Projet X-MAP-311-2016-CHAFAI-2
Permutations aléatoires

Proposé par Djalil Chafaï

Second semestre 2015-2016

On s'intéresse à la simulation de la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

1. Pourquoi la méthode habituelle de simulation de loi discrète n'est pas utilisable?

2. Le logiciel que vous utilisez possède-t-il un générateur de permutations aléatoires ? Le cas échéant, préciser l'algorithme (faire une recherche dans l'aide ou sur Internet au besoin);

3. Fabriquons une permutation aléatoire σ dans $\mathcal{S}_n$ en tirant uniformément $\sigma(1)$ dans $\{1,\dots,n\}$, puis $\sigma(2)$ dans $\{1,\dots,n\} \setminus \{\sigma(1)\}$, etc. Il s'agit donc de tirages uniformes sans remise. Montrer que σ suit la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Préciser la complexité théorique de cet algorithme en fonction de n. Implémenter cet algorithme. Cet algorithme est-il praticable pour de grandes valeurs de n ? Comment générer une permutation de loi uniforme sur $\mathcal{S}_{n+1}$ à partir d'une permutation de loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$, en utilisant un seul appel à la fonction `rand` ? Quel est le coût effectif de l'accroissement d'un vecteur par insertion ?

4. Soit $U_1,\dots,U_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$, et σ une permutation (aléatoire) telle que $U_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq U_{\sigma(n)}$. Montrer que σ est unique avec probabilité 1, et que σ suit la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Peut-on remplacer la loi uniforme sur $[0,1]$ par une loi quelconque? Peut-on remplacer l'indépendance des U_i par une propriété plus faible ? Implémenter cet algorithme avec des boucles, puis grâce à une fonction `sort` dont votre logiciel dispose. Discuter la complexité de l'algorithme.

5. Soient $U_1,\dots,U_n$ des variables discrètes indépendantes avec U_i de loi uniforme sur $\{1,\dots,i\}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Montrer que la permutation aléatoire $(1,U_1)\cdots(n,U_n)$ suit la loi uniforme $\mathcal{S}_n$. Implémenter cet algorithme et précisez sa complexité.

6. Faites des simulations et de beaux graphiques pour comparer les algorithmes.

7. On dit que $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est un dérangement lorsque σ n'a pas de point fixe. Montrer que si σ_n est une permutation aléatoire de loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$, et si p_n est la probabilité qu'il s'agisse d'un dérangement, alors $p_n \to 1/e$ lorsque $n \to \infty$;

8. En déduire un algorithme de simulation de la loi uniforme sur l'ensemble des dérangements. Préciser sa complexité. Implémenter cet algorithme et illustrer ses performances;

9. Un appariement de $2n$ points est une partition de l'ensemble $\{1,\dots,2n\}$ en n parties de cardinal 2, chacune constituant un couple de points appariés. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des appariements de $2n$ points. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est en bijection avec l'ensemble des dérangements involutifs de $\{1,\dots,2n\}$. Montrer que $\mathrm{card}(\mathcal{A}_n) = (2n)!/(2^n n!)$. Comment se comporte $\mathrm{card}(\mathcal{A}_n)/\mathrm{card}(\mathcal{S}_n)$ quand $n \to \infty$?

10. Montrer que si σ_n est une permutation aléatoire de loi uniforme sur $\mathcal{S}_{2n}$ alors l'appariement aléatoire $\{\{\sigma_n(1),\sigma_n(n+1)\},\dots,\{\sigma_n(n),\sigma_n(n+n)\}\}$ suit la loi uniforme sur $\mathcal{A}_n$.