Mathématiques et Informatique de la Décision et des Organisations

Introduction aux séries temporelles

Master 1 Mathématiques Appliquées

Exercices de travaux dirigés

Année 2015/2016

Quartier d'affaires de la Défense et bois de Boulogne
Vus du bureau B518-bis de l'Université Paris-Dauphine

DAUPHINE UNIVERSITÉ PARIS | MIDO MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE DE LA DECISION ET DES ORGANISATIONS

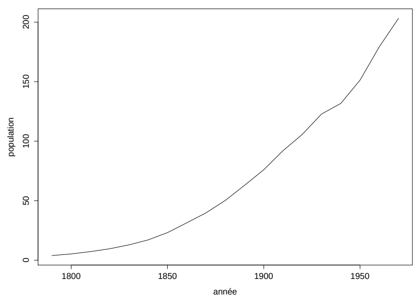
Version électronique composée avec LaTeX le 15 juillet 2016

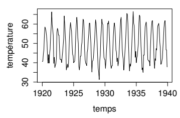
- Auteurs principaux des exercices et solutions :
  - Djalil Chafaï (enseignant Paris-Dauphine, 2013–)
  - Céline Duval (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
  - Céline Lévy-Leduc (enseignant Paris-Dauphine, 2010–2012)
- Contributeurs ou chasseurs de coquilles :
  - Marc Hoffmann (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
  - Stéphane Ivanoff (enseignant Paris-Dauphine, 2013–2015)
  - Camille Pagnard (enseignant Paris-Dauphine, 2014–)
  - Dylan Possamaï (enseignant Paris-Dauphine, 2012–)

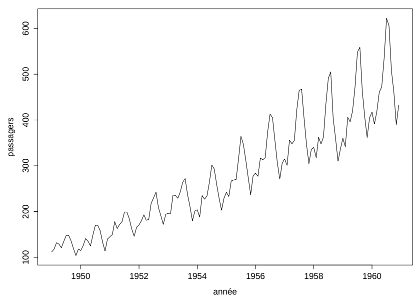
Feuille d'exercice **1**

Stationnarité, autocovariance, opérateur retard

Exercice 1 (Quelques exemples)**.** Pensez-vous que les données représentées dans les figures suivantes (population des USA, température à Nottingham, nombre de passagers aériens) sont les réalisations de processus stationnaires ?







Exercice 2 (Stationnarité et stationnarité stricte)**.** Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, et $Y = X\mathbf{1}_{U=1} - X\mathbf{1}_{U=0}$ où U est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X.

1. Montrer que X et Y ont même loi ;
2. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes ;
3. En déduire un processus qui est bruit blanc (faible) mais pas bruit blanc fort.

Exercice 3 (Marche aléatoire)**.** Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire de dérive μ : $X_t = \mu + X_{t-1} + Z_t$ pour tout $t \geq 1$, où $X_0 = 0$ et où $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est un bruit blanc fort.

1. Calculer la fonction d'autocovariance γ_X de X. Est-ce que X est stationnaire ?
2. Le processus $(\Delta X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est-il stationnaire ?

Exercice 4 (Somme de processus stationnaires)**.** Soient $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus stationnaires, décorrélés (c'est-à-dire que $\mathrm{cov}(X_t, Y_s) = 0$ pour tous s, t). Montrer que le processus $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par $Z_t = X_t + Y_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ est stationnaire, et exprimer son autocovariance en fonction de celles de X et de Y.

Exercice 5 (Stationnarité de processus)**.** Trouver les processus stationnaires parmi les processus suivants :

1. $X_t = Z_t$ si t est pair, et $X_t = Z_t + 1$ si t est impair, avec $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire ;

2. $X_t = Z_1 + \cdots + Z_t$ où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort ;
3. $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $\theta \in \mathbb{R}$ une constante ;
4. $X_t = Z_t Z_{t-1}$ où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort ;
5. $Y_t = (-1)^t Z_t$ et $X_t = Y_t + Z_t$ où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort.

Exercice 6 (Processus harmonique)**.** Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$ où A et B sont des variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle et de variance σ^2, et où $\theta \in \mathbb{R}$ est une constante. Le processus X est-il stationnaire ? Calculer sa fonction d'autocovariance.

Exercice 7 (Propriété de la fonction d'autocovariance)**.**

1. Montrer que la fonction d'autocovariance $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ d'un processus stationnaire est paire et de type positif (en fait l'équivalence est vraie mais admise ici) ;
2. Montrer que la fonction γ définie par $\gamma(0) = 1$, $\gamma(h) = \rho$ pour $|h| = 1$ et $\gamma(h) = 0$ sinon, est est une fonction d'autocovariance ssi $|\rho| \leq 1/2$. Donner un exemple de processus stationnaire ayant une telle fonction d'autocovariance ;
3. Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions d'autocovariance d'un processus stationnaire ?
   a) $\gamma(h) = 1$ si $h = 0$ et $\gamma(h) = 1/h$ si $h \neq 0$;
   b) $\gamma(h) = 1 + \cos(h\pi/2)$;
   c) $\gamma(h) = (-1)^{|h|}$.

Exercice 8 (Propriété de la fonction d'autocovariance – Bis)**.** On pose

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \Sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \rho \\ \rho & \ldots & \rho & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

1. À quelle condition sur ρ la matrice Σ_n est-elle une matrice de covariance pour tout n (indication : décomposer $\Sigma_t = \alpha I + A$ où A a un spectre simple à calculer) ;
2. Construire un processus stationnaire de matrices d'autocovariance $(\Sigma_n)_{n\geq 1}$

Exercice 9 (Estimation de tendance et de saisonnalité)**.** On considère le processus modélisé par $Y_t = \beta t + s_t + U_t$ où $\beta \in \mathbb{R}$, où s_t est une fonction périodique de période 4, et où $U = (U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire.

1. le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire ?
2. Montrer que $Z = (1-B^4)Y$ est stationnaire et calculer son autocovariance en fonction de celle de U.

Feuille d'exercice **2**

Opérateur retard, filtrage, densité spectrale

Exercice 10 (Tendance)**.** Soit X un processus avec tendance polynomiale d'ordre k :

$$X_t = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i + U_t,$$

où les coefficients a_i appartiennent à $\mathbb{R}$ et (U_t) est un processus stationnaire.

1. Montrer que le processus obtenu par l'application de $(1-B)$ à (X_t), où B désigne l'opérateur retard, admet une tendance polynomiale d'ordre $k-1$. Que se passe-t-il si on applique $(1-B)^p$ à (X_t) pour $p \in \mathbb{N}$?

1. On considère maintenant le processus $Y_t = X_t + S_t$ où S_t est une fonction d-périodique. Comment rendre le processus (Y_t) stationnaire ?

Exercice 11 (Filtrage)**.** On veut montrer la proposition suivante : si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire, et si $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels absolument sommables : $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i| < \infty$, alors $Y_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X_{t-i}$ définit un nouveau processus stationnaire.

1. Montrer que $Y_t \in L^1$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En déduire que Y_t est bien défini p.s. ;
2. Montrer que $Y_t \in L^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$;
3. Montrer que (Y_t) est un processus stationnaire tel que :

$$\mathbb{E}(Y) = \mu_Y = \mu_X \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i, \quad \text{et} \quad \gamma_Y(h) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_i a_j \gamma_X(h+j-i).$$

   En déduire la preuve de la proposition exprimée au départ.

Exercice 12 (Géométrique)**.** Soit (Z_t) un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et

$$X_t = \sum_{i=0}^{t} \lambda^i (Z_{t-i} - Z_{t-i-1}).$$

1. Discuter selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ de la stationnarité de (X_t) ;
2. Lorsque $\lambda \in]-1, 1[$, montrer qu'il existe un processus stationnaire (Y_t) tel que

$$(X_t - Y_t) \xrightarrow[t\to\infty]{L^2} 0.$$

Exercice 13 (Processus Auto-régressif)**.** On recherche un processus (X_t) solution de l'équation d'auto-régression $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ où (Z_t) est un bruit blanc de variance σ^2.

1. Lorsque $|\phi| < 1$, montrez qu'il existe une unique solution stationnaire ;
2. À partir de cette solution stationnaire, montrez qu'il est possible de construire une infinité de solutions non-stationnaires ;
3. Dans le cas où $|\phi| > 1$, montrez l'existence d'une unique solution stationnaire à cette équation. Cette solution est-elle causale ?
4. Lorsque $|\phi| = 1$, montrez qu'il ne peut pas exister de solution stationnaire.

Nous allons maintenant définir la notion de **densité spectrale**. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus stationnaire d'autocovariance γ_X, sa densité spectrale est par définition

$$f_X(\lambda) := \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\lambda}\gamma_X(n), \text{ pour } \lambda \in [-\pi, \pi].$$

5. Calculez la densité spectrale d'un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$;
6. Si Y_t est un processus stationnaire de densité spectrale f_Y et si l'on définit pour une famille absolument sommable $(\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ le processus

$$X_t := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j Y_{t-j},$$

montrez que

$$f_X(\lambda) = \left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j e^{-ij\lambda}\right|^2 f_y(\lambda).$$

On admettra que la densité spectrale caractérise complètement un processus stationnaire. On utilisera ce résultat dans la suite.

7. Montrer que (X_t) vérifie aussi l'équation $X_t = \phi^{-1}X_{t-1} + \widetilde{Z}_t$, où $(\widetilde{Z}_t)$ est un bruit blanc dont on déterminera la variance. Conclure.
8. Mêmes questions lorsque (X_t) est solution de $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ et $|\theta| > 1$.

Feuille d'exercice **3**

Équations et processus ARMA

Exercice 14 (ARMAda ou ARMArtial)**.** Soit (Z_t) un bruit blanc. Pour chacune des équations suivantes, existe-t-il un processus stationnaire (X_t) solution ?

1. $X_t + 0.2X_{t-1} - 0.48X_{t-2} = Z_t$;
2. $X_t + 1.9X_{t-1} + 0.88X_{t-2} = Z_t + 0.2Z_{t-1} + 0.7Z_{t-2}$;
3. $X_t + 0.6X_{t-2} = Z_t + 1.2Z_{t-1}$;
4. $X_t + 1.8X_{t-1} + 0.81X_{t-2} = Z_t$.

Exercice 15 (ARMA$(1,1)$)**.** On considère l'équation

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1},$$

où (Z_t) est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 et ϕ et θ sont des réels.

1. À quelles conditions sur ϕ et θ existe-t-il un processus (X_t) stationnaire solution de l'équation ci-dessus ?
2. À quelles conditions cette solution est-elle causale ? inversible ?

Dans la suite on supposera que ces conditions sont vérifiées.

