premier lemme de Borel-Cantelli : si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors grâce aux trucs déjà vus

$$\mathbb{E}(\sum_n \mathbf{1}_{A_n}) = \sum_n \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_n}) = \sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$$

et donc $\mathbb{P}(\sum_n \mathbf{1}_{A_n} < \infty) = 1$, or $\{\sum_n \mathbf{1}_{A_n} = \infty\} = \overline{\lim}\, A_n$;

— LGN forte pour les v.a.r. $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes centrées et bornées dans L^4 : si $S_n = n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n)$ alors $\mathbb{E}(S_n^4) = \mathcal{O}(n^{-2})$, d'où, grâce aux trucs précédents,

$$\mathbb{E}(\sum_n S_n^4) = \sum_n \mathbb{E}(S_n^4) < \infty$$

et donc $\mathbb{P}(\sum_n S_n^4 < \infty) = 1$, d'où enfin $\mathbb{P}(S_n \to 0) = 1$.

Méthode de second moment. Pour étudier $Y = F(X_1, \ldots, X_n)$, on calcule $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$, puis on utilise l'inégalité de Tchebychev : $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq r) \leq r^{-2}\mathrm{Var}(Y)$. La décomposition biais-variance $\mathbb{E}((Y-\theta)^2) = (\mathbb{E}(Y) - \theta)^2 + \mathrm{Var}(Y)$ est parfois utile ici.

Concentration. Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est symétrique et dépend peu de chaque variable, alors $F(X_1, \ldots, X_n)$ est proche de son espérance quand les $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d.

Conditionnement. Conditionner pour régner : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$. Les espérances conditionnelles sont des espérances comme les autres, et ont donc les mêmes propriétés.