Projet X-MAP-311-2014-CHAFAI-1
Marche aléatoire en paysage aléatoire

Proposé par Djalil Chafaï

Second semestre 2013-2014

On s'intéresse au déplacement d'une particule dans $\mathbb{Z}$. On associe à chaque site x de $\mathbb{Z}$ un nombre réel aléatoire Y_x qui modélise un bonus (ou un malus). On dit que $(Y_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ est un paysage dans lequel évolue la particule. On modélise la position de la particule par une marche aléatoire $X = (X_n)_{n\geq 0}$ avec $X_0 = 0$ et $X_{n+1} = X_n + \varepsilon_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, où les $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = \pm 1) = 1/2$. On modélise le paysage par une suite aléatoire $Y = (Y_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ i.i.d. On suppose que X et Y sont indépendantes. Le bonus accumulé par la marche aléatoire en paysage aléatoire est donnée par la suite $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ définie par $Z_0 = 0$ et $Z_{n+1} = Z_n + Y_{X_{n+1}}$, donc $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_{X_k}$. On s'intéresse à quelques aspects du comportement de Z, notamment à la loi de Z_n.

On se place tout d'abord dans la situation où $\mathbb{P}(Y_1 = \pm 1) = 1/2$.

Q1 Montrez que $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $\mathbb{E}(Z_n) = 0$;

Q2 Montrez que $\mathrm{Var}(X_n)$ est d'ordre n (on dit que X a un comportement diffusif) ;

Q3 Précisez le comportement asymptotique de $X_n/\sqrt{\mathrm{Var}(X_n)}$ quand $n \to \infty$, ainsi que sa signification pour un échantillon de trajectoires de X ;

Q4 Montrez que $\mathbb{E}(Z_n^2) = n + 2\sum_{1\leq k<k'\leq n} \mathbb{P}(X_k = X_{k'})$;

Q5 En utilisant la formule de Stirling, en déduire que $\mathrm{Var}(Z_n) \geq cn^{3/2}$, où c est une constante (on dit que Z a un comportement sur-diffusif) ;

Q6 À l'aide du logiciel Scilab, simuler des trajectoires de X et de Z. Produire des graphiques comportant plusieurs trajectoires et illustrant la différence de comportement des variances de X et de Z.

Afin de raffiner l'étude de la loi de Z_n, on se place à présent dans la situation où Y_1 suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, ce qui va permettre quelques calculs.

Q7 Montrer que $Z_n \overset{\text{loi}}{=} \sqrt{\sum_{x\in\mathbb{Z}} L_n(x)^2}Z$ où $L_n(x) = \mathbf{1}_{\{X_1=x\}} + \cdots + \mathbf{1}_{\{X_n=x\}}$ et où Z est indépendante de loi $\mathcal{N}(0,1)$, puis que $\mathbb{P}(Z_n > n) \geq \mathbb{P}(Z > n/k)\mathbb{P}(L_n(0) > k)$;

Q8 Montrer que $\mathbb{P}(L_n(0) > k) \geq \mathbb{P}(T < n/k)^k$ où $T := \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$. Puis, en admettant[1] qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\mathbb{P}(T \geq t) \leq ct^{-1/2}$ pour tout $t \geq 1$, établir que $\mathbb{P}(L_n(0) > k) \geq e^{-2ck^{3/2}/n^{1/2}}$;

Q9 En utilisant $\int_t^\infty e^{-u^2/2}\,du \sim_{t\to+\infty} (1/t)e^{-t^2/2}$ et en choisissant k en fonction de n, en déduire que $\mathbb{P}(Z_n > n) \geq e^{-cn^{4/7}}$;

Q10 Montrer par ailleurs que pour tout réel a is existe $c > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_n > an) \approx e^{-cn}$ pour n grand. Indication : Cramer.

1. On pourrait d'ailleurs s'en convaincre à l'aide d'un programme Scilab !