3. Donner une représentation de la solution (X_t) sous la forme d'une somme infinie $\sum \psi_k Z_{t-k}$. On justifiera la convergence de cette somme, on précisera en quel sens elle converge et on donnera la valeur des coefficients $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.
4. Calculer la fonction d'autocorrélation de (X_t).

Exercice 16 (Produit d'ARMA)**.** On considère (X_t) et (Y_t) deux processus centrés et indépendants *i.e.* X_t et Y_s sont indépendants pour tous t, s. On définit le processus (Z_t) par $Z_t = X_tY_t$. Soient (ϵ_t) et (η_t) deux bruits blancs. On suppose que (X_t) et (Y_t) sont des ARMA(1,1) de paramètres respectifs ϕ_1, θ_1 et ϕ_2, θ_2 et de bruits blancs respectifs $(\epsilon_t), (\eta_t)$.

1. À quelles conditions peut-on écrire $X_t = \sum_{j\geq 0} \psi_j \epsilon_{t-j}$ et $Y_t = \sum_{j\geq 0} \widetilde{\psi}_j \eta_{t-j}$? Supposons ces conditions vérifiées dans la suite ;
2. Montrer que les processus (ϵ_t) et (η_t) sont décorrélés ;
3. Calculer la fonction d'autocorrélation du processus (Z_t).

Exercice 17 (ARMA(2,1))**.** On considère le processus (X_t) solution de

$$(1 - B + B^2/4)X_t = (1 + B)Z_t,$$

où (Z_t) est un bruit blan de variance σ^2.

1. Montrer que l'on peut écrire X_t sous la forme $X_t = \sum_{k\geq 0} \psi_k Z_{t-k}$.
2. Calculer les coefficients $(\psi_k)_{k\geq 0}$.
3. Calculer la fonction d'autocovariance de (X_t).

Mesure et densité spectrale

Exercice 18 (Herglotz)**.** Démontrez en utilisant le théorème de Herglotz que la fonction

$$h \in \mathbb{Z} \mapsto \rho(h) := \mathbf{1}_{h=0} + \alpha \mathbf{1}_{|h|=1} \in \mathbb{R},$$

est une fonction d'autocovariance si et seulement si $|\alpha| \leq 1/2$.

Exercice 19 (Somme)**.** Soient (X_t) et (Y_t) deux processus stationnaires, centrés et indépendants.

1. Justifiez la stationnarité du processus $S_t := X_t + Y_t$;
2. Calculer la mesure (et la densité le cas échéant) spectrale de S en fonction de celles de X et Y ;
3. Montrer que le processus $Z_t := X_t Y_t$ est stationnaire et calculez sa fonction d'autocovariance ;
4. On rappelle que le produit de convolution de deux fonctions f et g supposées 2π-périodiques est défini par

$$f \star g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(u) g(x-u) du.$$

   Calculer $f_X \star f_Y$ et en déduire f_Z.

Exercice 20 (Harmonique)**.** Soit (X_t) le processus défini par

$$X_t := A \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + B \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + Y_t,$$

où A et B sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, centrées, et de variance σ^2 et où Y est un processus stationnaire indépendants de A et B.

1. Calculer la fonction d'autocovariance et la mesure spectrale de X lorsque Y est un bruit blanc de variance σ_Y^2. Indication : masses de Dirac.
2. Même question quand Y est un MA(1) de paramètre θ.

Exercice 21 (Bestiaire)**.** Parmi les fonctions suivantes, lesquelles peuvent être des densités spectrales ?

1. $f(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2}$.
2. $f(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2}$.
3. $f(\lambda) = 476 + \cos(14\lambda)$.

Exercice 22 (Bande)**.** Soit un processus stationnaire Y de densité spectrale $f(\lambda)$ t.q.

$$0 \leq m \leq f(\lambda) \leq M < +\infty.$$

Pour $n \geq 1$ on note Γ_n la matrice de covariance de $(Y_1, ..., Y_n)$. Montrer que les valeurs propres de Γ_n sont dans un intervalle dont on précisera les bornes.

Feuille d'exercice 5

Prédiction linéaire

Exercice 23 (Inversibilité de la matrice d'autocovariance). On souhaite démontrer la propriété suivante : si $(\Gamma_n)_{n\geq 1} = (\gamma(i-j))_{1\leq i,j\leq n}$ sont les matrices d'autocovariance d'un processus stationnaire centré $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ d'autocovariance γ telle que $\gamma(0) > 0$ et $\gamma(h) \to 0$ quand $h \to \infty$, alors Γ_n est inversible pour tout n. Supposons donc qu'il existe $r \geq 1$ tel que Γ_r soit inversible et Γ_{r+1} soit singulière.

1. Montrer que pour tout $n \geq r+1$, il existe $b^{(n)} \in \mathbb{R}^r$ tel que
$$X_n = \sum_{j=1}^{r} b_j^{(n)} X_j;$$
2. Montrer que les b_j sont uniformément bornés ;
3. Conclure lorsque $\gamma(0) > 0$ et $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$.

Exercice 24 (Prédiction de processus auto-régressifs). Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire centré et $H_n = \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_n)$. On rappelle que le prédicteur à un pas $\hat{X}_{n+1}$ est défini par $\hat{X}_{n+1} = 0$ si $n = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,
$$\hat{X}_{n+1} = \varphi_{n,1} X_n + \cdots + \varphi_{n,n} X_1,$$
où les $\varphi_{n,i}$ vérifient les équations dites de Yule-Walker
$$\Gamma_n \varphi_n = \gamma_n$$
avec $\Gamma_n = (\gamma(i-j))_{1\leq i,j\leq n}$, $\gamma_n = (\gamma(1), \ldots, \gamma(n))^\top$, et $\varphi_n = (\varphi_{n,1}, \ldots, \varphi_{n,n})^\top$.

1. On suppose que $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus AR(1) causal tel que $X_t - \varphi_1 X_{t-1} = Z_t$ où $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2. Calculer $\hat{X}_2$. Montrer que $\hat{X}_3 = \varphi_1 X_2$. Montrer de façon plus générale qe $\hat{X}_n = \varphi_1 X_n$ pour tout $n \geq 1$
2. On suppose que $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus AR(2) causal tel que $X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} = Z_t$, où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2. Calculer $\hat{X}_2$. Montrer que $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1}$
3. Lorsque $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un AR(p) causal, montrer que pour tout $n \geq p$, $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_{n-1} + \cdots + \varphi_p X_{n-p+1}$.

Exercice 25 (Prédiction de processus ARMA). Soient $\mathcal{M}_n = \overline{\mathrm{Vect}(X_j : -\infty < j \leq n)}$ et $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus ARMA(p,q) causal et inversible satisfaisant : $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ où $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2. On pose : $\tilde{X}_t = \mathrm{Proj}_{\mathcal{M}_n} X_t$.

1. Montrer que pour tout $h \geq 1$ on a

$$\tilde{X}_{n+h} = -\sum_{j\geq 1} \pi_j \tilde{X}_{n+h-j} \quad \text{et} \quad \tilde{X}_{n+h} = \sum_{j\geq h} \psi_j Z_{n+h-j},$$

où $\sum_{j\geq 0} \pi_j z^j = \frac{\Phi(z)}{\Theta(z)}$ et $\sum_{j\geq 0} \psi_j z^j = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} q$, $|z| \leq 1$. De plus, montrer que

$$\mathbb{E}((X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h})^2) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2;$$

2. Calculer $\tilde{X}_{n+1}$ pour un AR(p) causal et un MA(1) inversible.

Exercice 26 (Prédiction d'un MA(1) et algorithme des innovations)**.** On rappelle ci-dessous l'algorithme des innovations. Celui-ci est lié à l'algorithme de Gram-Schmidt et peut s'appliquer à un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ non-stationnaire. On suppose que ce processus est de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance

$$\kappa(i, j) = \mathbb{E}(X_i X_j).$$

Rappelons que $\mathcal{H}_n = \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_n)$ et $v_n = \left\| X_{n+1} - \hat{X}_{n+1} \right\|^2$. On a, en posant $\hat{X}_1 = 0$,

$$\mathcal{H}_n = \mathrm{Vect}(X_1 - \hat{X}_1, X_2 - \hat{X}_2, \ldots, X_n - \hat{X}_n), \text{ pour tout } n \geq 1$$

de telle sorte que

$$\hat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} \left(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j} \right).$$

L'algorithme des innovations est une méthode récursive de calcul de $(\theta_{n,j})_{1\leq j\leq n}$ et v_n :

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j}(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j}) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_0 & = \kappa(1, 1); \\ \theta_{n,n-k} & = v_k^{-1}\Big(\kappa(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j}\theta_{n,n-j} v_j\Big), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1; \\ v_n & = \kappa(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j. \end{cases}$$

Proposer une façon de prédire un MA(1) en utilisant l'algorithme des innovations.

Feuille d'exercice **6**

Estimation

Exercice 27 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance)**.** Soit $Y_t = \theta + X_t$, où (X_t) est un AR(1) défini par $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$, où $|\phi| < 1$ et les Z_t sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On cherche à estimer θ à partir de $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}$. On note $\widehat{\theta}_n$ la moyenne empirique de $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ définie par

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i.$$

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{V}(\widehat{\theta}_n)$ et donner l'expression de γ défini par
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \gamma).$$
2. On choisit $\phi = 0.6$ et $\sigma^2 = 2$. Lorsqu'on observe $n = 100$ valeurs, on obtient $\widehat{\theta}_n = 0.271$. Construire un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour θ. Peut-on dire que $\theta = 0$?
3. On propose un autre estimateur de θ défini par $\widetilde{\theta}_n = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)}$ où $Y^{(n)} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1})^\top$, $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^\top$ et Γ_n est la matrice de covariance de $Y^{(n)}$. Justifier le choix de cet estimateur ;
4. Calculer $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{V}(\widetilde{\theta}_n)$. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 28 (Comparaison de différents estimateurs dans le cas d'un MA(1))**.** Soit un processus MA(1) défini par $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ où $|\theta| < 1$ et (Z_t) est un bruit blanc.

1. Proposer un estimateur $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ de θ en utilisant la méthode des moments (c'est-à-dire en utilisant un estimateur de la fonction d'autocorrélation) ;
2. Donner le comportement asymptotique de $\widehat{\rho}(1)$;
3. En déduire le comportement asymptotique de $\widehat{\theta}_n^{(1)}$;
4. Calculer l'efficacité relative de $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ et $\widehat{\theta}_n^{(2)}$ obtenu en utilisant l'algorithme des innovations dont on admettra qu'il satisfait :
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^{(2)} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1);$$
5. Calculer l'efficacité relative de $\widehat{\theta}_n^{(2)}$ et $\widehat{\theta}_n^{(3)}$ obtenu obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance dont on admettra qu'il satisfait :
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^{(3)} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1 - \theta^2).$$

Mathématiques et Informatique de la Décision et des Organisations

Introduction aux séries temporelles

Master 1 Mathématiques Appliquées

Correction succincte des exercices de travaux dirigés

Année 2015/2016

Quartier d'affaires de la Défense et bois de Boulogne
Vus du bureau B518-bis de l'Université Paris-Dauphine

DAUPHINE UNIVERSITÉ PARIS | MIDO MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE DE LA DECISION ET DES ORGANISATIONS

Version électronique composée avec LaTeX le 15 juillet 2016

- Auteurs principaux des exercices et solutions :
  - Djalil Chafaï (enseignant Paris-Dauphine, 2013–)
  - Céline Duval (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
  - Céline Lévy-Leduc (enseignant Paris-Dauphine, 2010–2012)
- Contributeurs ou chasseurs de coquilles :
  - Marc Hoffmann (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
  - Stéphane Ivanoff (enseignant Paris-Dauphine, 2013–2015)
  - Camille Pagnard (enseignant Paris-Dauphine, 2014–)
  - Dylan Possamaï (enseignant Paris-Dauphine, 2012–)

Stationnarité, autocovariance, opérateur retard

Solution succincte de l'exercice 1 (Quelques exemples). Évidemment, il est impossible de réfuter la stationnarité sans imposer un modèle structurel (partie déterministe + bruit par exemple). La série de la population comporte une tendance et n'est donc pas modélisable par un processus stationnaire. La série de la température à Nottingham comporte une saisonnalité et n'est donc pas modélisable par un processus stationnaire. La série des accidents de la route comporte à la fois une saisonnalité et une tendance et n'est donc pas modélisable par un processus stationnaire. Dans les trois cas, il faudrait utiliser un modèle avec une partie déterministe, et un bruit éventuellement stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 2 (Stationnarité et stationnarité stricte).

1. Condi. : $\mathbb{P}(Y \in I) = \mathbb{P}(X \in I)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(-X \in I)\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X \in I)$ car $X \overset{\text{loi}}{=} -X$;
2. Par linéarité : $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{U=1}) - \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{U=0}) = 0$ mais $\mathrm{Loi}(Y|X = x) = \frac{1}{2}(\delta_{-x} + \delta_x) \neq \mathrm{Loi}(Y)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.
3. Soit $X_0 = X$ et $X_t = \varepsilon_t X$ si $t \neq 0$, où les $(\varepsilon_t)_{t\neq 0}$ sont i.i.d. Rademacher $\mathbb{P}(\varepsilon_t = \pm 1) = 1/2$ et indépendantes de X. On a $\mathrm{E}(X_t) = 0$ et $\mathrm{Var}(X_t) = 1$ pour tout t. De plus, pour tous $s \neq t$, si $s \neq 0$ et $t \neq 0$ alors $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\varepsilon_s)\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, tandis que si $s = 0$ ou si $t = 0$ alors d'après ce qui précède $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = 0$.

Solution succincte de l'exercice 3 (Marche aléatoire).

1. Pour tout $t \geq 0$, on a $X_t = t\mu + Z_1 + \cdots + Z_t = t\mu + S_t$ d'où $\mathbb{E}(X_t) = t\mu$, et pour tout $s \leq t$, $\gamma_X(t, t+h) = \mathbb{E}((X_t - t\mu)(X_{t+h} - (t+h)\mu)) = \mathbb{E}(S_t(S_t + S'_h)) = \mathbb{E}(S_t^2) = \sigma^2 t$ qui dépend de t. Ainsi, même si $\mu = 0$, le processus n'est pas stationnaire.
2. On a $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \mu + Z_t$ qui est stationnaire ssi $\mu = 0$.

Solution succincte de l'exercice 4 (Somme de processus stationnaires). Par linéarité de l'espérance $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$ qui est constante tandis que par bilinéarité de la covariance

$$\gamma_Z(t, t+h) = \gamma_X(t, t+h) + \gamma_Y(t, t+h) + \mathrm{Cov}(X_t, Y_{t+h}) + \mathrm{Cov}(Y_t, X_{t+h}) = \gamma_x(h) + \gamma_Y(h)$$

qui ne dépend pas de t et donc Z est stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 5 (Stationnarité de processus).

1. Non stationnaire car μ_X non constante ;

2. Non stationnaire car $\gamma_X(t,t+h) = \mathbb{E}((Z_1 + \cdots + Z_t)^2) = \sigma^2 t$ dépend de t ;
3. Stationnaire MA(1) car $\mu_X = 0$ et $\gamma_X(t,t+h) = \sigma^2(1+\theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \sigma^2\theta\mathbf{1}_{|h|=1}$
4. Stationnaire bruit blanc (faible) car $\mu_X = 0$ et $\gamma_X(t,t+h) = \sigma^4\mathbf{1}_{h=0}$
5. Non stationnaire car $X_t = 2Z_t\mathbf{1}_{t \text{ pair}}$ d'où $\mathrm{Var}(X_t) = 4\sigma^2\mathbf{1}_{t \text{ pair}}$ non constante.

Solution succincte de l'exercice 6 (Processus harmonique)**.** On a

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(A)\cos(\theta t) + \mathbb{E}(B)\sin(\theta t) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\gamma_X(t,t+h) &= \mathbb{E}(A^2)\cos(\theta t)\cos(\theta(t+h)) + \mathbb{E}(B^2)\sin(\theta t)\sin(\theta(t+h)) + \overbrace{\mathbb{E}(AB)}^{=0}\cdots \\ &= \sigma^2\mathfrak{Re}(e^{i\theta t}e^{-i\theta(t+h)}) \\ &= \sigma^2\mathfrak{Re}(e^{-i\theta h}) \\ &= \sigma^2\cos(\theta h)\end{aligned}$$

qui ne dépend pas de t. Le processus est donc stationnaire (à trajectoires régulières !)

Solution succincte de l'exercice 7 (Propriété de la fonction d'autocovariance)**.**

1. On a $\gamma(-h) = \mathrm{Cov}(X_{-h}, X_0) = \mathrm{Cov}(X_0, X_h) = \gamma(h)$, et pour tout $n \geq 1$ et $v \in \mathbb{R}^n$,

$$(\langle v, \Gamma_n v\rangle =) \sum_{1\leq j,k\leq n} v_j\gamma(k-j)v_k = \sum_{1\leq j,k\leq n} \mathrm{Cov}(v_jX_j, v_kX_k) = \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^n v_jX_j\right) \geq 0;$$

2. La symétrie est vérifiée. Dire que ρ est de type positif revient à dire que pour tout $n \geq 0$, la matrice de Toeplitz symétrique tridiagonale suivante est de type positif :

$$\Gamma_n = (\gamma(j-k))_{1\leq j,k\leq n} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & & \\ \rho & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \rho \\ & & \rho & 1\end{pmatrix}.$$

Bien que praticable, la diagonalisation des matrices tridiagonales est une chose bien délicate. Faisons autrement : montrons que si $|\rho| \leq 1/2$ alors γ est la fonction d'autocovariance d'un processus X solution de l'équation MA(1) : $X_t = \theta X_{t-1} + Z_t$. On sait (exercice 5) que $\gamma_X(h) = \sigma^2(1+\theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \sigma^2\theta\mathbf{1}_{h=\pm1}$, ce qui donne $\sigma^2\theta = \rho$ et $\sigma^2(1+\theta^2) = 1$, d'où, en éliminant la variable σ : $\rho(1+\theta^2) = \theta$, qui est un trinôme du second degré en θ de discriminant $\Delta = 1 - 4\rho^2$, qui est ≥ 0 ssi $|\rho| \leq 1/2$ (ce qui donne une ou deux valeurs possibles pour le paramètre réel θ). Faisons maintenant l'hypothèse alternative que $|\rho| > 1/2$ et trouvons une valeur de n et un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $\langle v, \Gamma_n v\rangle < 0$. Pour $\rho > 1/2$, en tâtonnant, on trouve que $v = (-1, 1, -1, \ldots)^\top$ c'est-à-dire $v_j = (-1)^j$ convient car alors

$$\langle v, \Gamma_n v\rangle = \sum_{1\leq j,k\leq n} (-1)^{j+k}\Gamma_n(j,k) = n - 2(n-1)\rho = (n-1)\left(\frac{n}{n-1} - 2\rho\right)$$

qui est < 0 si $|\rho| > 1/2$ dès que $n > \frac{2\rho}{2\rho-1}$. Si $\rho < -1/2$, idem avec $v = (1, 1, 1, \ldots)$;

3. a) Non car γ est impaire alors que toute fonction d'autocovariance est paire ;

b) Fonction d'autocovariance de la somme $X+Y$ où X et Y sont des processus harmoniques indépendants à paramètres bien choisis (exercices 6 et 4) ;

c) Fonction d'autocovariance d'un processus harmonique à paramètres bien choisis.

Solution succincte de l'exercice 8 (Propriété de la fonction d'autocovariance – Bis)**.**

1. $\Sigma_n = (1-\rho)I_n + \rho J_n$. La matrice $J_n = (1)_{1\leq j,k\leq n}$ est symétrique de type positif, de rang 1, avec pour valeurs propres 0 de multiplicité $n-1$ et $\mathrm{Tr}(J_n) = n$ de multiplicité 1. Par conséquent, la matrice symétrique Σ_n a pour valeurs propres $1-\rho$ avec multiplicité $n-1$ et $1-\rho+\rho n$ avec multiplicité 1. La CNS recherchée est donc $\min(1-\rho, 1+(n-1)\rho) \geq 0$ pour tout $n \geq$, c'est-à-dire $-1/(n-1) \leq \rho \leq 1$ pour tout $n \geq 2$, soit $\rho \in [0,1]$. À ce sujet on rappelle le concept de matrice à diagonale dominante, et le théorème des disques de Gershgorin (démonstration en exercice) : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\mathrm{spec}(A) \subset \cup_{k=1}^n \bar{D}(A_{k,k}, \sum_{j\neq k} |A_{k,j}|)$;
   Autrement, supposons que Σ_t est bien la matrice de variance covariance d'un processus X stationnaire. L'inégalité de Schwartz assure que $\rho^2 = \mathrm{Cov}(X_0, X_1)^2 \leq \mathrm{Var}(X_0)\mathrm{Var}(X_1) = 1$. De plus, puisque Σ_t est symétrique de type positif pour tout $t \geq 2$, on doit avoir :
   $$(1,\ldots,1)\Sigma_t \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = t(1+(t-1)\rho) \geq 0$$
   D'oú $\rho \geq \sup_{t\geq 2} -1/(t-1) = 0$. De cette manière on prouve que la condition $0 \leq \rho \leq 1$ est nécéssaire, la question suivante prouve la suffisance.
2. Soit $X \sim \mathrm{BB}(0, 1-\rho)$, de sorte que $\gamma_X = (1-\rho)\mathbf{1}_{h=0}$, et Y un processus indépendant (non corrélé suffit) de X tel que $\mathrm{Var}(Y_0) = \rho$ et $Y_t = Y_0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Alors $\gamma_Y = \rho\mathbf{1}$, et, grâce à l'exercice 4, $\gamma_{X+Y} = (1-\rho)\mathbf{1}_{h=0} + \rho\mathbf{1}$.

Solution succincte de l'exercice 9 (Estimation de tendance et de saisonnalité)**.**

1. Le processus Y n'est pas stationnaire car sa moyenne dépend du temps : $\mu_Y(t) = \beta t + s_t$ (même si $\beta = 0$, on a $s \neq 0$ car s de période (minimale) 4) ;
2. On a $(1-B^4)(\beta t + s_t) = \beta t + s_t - \beta(t-4) - s_{t-4} = 4\beta$ d'où $(1-B^4)Y = 4\beta + (1-B^4)U$. On a $\gamma_{(1-B^4)Y}(t, t+h) = \gamma_{(1-B^4)U}(t, t+h) = \mathrm{Cov}(U_t - U_{t-4}, U_{t+h} - U_{t+h-4}) = \gamma_U(h) - \gamma_U(h-4) - \gamma_U(h+4) + \gamma_U(h)$. En fait, $(1-B^4)U$ est un filtre de U égal à $F_\alpha U$ où $\alpha_h = \mathbf{1}_{h=0} - \mathbf{1}_{h=4}$.

Opérateur retard, filtrage, densité spectrale

Solution succincte de l'exercice 10 (Tendance)**.**

1. $(1-B)X_t = \sum_{i=0}^k a_i(t^i - (t-1)^i) + U_t - U_{t-1}$ or par la formule du binôme

$$t^i - (t-1)^i = t^i - \sum_{j=0}^{i} t^j (-1)^{i-j} \binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{i-1} t^j (-1)^{1+i-j} \binom{i}{j},$$

de degré $i-1$, et donc $(1-B)X$ a une tendance polynomiale de degré $k-1$. Par récurrence, il en découle que $(1-B)^p X$ a une tendance polynomiale de degré $k-p$ pour tout $p \in \{0, \ldots, k\}$, et plus de tendance polynomiale si $p > k$. L'opérateur $(1-B)^p$ élimine donc toute tendance polynomiale de degré $< p$;

2. On applique l'opérateur différence saisonnier $1 - B^d$:

$$(1-B^d)X_t = X_t - X_{t-d} + S_t - S_{t-d} = X_t - X_{t-d}.$$

Solution succincte de l'exercice 11 (Filtrage)**.**

1. Pour tout intervalle fini $I \subset \mathbb{Z}$ on pose $Y_t^I = \sum_{i \in I} a_i X_{t-i}$ de sorte que

$$\mathbb{E}\left|Y_t^I - Y_t^J\right| \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_i|) \sum_{i \in (I \cup J) \setminus I \cap J} |a_i|.$$

Or $\sup_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_i|) \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_i|^2) = \mathbb{E}(|X_0|^2) < \infty$ car X est stationnaire. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{-n, \ldots, n\} \subset I \cap J$ implique $\sum_{i \in (I \cup J) \setminus I \cap J} |a_i| \leq \varepsilon$, grâce au critère de Cauchy pour la série $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i| < \infty$. Comme L^1 est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet), il en découle que $Y_t = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X_{t-i} = \sum_{I \to \mathbb{Z}} Y_t^I$ est bien définie dans L^1. Montons à présent que cette série converge p.s. et que sa somme p.s. coïncide avec sa somme dans L^1. Le théorème de convergence monotone (ou bien de Fubini-Tonelli) donne, dans $[0, \infty]$,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i||X_{t-i}|\right) \leq \sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|) \sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i| \leq \mathbb{E}(X_0^2) \left\|a\right\|_1 < \infty,$$

et donc $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i||X_{t-i}| < \infty$ p.s. et donc $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X_{t-i}$ converge p.s. Enfin, la limite p.s. est identique à la limite L^1 par convergence dominée. Le processus en entier Y

est défini p.s. sur l'ensemble p.s. obtenu en prenant l'intersection des ensembles p.s. obtenus pour chaque t dans $\mathbb{Z}$, qui a le bon goût d'être dénombrable ;

Alternativement pour montrer que Y_t est bien définie, en utilisant le théorème de Fubini, on obtient $\mathbb{E}\left[\sum |a_i X_{t-i}|\right] = \sum |a_i| \mathbb{E}\left[|X_{t-i}|\right] \leq \sum |a_i| \sqrt{\mu_X^2 + \gamma_X(0)} < \infty$, ce qui assure, à nouveau via le théorème de Fubini que la variable aléatoire $Y_t := \sum a_i X_{t-i}$ est bien définie et intégrable (on peut la voir comme une fonction définie en intégrant $a_i X_{t-i}$ sur $\mathbb{Z}$ relativement à la mesure de comptage).

2. La partie «Cauchy» fonctionne dans tout $L^{p \geq 1}$:

$$\left\| Y_t^I - Y_t^J \right\|_p \leq \sum_{i \in (I \cup J) \setminus I \cap J} \|a_i X_i\|_p \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|X_i\|_p \sum_{i \in (I \cup J) \setminus I \cap J} |a_i|.$$

Sinon, en applicant successivement le théorème de Fubini et l'inégalité de Scwhartz, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum a_i X_{t-i}\right)^2\right] \leq \sum_{i,j} |a_i a_j| E\left[|X_{t-i} X_{t-j}|\right] \leq \left(\sum |a_i|\right)^2 (\mu_X^2 + \gamma_X(0)) < \infty$$

3. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par continuité du produit scalaire dans L^2,

$$\begin{aligned}
\mu_Y(t) &= \langle 1, Y_t \rangle_{L^2} \\
&= \left\langle 1, \lim_{I \to \mathbb{Z}} Y_t^I \right\rangle_{L^2} \\
&= \lim_{I \to \mathbb{Z}} \left\langle 1, \sum_{i \in I} a_i X_{t-i} \right\rangle_{L^2} \\
&= \lim_{I \to \mathbb{Z}} \sum_{i \in I} a_i \mathbb{E}(X_{t-i}) \\
&= \mu_X \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i
\end{aligned}$$

qui est constante. Pour l'autocovariance, on écrit, pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(t, t+h) + \mu_Y^2 &= \left\langle \lim_{I \to \mathbb{Z}} Y_t^I \lim_{J \to \mathbb{Z}} Y_{t+h}^J \right\rangle_{L^2} \\
&= \lim_{I,J \to \mathbb{Z}} \sum_{i \in I, j \in J} a_i a_j \mathbb{E}(X_{t-i} X_{t+h-j}) \\
&= \lim_{I,J \to \mathbb{Z}} \sum_{i \in I, j \in J} a_i a_j (\gamma_X(h+i-j) + \mu_X^2) \\
&= \mu_Y^2 + \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} a_i a_j \gamma_X(h+i-j) \\
&= \mu_Y^2 + \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} a_i a_j \gamma_X(h+j-i)
\end{aligned}$$

qui ne dépend pas de t, et le processus Y est donc stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 12 (Géométrique)**.**

1. On a $\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. D'autre part, pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\gamma_X(t, t+h) &= \sum_{i=0}^{t} \sum_{j=0}^{t+h} \lambda^{i+j} \mathbb{E}((Z_{t-i} - Z_{t-i-1})(Z_{t+h-j} - Z_{t+h-j-1})) \\
&= \sum_{i=0}^{t} \sum_{j=0}^{t+h} \lambda^{i+j} (2\gamma_Z(h) - \gamma_Z(h-1) - \gamma_Z(h+1)) \\
&= \sigma^2 (2\mathbf{1}_{h=0} - \mathbf{1}_{h=1} - \mathbf{1}_{h=-1}) \sum_{i=0}^{t} \sum_{j=0}^{t+h} \lambda^{i+j} \\
&= \sigma^2 (2\mathbf{1}_{h=0} - \mathbf{1}_{h=1} - \mathbf{1}_{h=-1}) \begin{cases} \frac{1-\lambda^{t+1}}{1-\lambda} \frac{1-\lambda^{t+h+1}}{1-\lambda} & \text{si } \lambda \neq 1, \\ (1+t)(1+t+h) & \text{si } t = 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

qui dépend de t si $\lambda \neq 0$. Le seul cas stationnaire est $\lambda = 0$ (donne $X = 0$) ;

2. Si $|\lambda| < 1$ alors $\alpha_i = \lambda^i \mathbf{1}_{i \geq 0} \in \ell^1$ et le filtre $Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i (Z_{t-i} - Z_{t-i-1}) = F_\alpha(BZ)$ est bien défini, stationnaire, et vérifie $X_t - Y_t \to 0$ dans L^2 quand $t \to \infty$:

$$\left\| \sum_{i>t} \lambda^i (Z_{t-i} - Z_{t-i-1}) \right\|_2 \leq \sum_{i>t} |\lambda|^i \, \|Z_{t-i} - Z_{t-i-1}\|_2 = \sqrt{2}\sigma \lambda^{t+1} \frac{1-\lambda^\infty}{1-\lambda} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Solution succincte de l'exercice 13 (Processus Auto-régressif)**.**

1. Établissons tout d'abord l'unicité. Si X et X' sont deux solutions stationnaires, alors $(X - X')_t = \phi(X - X')_{t-1} = \phi^n (X - X')_{t-n}$ pour tout $n \geq 1$, d'où

$$\mathrm{Var}((X - X)_t) \leq 2|\phi|^{2n} (\mathrm{Var}(X_t) + \mathrm{Var}(X'_t)) = 2|\phi|^{2n} (\gamma_X(0) + \gamma_{X'}(0)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $|\phi| < 1$, d'où $X_t = X'_t$ p.s. d'où $X = X'$ p.s. Pour construire la solution,

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t = \phi(\phi X_{t-2} + Z_{t-1}) = \cdots = \phi^{n+1} X_{t-n} + \sum_{k=1}^{n} \phi^k Z_{t-k},$$

et la somme du membre de droite converge p.s. et dans L^2 quand $n \to \infty$ vers le filtre $F_\phi Z$ où $\phi_k = \phi^k \mathbf{1}_{k \geq 0}$ car $\phi \in \ell^1$ car $|\phi| < \infty$. On vérifie alors directement que

$$(F_\phi Z)_t = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n Z_{t-n}$$

est solution. Il s'agit d'une solution stationnaire causale. Notons que $\phi^{n+1} X_{t-n}$ converge vers 0 p.s. et dans L^2 lorsque X est stationnaire ($\Rightarrow$ unicité à nouveau) ;

2. L'équation sans second membre $X_t = \phi X_{t-1}$ (c'est-à-dire pour $\sigma = 0$) a pour unique solution stationnaire le processus identiquement nul 0. Si Y est une solution non stationnaire de cette équation, alors $Y + F_\phi Z$ est solution non stationnaire de l'équation avec second membre $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$. Pour construire Y, on se donne une v.a.r. Y_0 non identiquement nulle et on en déduit que $Y_t = \phi^t Y_0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{E}(Y_t) = \phi^t \mathbb{E}(Y_0)$ et $\mathrm{Var}(Y_t) = |\phi|^{2t} \mathrm{Var}(Y_0)$, et Y_0 n'est pas identiquement nulle, le processus Y n'est pas stationnaire. Ainsi, nous avons construit une infinité non dénombrable de solutions non stationnaires de l'équation $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$;

3. L'équation $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ s'écrit $X_{t-1} = \phi^{-1} X_t - \phi^{-1} Z_{-t}$. Quitte à renverser le temps et à remplacer ϕ et Z_t par ϕ^{-1} et $\phi^{-1} Z_{-t}$, on déduit du cas $|\phi| < 1$ que le cas $|\phi| > 1$ admet une unique solution stationnaire donnée par le filtre
$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{-n}(-\phi^{-1}) Z_{-(-t-n)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \phi^{-(n+1)} Z_{t+n}.$$
Elle n'est pas causale ;
4. Si X est solution stationnaire de l'équation avec $|\phi| = 1$ alors, en itérant l'équation,
$$\mathrm{Var}(X_t - \phi^{n+1} X_{t-n}) = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} \phi^k Z_{t-k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} |\phi|^{2k} \sigma^2 = n\sigma^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$
(marche aléatoire !), ce qui contredit une conséquence de la stationnarité de X :
$$\mathrm{Var}(X_t - \phi^{n+1} X_{t-n}) \leq 2\gamma_X(0) + 2|\phi|^{2(n+1)} \gamma_X(0) = \mathcal{O}(1).$$
5. Si $X \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$ alors $\gamma_X(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$ d'où
$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$
La densité spectrale est constante et attribue le même poids $\sigma^2/(2\pi)$ à toute fréquence (couleur) λ, d'où le nom de **bruit blanc** ;
6. Il s'agit de calculer la densité spectrale d'un filtre. L'exercice 11 donne
$$\gamma_X(h) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \psi_j \psi_k \gamma_Y(h + k - j) = \psi * \widetilde{\psi * \widetilde{\gamma}}$$
où $\widetilde{f}(h) := f(-h)$ désigne le retournement du temps. L'expression sous forme de convolution assure qu'on a bien $\gamma_X \in \ell^1$ car ℓ^1 est stable par retournement du temps et par convolution. À présent
$$\begin{aligned}
f_X(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\lambda} \gamma_X(n) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n,j,k\in\mathbb{Z}} e^{-in\lambda} \psi_j \psi_k \gamma_Y(n + k - j) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{h,j,k\in\mathbb{Z}} e^{-i(h-k+j)\lambda} \psi_j \psi_k \gamma_Y(h) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} e^{-i(j-k)\lambda} \psi_j \psi_k \sum_{h\in\mathbb{Z}} e^{-ih\lambda} \gamma_Y(h) \\
&= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} e^{-i(j-k)\lambda} \psi_j \psi_k f_Y(\lambda) \\
&= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-ij\lambda} \psi_j\right) \overline{\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ik\lambda} \psi_k\right)} f_Y(\lambda) \\
&= \left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-ij\lambda} \psi_j\right|^2 f_Y(\lambda).
\end{aligned}$$

7. Si $X = F_\phi Z$ est la solution stationnaire de l'équation AR(1) $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ avec $|\phi| < 1$ et $Z \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$ alors les questions précédentes donnent (poser $Y = Z$) :

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} (e^{-i\lambda}\phi)^j \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - e^{-i\lambda}\phi|^2}.$$

Si X est la solution stationnaire de l'équation AR(1) $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ avec $|\phi| > 1$ et $Z \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$ alors nous avons déjà montré, en renversant l'équation, que $X = -\sum_{n \leq 0} -(\phi)^{n-1} Z_{t-n}$ et donc

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| -\sum_{j \leq 0} e^{-ij\lambda} \phi^{j-1} \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi|\phi|^2} \left| \frac{1}{1 - e^{-i\lambda}\phi^{-1}} \right|^2.$$

et la formule est compatible avec le fait que le retournement du temps ne perturbe pas la densité spectrale, et que le retourné en temps de X est solution d'une équation AR(1) de paramètre $1/\phi$ et σ^2/ϕ^2 ;

8. Si X est solution de l'équation MA(1) $X_t = Z_t - \theta Z_{t-1} = F_\theta Z$ où $\theta_k = \mathbf{1}_{k=0} - \theta \mathbf{1}_{k=1}$ alors $\theta \in \ell^1$ car θ est à support fini, et

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-ij\lambda} \theta_j \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 1 - e^{-i\lambda}\theta \right|^2.$$

Équations et processus ARMA

Solution succincte de l'exercice 14 (ARMAda ou ARMArtial)**.**

1. L'équation $1 + 0.2z - 0.48z^2 = 0$ a pour solutions $-5/4$ et $5/3$, qui ne sont pas de module 1 donc il existe un processus stationnaire solution ;
2. L'équation $1 + 1.9z + 0.88z^2 = 0$ a pour solutions $-10/11$ et $-5/4$, qui ne sont pas de module 1 donc il existe un processus stationnaire solution ;
3. L'équation $1 + 0.6z = 0$ a pour solution $-5/3$ qui n'est pas de module 1 dont il existe une solution stationnaire ;
4. L'équation $1 + 1.8z + 0.81z^2 = 0$ a pour solution $-10/9$ (racine double) qui n'est pas de module 1 donc il existe une solution stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 15 (ARMA$(1,1)$)**.**

1. Une solution stationnaire existe (elle est alors unique, et c'est un processus linéaire) lorsque le polynôme $\Phi(z) = P_{\alpha_\phi}(z) = 1 - \phi z$ n'a pas de racine de module 1, c'est-à-dire lorsque $|\phi| \neq 1$ puisque Φ a une unique racine $z_1 = 1/\phi$;
2. La solution stationnaire est causale lorsque Φ n'a pas de racine de module ≤ 1, c'est-à-dire lorsque $|z_1| > 1$, c'est-à-dire $|\phi| < 1$. La solution stationnaire est inversible lorsque $\Theta(z) = 1 + \theta z$ n'a pas de racine de module ≤ 1, c'est-à-dire lorsque l'unique racine $-1/\theta$ de Θ est de module > 1, c'est-à-dire lorsque $|\theta| < 1$;
3. D'après un théorème du cours, la solution X s'obtient en développant en série de puissances de z la fraction rationnelle de l'équation ARMA
$$z \mapsto \frac{1 + \theta z}{1 - \phi z}$$
dans un voisinage du cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On distingue les cas $|\phi| < 1$ et $|\phi| > 1$.
Cas $|\phi| < 1$. Si $|z| = 1$ alors $|\phi z| < 1$ et
$$\frac{1}{1 - \phi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k$$
et donc
$$\frac{1 + \theta z}{1 - \phi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k + \theta z \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{k-1}(\phi + \theta) z^k$$

d'où
$$\psi_k = \mathbf{1}_{h=0} + \phi^{k-1}(\phi+\theta)\mathbf{1}_{h>0}.$$
Cas $|\phi| > 1$. Si $|z| = 1$ alors $|(\phi z)^{-1}| < 1$ et
$$\frac{1}{1-\phi z} = -\frac{1}{\phi z}\frac{1}{1-(\phi z)^{-1}} = -\frac{1}{\phi z}\sum_{k=0}^{\infty}\phi^{-k}z^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\phi^{-k}z^{-k}.$$
et donc
$$\frac{1+\theta z}{1-\phi z} = -\sum_{k=1}^{\infty}\phi^{-k}z^{-k} - \theta z\sum_{k=1}^{\infty}\phi^{-k}z^{-k} = -\theta\phi^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\phi^{-k-1}(\phi+\theta)z^{-k}$$
d'où
$$\psi_k = -\theta\phi^{-1}\mathbf{1}_{k=0} + \phi^{-k-1}(\phi+\theta)\mathbf{1}_{k<0}.$$
Dans les deux cas, $F_\phi^{-1} \circ F_\theta = F_\psi$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,
$$X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k Z_{t-k}$$
où la convergence a lieu p.s. et dans L^2. On retrouve bien $X = Z$ si $\theta = -\phi$.

4. Pour tout $h \in \mathbb{Z}$, comme $\gamma_Z(h) = \sigma^2\mathbf{1}_{h=0}$,
$$\gamma_X(h) = \gamma_{F_\psi Z}(h) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}}\psi_j\psi_k\gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j\psi_{h+j}$$
Cette formule permet d'établir que $\gamma_X(h)$ décroît géométriquement (exponentielle) quand $|h| \to \infty$, en utilisant le fait que ψ_k décroît géométriquement quand $|k| \to \infty$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \leq C\rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

Solution succincte de l'exercice 16 (Produit d'ARMA)**.**

1. Il s'agit de l'inversibilité : le bruit blanc ε (respectivement η) est un filtre linéaire causal du processus X (respectivement Y). D'après le cours, cela a lieu lorsque les polynômes $\Theta_1(z) = 1 + \theta_1 z$ et $\Theta_2(z) = 1 + \theta_2 z$ ne s'annulent par sur le disque unité fermé. La condition est donc $\min(|\theta_1|, |\theta_2|) > 1$ (car les racines sont $-1/\theta_1$ et $-1/\theta_2$). Mais il faut aussi tenir compte de la condition d'existence de la solution stationnaire, qui impose à $\Phi_1(z) = 1 - \phi_1 z$ et $\Phi_2(z) = 1 - \phi_2 z$ de ne pas s'annuler sur le cercle unité, d'où $|\phi_1| \neq 1$ et $|\phi_2| \neq 1$ (car les racines sont $1/\phi_1$ et $1/\phi_2$) ;
2. Comme X et Y sont inversibles on a $\varepsilon = F_\psi X$ et $\eta = F_{\widetilde{\psi}} Y$ où $\psi, \widetilde{\psi} \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ (et à support dans $\mathbb{N}$), et donc pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$, par continuité du produit scalaire,
$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_s, \eta_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_s, \eta_t) = \sum_{h,k\in\mathbb{Z}}\psi_h\widetilde{\psi}_k\mathbb{E}(X_{s-h}Y_{t-k}) \sum_{h,k\in\mathbb{Z}}\psi_h\widetilde{\psi}_k\mathbb{E}(X_{s-h})\mathbb{E}(Y_{t-k}) = 0.$$
3. Pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$, par indépendance, $\mu_Z(t) = \mathbb{E}(Z_t) = \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et
$$\begin{aligned}\gamma_Z(t, t+h) &= \mathbb{E}(X_tY_tX_{t+h}Y_{t+h})\\ &= \mathbb{E}(X_tX_{t+h})\mathbb{E}(Y_tY_{t+h})\\ &= \gamma_X(h)\gamma_Y(h)\\ &= \sigma_1^2\Big(\sum_{j\geq 0}\psi_j\psi_{j+h}\Big)\sigma_2^2\Big(\sum_{j\geq 0}\widetilde{\psi}_j\widetilde{\psi}_{j+h}\Big),\end{aligned}$$
qui ne dépendent pas de t (le processus Z est stationnaire).

Solution succincte de l'exercice 17 (ARMA(2,1)).

1. On a $P_\varphi(z) = 1 - z + z^2/4 = (1 - z/2)^2$ qui ne s'annule qu'en $z = 2$ (racine double). Comme cette racine est de module > 2, il en découle que l'équation ARMA ci-dessus admet une unique solution stationnaire, qui est causale ;
2. Les $(\psi_k)_{k\geq 0}$ s'obtiennent en développant en série de puissance de z autour du cercle unité la fraction rationnelle de l'ARMA : (ici $|z/2| < 1$ si $|z| = 1$)

$$\begin{aligned}\frac{P_\theta(z)}{P_\varphi(z)} &= \frac{1+z}{(1-z/2)^2}\\ &= (1+z)\sum_{k\geq 0}(k+1)2^{-k}z^k\\ &= 1 + \sum_{k\geq 1}\underbrace{\left((k+1)2^{-k} + k2^{-(k-1)}\right)}_{(3k+1)2^{-k}} z^k,\end{aligned}$$

   d'où $\psi = \mathbf{1}_{k=0} + (3k+1)2^{-k}\mathbf{1}_{k>0}$. Note : $(1-u)^{-2} = \sum_{k\geq 0}(k+1)u^k$ si $|u| < 1$;
3. Pour tout $h \geq 0$,

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{k\geq 0}\psi_k\psi_{k+h} = \sigma^2\psi_h + \sigma^2 2^{-h}\sum_{k\geq 1}(3k+1)(3(k+h)+1)2^{-2k} = \cdots.$$

Mesure et densité spectrale

Solution succincte de l'exercice 18 (Herglotz)**.** Il s'agit d'une réplique d'une partie de l'exercice 7 résolu par algèbre linéaire. Une fonction $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire ssi elle est symétrique (c'est-à-dire paire) et de type positif. Or le théorème de Herglotz indique à son tour que cela a lieu ssi la fonction constitue la suite des coefficients de Fourier d'une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$ (appelée mesure spectrale). Dans le cas de ρ, la condition $|\alpha| \leq 1/2$ est suffisante car la formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ith} \frac{1 + 2\alpha\cos(t)}{2\pi}\,dt = \mathbf{1}_{h=0} + \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ith}(e^{it} + e^{-it})\,dt = \mathbf{1}_{h=0} + \alpha\mathbf{1}_{|h|=1}$$

montre que ρ est alors la suite des coefficients de Fourier de la mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$ de densité $t \mapsto (1+2\alpha\cos(t))/(2\pi)$. En fait, il s'agit de la fonction d'autocovariance d'un processus MA(1) de paramètres θ et σ^2 tels que $(1+\theta^2)\frac{\sigma^2}{2\pi} = 1$ et $2\theta\frac{\sigma^2}{2\pi} = \alpha$.

Supposons réciproquement que $|\alpha| > 1/2$ et montrons que ρ ne peut pas être la suite des coefficients de Fourier d'une mesure positive finie ν sur $[-\pi, \pi]$. On raisonne par l'absurde : si c'était le cas, alors avec $a = -\mathrm{signe}(\alpha) \in \{\pm 1\}$,

$$0 \leq \int_{[-\pi,\pi]} \underbrace{(1 + 2a\cos(t))}_{\geq 0}\,\nu(dt) = \hat{\nu}(0) + a(\hat{\nu}(-1) + \hat{\nu}(1)) = 1 + 2a\alpha = 1 - 2|\alpha| < 0.$$

Solution succincte de l'exercice 19 (Somme)**.**

1. $\mu_{X+Y}(t) = \mu_X + \mu_Y$ cte, $\gamma_{X+Y}(t, t+h) = \gamma_X(h) + \gamma_Y(h)$ ne dépend pas de t ;
2. $\nu_{X+Y} = \nu_X + \nu_Y$ et $f_{X+Y} = f_X + f_Y$ car ν et f dépendent linéairement de γ ;
3. $\mu_{XY}(t) = \mu_X\mu_Y$ et la quantité suivante ne dépend pas de t :

$$\begin{aligned}\gamma_{XY}(t, t+h) &= \mathbb{E}(X_tX_{t+h})\mathbb{E}(Y_tY_{t+h}) - \mu_X\mu_Y\mu_X\mu_Y \\ &= (\gamma_X(h) + \mu_X^2)(\gamma_Y(h) + \mu_Y^2) - \mu_X^2\mu_Y^2 \\ &= \gamma_X(h)\gamma_Y(h) + \mu_Y^2\gamma_X(h) + \mu_X^2\gamma_Y(h)\end{aligned}$$

4. Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, en utilisant les théorèmes de Fubini-Tonelli et de Herglotz,

$$\begin{aligned}(f_X \star f_Y)(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_X(u) f_Y(t-u)\,du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_X(h) e^{-ihu} \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_Y(k) e^{-ik(t-u)}\,du \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h,k\in\mathbb{Z}} \gamma_X(h)\gamma_Y(k) e^{-ikt} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iu(h-k)}\,du}_{\mathbf{1}_{h=k}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_X(h)\gamma_Y(h) e^{-iht} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h\in\mathbb{Z}} e^{-iht} (\gamma_{XY}(h) - \mu_Y^2 \gamma_X(h) - \mu_X^2 \gamma_Y(h)) \\ &= f_{XY}(t) - \mu_Y^2 f_X(t) - \mu_X^2 f_Y(t)\end{aligned}$$

d'où

$$f_{XY} = f_X \star f_Y + \mu_Y^2 f_X + \mu_X^2 f_Y.$$

Solution succincte de l'exercice 20 (Harmonique)**.**

1. L'indépendance donne $\gamma_X = \gamma_{X-Y} + \gamma_Y$, et par ailleurs, comme on sait que le processus harmonique $X - Y$ est stationnaire centré, on peut recalculer rapidement son autocovariance en utilisant les propriétés de A et B (posons $\theta = \pi/3$) :

$$\begin{aligned}\gamma_{X-Y}(h) &= \mathbb{E}((X-Y)_0(X-Y)_h) \\ &= \mathbb{E}(A(A\mathfrak{Re}\,e^{ih\theta} + B\mathfrak{Im}\,e^{ih\theta})) \\ &= \sigma^2 \mathfrak{Re}\,e^{ih\theta} \\ &= \sigma^2 \cos(\theta h).\end{aligned}$$

   Donc $\nu_{X-Y} = \frac{\sigma^2}{2}(\delta_{-\theta} + \delta_\theta)$ car

$$\int_{[-\pi,\pi]} e^{iht}\,\nu_{X-Y}(dt) = \frac{\sigma^2}{2}(e^{-ih\theta} + e^{ih\theta}) = \sigma^2 \mathfrak{Re}(e^{ih\theta}) = \sigma^2\cos(h\theta).$$

   D'où $\nu_X = \nu_{X-Y} + \nu_Y = \frac{\sigma^2}{2}(\delta_{-\theta} + \delta_\theta) + \nu_Y$. Si Y est un $\mathrm{BB}(0, \sigma_Y^2)$ alors $\nu_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2\pi} dt$ et donc dans ce cas ν_X comporte à la fois une partie à densité et des masses de Dirac (par conséquent X n'a pas de densité spectrale, tout comme $X - Y$).
2. Si X est un MA(1) $X = F_\alpha Z$ où $\alpha = \mathbf{1}_{h=0} + \theta \mathbf{1}_{h=1}$ et donc f_X existe et vaut

$$f_X(t) = \left|P_\alpha(e^{-it})\right|^2 f_Z(t) = \left|1 + \theta e^{-it}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} = (1 + 2\theta\cos(t) + \theta^2)\frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

Solution succincte de l'exercice 21 (Bestiaire)**.**

1. $f(\pi) = 1 - \frac{\pi^2}{2} < 0$ ce qui n'est pas permis pour une densité spectrale ;
2. $f(-\pi) = 1 - \frac{\pi^2}{2} < 0$ ce qui n'est pas permis pour une densité spectrale ;
3. continue et positive donc définit une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$, qui est donc la mesure spectrale d'un processus d'après le théorème de Herglotz, qui admet donc f comme densité spectrale.

Solution succincte de l'exercice 22 (Bande)**.** On a $\mathrm{spec}(\Gamma_n) \subset [2\pi m, 2\pi M]$ car pour tout $n \geq 1$ et tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma_n v, v \rangle &= \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma_n)_{j,k} v_j v_k \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_Y(j-k) v_j v_k \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} v_j v_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} f(t)\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j,k=1}^{n} v_j v_k e^{i(j-k)t} \right) f(t)\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{n} v_j e^{ijt} \right|^2 f(t)\, dt \\
&\in [m, M] \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{n} v_j e^{ijt} \right|^2 dt \\
&= [m, M] \sum_{j,k=1}^{n} v_j v_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t}\, dt}_{(2\pi)\mathbf{1}_{j=k}} \\
&= [m, M](2\pi) \|v\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Prédiction linéaire

Solution succincte de l'exercice 23 (Inversibilité de la matrice d'autocovariance).

1. Comme Γ_{r+1} est singulière, il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que $v \neq 0$ et $\langle \Gamma_{r+1} v, v\rangle = 0$. On a nécessairement $v_{r+1} \neq 0$ car sinon Γ_r serait singulière. Comme $\langle \Gamma_{r+1} v, v\rangle = \sum_{j,k=1}^{r+1} \gamma(j-k) v_j v_k = \mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{r+1} v_j X_j)$ on obtient $\sum_{j=1}^{r+1} v_j X_j = 0$ p.s. À présent, si $v_{r+1} \neq 0$, alors, en posant $b_j^{(r+1)} = v_j / v_{r+1}$, il vient, p.s.
$$X_{r+1} = \sum_{j=1}^{r+1} b_j^{(r+1)} X_j.$$
Ensuite, pour tout $n \geq r+1$, on procède de même pour exprimer X_n comme combinaison linéaire de $X_{n-1}, \ldots, X_{n-r}$, puis X_{n-1} comme combinaison linéaire de $X_{n-2}, \ldots, X_{n-r-1}$, etc, jusqu'à éliminer tous les X_j avec $j > r+1$.
2. De la question précédente on tire $\lambda_{\min}(\Gamma_r) > 0$ et
$$\gamma(0) = \mathrm{Var}(X_{n+1}) = \left\langle \Gamma_r b^{(n)}, b^{(n)} \right\rangle \geq \lambda_{\min}(\Gamma_r) \left\| b^{(n)} \right\|_2 \geq \lambda_{\min}(\Gamma_r) \left\| b^{(n)} \right\|_\infty$$
d'où
$$\sup_{n \geq r+1, 1 \leq j \leq r} |b_j^{(n)}| = \sup_{n \geq r+1} \left\| b^{(n)} \right\|_\infty \leq \frac{\gamma(0)}{\lambda_{\min}(\Gamma_r)} < \infty.$$
3. On a en utilisant les deux questions précédentes
$$0 < \gamma(0) = \mathrm{Var}(X_{n+1}) = \sum_{j=1}^{r} \gamma(n+1-j) b_j^{(n)} \leq \sup_{1 \leq j \leq r, n \geq r+1} |b_j^{(n)}| \max_{n-r+1 \leq k \leq n} |\gamma(k)|$$
or le second membre tend vers 0 quand $n \to \infty$ si $\gamma(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

Solution succincte de l'exercice 24 (Prédiction de processus auto-régressifs).

1. $\hat{X}_2 = \varphi_{1,1} X_1$ où $\varphi_{1,1}$ est solution de $\Gamma_1 \varphi_{1,1} = \gamma(1)$, et comme $\Gamma_1 = \gamma(0)$, il vient $\varphi_{1,1} = \gamma(1)/\gamma(0) = \rho(1)$, d'où enfin $\hat{X}_2 = \rho(1) X_1$. Notons que $\rho(1) = \varphi_1$ car l'équation AR(1) donne $\gamma(1) = \mathbb{E}(X_1 X_0) = \mathbb{E}((\varphi_1 X_0 + Z_1) X_0) = \varphi_1 \gamma(0)$ par causalité car $X_0 \in \mathrm{Vect}(Z_0, Z_{-1}, \ldots)$.
Montrons que $\hat{X}_3 = \varphi_1 X_2$. On a $X_3 - \varphi_1 X_2 \in \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$, et il suffit d'établir que $X_3 - \varphi_1 X_2 \perp X_1$ et $\varphi_1 X_2 \perp X_2$. Or en utilisant l'équation AR(1) et la causalité on obtient $\langle X_3 - \varphi_1 X_2, X_1 \rangle = \langle Z_3, X_1\rangle = 0$ et $\langle X_3 - \varphi_1 X_2, X_2\rangle = \langle Z_3, X_2\rangle = 0$.

Plus généralement, pour tout $n \geq 1$, $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n$, car $\varphi_1 X_n \in \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_n)$ et l'équation AR(1) et la causalité donnent pour tout $Y \in \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_n)$

$$\langle X_{n+1} - \varphi_1 X_n, Y \rangle = \langle Z_{n+1}, Y \rangle = 0.$$

2. On a $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1}$ car $\varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1} \in \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_n)$ tandis que l'équation AR(2) et la causalité donnent pour tout $Y \in \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_n)$

$$\langle X_{n+1} - (\varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1}), Y \rangle = \langle Z_{n+1}, Y \rangle = 0.$$

3. Toujours la même idée poussée encore plus loin : On a $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n + \cdots + \varphi_p X_{n-p+1}$ car $\varphi_1 X_n + \cdots + \varphi_p X_{n-p+1} \in \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_n)$ tandis que l'équation AR(p) et la causalité donnent pour tout $Y \in \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_n)$

$$\langle X_{n+1} - (\varphi_1 X_n + \cdots + \varphi_p X_{n-p+1}), Y \rangle = \langle Z_{n+1}, Y \rangle = 0.$$

Solution succincte de l'exercice 25 (Prédiction de processus ARMA)**.**

1. Par causalité et inversibilité on obtient

$$X_t = \sum_{j\geq 0} \psi_j Z_{t-j} \quad \text{et} \quad Z_t = \sum_{j \geq 0} \pi_j X_{t-j}$$

d'où

$$X_{n+h} = \sum_{j\geq 0} \psi_j Z_{n+h-j} \quad \text{et} \quad Z_{n+h} = X_{n+h} + \sum_{j\geq 1} \pi_j X_{n+h-j}.$$

En appliquant $\mathrm{Proj}_{\mathcal{M}_n}$ on obtient

$$\tilde{X}_{n+h} = \sum_{j\geq 0} \psi_j \mathrm{Proj}_{\mathcal{M}_n}(Z_{n+h-j})$$

or $\mathcal{M}_n = \mathrm{Vect}(Z_j : -\infty < j \leq n)$ par causalité, et donc $\mathrm{Proj}_{\mathcal{M}_n}(Z_{n+h-j}) = Z_{n+h-j}$ si $n+h-j \leq n$ c'est-à-dire si $j \geq h$, tandis que comme Z est un bruit blanc, on a $Z_{n+h-j} \perp \mathcal{M}_n$ c'est-à-dire $\mathrm{Proj}_{\mathcal{M}_n}(Z_{n+h-j}) = 0$ si $n+h-j > n$ c'est-à-dire si $j < h$. On obtient bien la formule attendue $\tilde{X}_{n+h} = \sum_{j\geq h} \psi_j Z_{n+h-j}$.
En appliquant $\mathrm{Proj}_{\mathcal{M}_n}$ cette fois-ci à la formule de Z_{n+h} ci-dessus il vient

$$\mathrm{Proj}_{\mathcal{M}_n}(Z_{n+h}) = \tilde{X}_{n+h} + \sum_{j\geq 1} \pi_j \tilde{X}_{n+h-j}$$

or comme $h \geq 1$ on a $Z_{n+h} \perp \mathcal{M}_n$ d'où $\tilde{X}_{n+h} = -\sum_{j\geq 1} \pi_j \tilde{X}_{n+h-j}$.
On a enfin

$$X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h} = \sum_{j\geq 0} \psi_j Z_{n+h-j} - \sum_{j \geq h} \psi_j Z_{n+h-j} = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j Z_{n+h-j}$$

d'où

$$\mathbb{E}((X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h})^2) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2.$$

2. Notons tout d'abord qu'un AR(p) causal est toujours inversible car $\Theta(z) = 1$, et un MA(1) inversible est toujours causal car $\Phi(z) = 1$.
   Pour un AR(p), on a $\Theta(z) = 1$ et $\Phi(z) = 1 - (\varphi_1 z + \cdots + \varphi_p z^p)$ donc $\pi_0 = 1$, $\pi_j = -\varphi_j$ si $1 \leq j \leq p$ et $\pi_j = 0$ si $j > p$, d'où

$$\tilde{X}_{n+h} = +\sum_{j=1}^{p} \varphi_j \tilde{X}_{n+h-j}$$

   et en particulier

$$\tilde{X}_{n+1} = +\sum_{j=1}^{p} \varphi_j \tilde{X}_{n+1-j}$$

   et comme $n + 1 - j \leq n$ pour $j \geq 1$ il vient $\tilde{X}_{n+1-j} = X_{n+1-j}$, d'où

$$\tilde{X}_{n+1} = +\sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{n+1-j} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}((X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1})^2) = \sigma^2 \psi_0^2 = \sigma^2.$$

   Pour un MA(1) inversible on obtient comme précédemment que

$$\tilde{X}_{n+1} = -\sum_{j\geq 1} \pi_j X_{n+1-j}$$

   or on a $\sum_{j\geq 0} \pi_j z^j = 1/(1 + \theta_1 z) = \sum_{j\geq 0}(-\theta_1 z)^j$ d'où $\pi_j = (-\theta_1)^j$, ce qui donne

$$\tilde{X}_{n+1} = -\sum_{j\geq 1}(-\theta_1)^j X_{n+1-j} = -\sum_{j\geq 0}(-\theta_1)^{j+1} X_{n-j}$$

   tandis que comme $\psi_j = \mathbf{1}_{j=0}$ il vient

$$\mathbb{E}((X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1})^2) = \sigma^2.$$

Solution succincte de l'exercice 26 (Prédiction d'un MA(1) et algorithme des innovations)**.** L'autocovariance d'un MA(1) vérifie

$$\kappa(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| > 1 \\ \sigma^2(1+\theta^2) & \text{si } i = j \\ \theta\sigma^2 & \text{si } j = i \pm 1 \end{cases}$$

On a $v_0 = \kappa(1,1) = \sigma^2(1+\theta^2)$.

Étape $k = 0$. On a $\theta_{n,n} = 0$ si $n \geq 2$ car

$$\theta_{n,n} = v_0^{-1}\Big(\kappa(n+1,1) - \sum_{\varnothing}\Big) = v_0^{-1}\kappa(n+1,1).$$

Étape $k = 1$. On a $\theta_{n,n-1} = 0$ si $n \geq 3$ car

$$\theta_{n,n-1} = v_1^{-1}\Big(\kappa(n+1,2) - \sum_{j=0}^{1-1} \theta_{1,1-j}\theta_{n,n-j}v_j\Big) = v_1^{-1}\Big(\underbrace{\kappa(n+1,2)}_{=0 \text{ si } n\geq 3} - \underbrace{\theta_{1,1}\theta_{n,n}v_0}_{=0 \text{ si } n \geq 2}\Big).$$

Étape $k = 2$. Pour $n \geq 4$ on trouve $\theta_{n,n-2} = 0$ si $n \geq 4$, car en utilisant le fait que $\kappa(n+1,3) = 0$ et $\theta_{n,n} = \theta_{n,n-1} = 0$ (obtenu précédemment),

$$\theta_{n,n-2} = v_2^{-1}\Big(\kappa(n+1,3) - \sum_{j=0}^{2-1} \theta_{2,2-j}\theta_{n,n-j}v_j\Big) = 0.$$

Plus généralement, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ on montre par récurrence que $\theta_{n,n-k} = 0$ si $n \geq k+2$ et $k \geq 0$ c'est-à-dire que

$$\theta_{n,j} = 0, \quad 2 \leq j \leq n.$$

Il en découle que pour $k = n-1$,

$$\theta_{n,1} = v_{n-1}^{-1}\Big(\kappa(n+1,n) - \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \theta_{n-1,n-1-j}\theta_{n,n-j}v_j}_{=0}\Big) = v_{n-1}^{-1}\kappa(n+1,n),$$

et donc pour notre MA(1) on a

$$\theta_{n,1} = v_{n-1}^{-1}\theta\sigma^2.$$

Ceci permet d'obtenir une formule de récurrence pour v_n pour notre MA(1) car

$$\begin{aligned} v_n &= \kappa(n+1,n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j \\ &= \sigma^2(1+\theta^2) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j \\ &= \sigma^2(1+\theta^2) - \theta_{n,1}^2 v_{n-1} \\ &= \sigma^2(1+\theta^2) - v_{n-1}^{-2}\theta^2\sigma^4 v_{n-1} \\ &= \sigma^2(1+\theta^2) - v_{n-1}^{-1}\theta^2\sigma^4. \end{aligned}$$

En conclusion, on a, pour notre MA(1),

$$\hat{X}_{n+1} = \theta_{n,1}(X_n - \hat{X}_n) = \theta\sigma^2(X_n - \hat{X}_n)v_{n-1}^{-1}$$

où v_{n-1} est calculé par récurrence avec l'équation précédente.

Estimation

Solution succincte de l'exercice 27 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance)**.**

1. Comme $|\phi| < 1$, le processus stationnaire X solution de l'équation AR(1) est un filtre causal de Z, et par conséquent, d'après un théorème du cours, on dispose du théorème de la limite centrale suivant :

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \gamma)$$

où $\gamma = 2\pi f_X(0)$ et où f_X est la densité spectrale de X, qui est donnée ici par $f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|1-\varphi e^{-i\lambda}|^2}$ pour tout $\lambda \in [-\pi, \pi]$, d'où enfin $\gamma = \sigma^2/(1-\varphi)^2$. Alternativement, on peut mener le calcul de la variance asymptotique directement :

$$\begin{aligned} n\mathbb{V}(\widehat{\theta}) &= \frac{1}{n}\sum_{0\le i,j\le n-1}\gamma_X(j-i) \\ &= \sum_{h=-(n-1)}^{n-1}\frac{n-h}{n}\gamma_X(h) \\ &= \sum_{h=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{h}{n}\right)\gamma_X(h) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\text{CVD}} \sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_X(h) \\ &= \sum_{h\in\mathbb{Z}} e^{-ih\lambda}\gamma_X(h)\Big|_{\lambda=0} \\ &= 2\pi f_X(0) \end{aligned}$$

où la dernière identité provient de l'exercice 13 ;

2. La convergence en loi précédente permet de construire un intervalle de confiance asymptotique $I_{n,\alpha}$ suivant de niveau de confiance $1-\alpha$. En effet, on écrit

$$\mathbb{P}\left(\theta \in \widehat{\theta} - \sqrt{\frac{\gamma}{n}}J_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\gamma}}(\widehat{\theta}-\theta) \in J_\alpha\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(Z \in J_\alpha) = 1-\alpha$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $J_\alpha = [-q_{1-\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]$ où q_p est le quantile d'ordre p de $\mathcal{N}(0,1)$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(Z \le q_p) = p$, ce qui donne

$$I_{n,\alpha} = \left[\widehat{\theta} - \sqrt{\frac{\gamma}{n}}q_{1-\alpha/2}, \widehat{\theta} + \sqrt{\frac{\gamma}{n}}q_{1-\alpha/2}\right]$$

Cet intervalle de confiance permet de tester l'hypothèse statistique H_0 :«$\theta = 0$» contre l'hypothèse alternative H_1 :«$\theta \neq 0$». Pour $\alpha = 5\%$ on a $q_{1-\alpha/2} \approx 1.96$, ce qui donne avec les valeurs fournies pour n et $\widehat{\theta}$ l'intervalle $[-0.422, 0.963]$. Comme 0 appartient à cet intervalle, on accepte H_0 avec un niveau de confiance de 5% ;

3. Si $X^{(n)} = (X_0, \dots, X_{n-1})$ alors $\mathrm{Cov}(X^{(n)}) = \mathrm{Cov}(Y^{(n)}) = \Gamma_n$, d'où

$$\widetilde{Y}_n^{(n)} := \Gamma_n^{-1/2} Y^{(n)} = \theta \Gamma_n^{-1/2} \mathbf{1}_n + \Gamma_n^{-1/2} X^{(n)} = \theta A + Z^{(n)}$$

où $Z^{(n)} = \Gamma_n^{-1/2} X^{(n)}$ vérifie $\mathrm{Cov}(Z^{(n)}) = I_n$. On a donc

$$(A^\top A)^{-1} A \widetilde{Y}_n^{(n)} = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1/2} \Gamma_n^{-1/2} \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1/2} \Gamma_n^{-1/2} Y^{(n)} = \widetilde{\theta}_n.$$

Il s'agit donc tout simplement d'un estimateur par projection orthogonale obtenu par moindres carrés $\min_\theta \left\| \theta A - \widetilde{Y}_n^{(n)} \right\|$, bien connu pour le modèle linéaire ;

4. On a $\mathbb{E}(\widetilde{\theta}_n) = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1} (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n) \theta = \theta$ et

$$\mathbb{E}((\widetilde{\theta}_n)^2) = \frac{1}{(\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^2} \mathbb{E}((\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)})^2).$$

Or comme $\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)} = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)})^\top = Y^{(n)\top} \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n$ (il s'agit d'un réel), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)})^2) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)} Y^{(n)\top} \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n) \\
&= \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbb{E}(Y^{(n)} Y^{(n)\top}) \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n \\
&= \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} (\Gamma_n + \theta \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top) \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n \\
&= \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n + \theta (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^2
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{V}(\widetilde{\theta}_n) = \frac{1}{\mathbf{1}_n \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n}.$$

Or d'après le cours (décomposition de Cholesky LDL de Γ_n), on a

$$\Gamma_n^{-1} = \Phi_n^\top \mathrm{Diag}\left(\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \sigma^2, \dots, \sigma^2 \right)^{-1} \Phi_n \quad \text{où} \quad \Phi_n(i,j) = \mathbf{1}_{i=j} - \phi \mathbf{1}_{i=j+1}.$$

En notant que $\Phi_n \mathbf{1}_n = (1-\phi, \dots, 1-\phi, 1)^\top$, ceci permet d'établir la formule

$$\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n = (\Phi_n \mathbf{1}_n)^\top D_n \Phi_n \mathbf{1}_n = (1-\phi)^2 \frac{1-\phi^2}{\sigma^2} + (n-2)(1-\phi)^2 \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}.$$

Donc finalement

$$n \mathbb{V}(\widetilde{\theta}_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\sigma^2}{(1-\phi)^2}.$$

Ainsi, les estimateurs $\widehat{\theta}_n$ et $\widetilde{\theta}_n$ sont asymptotiquement de même variance.

Solution succincte de l'exercice 28 (Comparaison de différents estimateurs pour un MA(1)).

1. On sait que $\gamma_X = \sigma^2(1+\theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \sigma^2 \theta \mathbf{1}_{h=\pm 1}$, ce qui donne $\widehat{\gamma}(0) = \widehat{\sigma}^2(1+\widehat{\theta}^2)$ et $\widehat{\gamma}(1) = \widehat{\sigma}^2 \widehat{\theta}$, d'où on tire

$$\widehat{\rho}(1) = \frac{\widehat{\gamma}(1)}{\widehat{\gamma}(0)} = \frac{\widehat{\theta}}{1+\widehat{\theta}^2}.$$

Cela donne l'équation du second degré $\widehat{\rho}(1)\widehat{\theta}^2 - \widehat{\theta} + \widehat{\rho}(1) = 0$ en $\widehat{\theta}$ dont le discriminant $\Delta = 1 - 4\widehat{\rho}(1)^2$ est ≥ 0 ssi $|\widehat{\rho}(1)| \leq 1/2$. Si $|\widehat{\rho}(1)| \leq 1/2$ les solutions sont

$$\widehat{\theta} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\widehat{\rho}(1)}}{2\widehat{\rho}(1)}$$

et comme on souhaite que $|\theta| < 1$, on impose $|\widehat{\theta}| < 1$ ce qui donne

$$\widehat{\theta} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\widehat{\rho}(1)}}{2\widehat{\rho}(1)}.$$

Si $\widehat{\rho}(1) = 1/2$ alors $\widehat{\theta} = 1$ tandis que si $\widehat{\rho}(1) = -1/2$ alors $\widehat{\theta} = -1$. Pour rendre l'estimateur «continu», on pose finalement

$$\widehat{\theta} = g(\widehat{\rho(1)})$$

où

$$g(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u > 1/2, \\ \frac{1-\sqrt{1-4u^2}}{2u} & \text{si } |u| < 1/2, \\ +1 & \text{si } u < -1/2. \end{cases}$$

2. D'après le cours (formule de Bartlett)

$$\sqrt{n}(\widehat{\rho}(1) - \rho(1)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, w_{1,1})$$

où

$$w_{i,j} = \sum_{k\geq 1} [\rho(k+i) + \rho(k-i) - 2\rho(i)\rho(k)] [\rho(k+j) + \rho(k-j) - 2\rho(j)\rho(k)].$$

Comme X est un MA(1) on a $\rho(h) = 0$ si $|h| > 1$ et donc (note : $\rho(0) = 1$)

$$w_{1,1} = \underbrace{(\rho(0) + 0 - 2\rho(1)^2)^2}_{k=1} + \underbrace{(\rho(1) + 0 - 0)^2}_{k=2} = 1 - 3\rho(1)^2 + 4\rho(1)^4,$$

ce qui donne

$$\sqrt{n}(\widehat{\rho}(1) - \rho(1)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1 - 3\rho(1)^2 + 4\rho(1)^4).$$

3. On a $\widehat{\theta}^{(1)} = g(\widehat{\rho}(1)$. La méthode-delta donne

$$\sqrt{n}(g(\widehat{\rho}(1)) - g(\rho(1))) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \underbrace{g'(\rho(1))^2 w_{1,1}}_{=\sigma_1^2(\theta)}).$$

Un calcul donne

$$\sigma_1^2(\theta) = g'(\rho(1))^2 w_{1,1} = \frac{1 + \theta^2 + 4\theta^4 + \theta^6 + \theta^8}{(1-\theta^2)^2}.$$

4. On a $\sigma_2^2(\theta) = 1$. L'estimateur $\widehat{\theta}_2$ est meilleur que $\widehat{\theta}_1$ ssi $(1 =)\sigma_2^2(\theta) \leq \sigma_1^2(\theta)$ c.-à-d. ssi $1 + \theta^2 + 4\theta^4 + \theta^6 + \theta^8 \geq (1-\theta^2)^2 = 1 - 2\theta^2 + \theta^4$, ce qui est toujours vrai.
5. On a $\sigma_3(\theta)^2 = 1 - \theta^2$. L'estimateur $\widehat{\theta}_3$ est meilleur que $\widehat{\theta}_2$ ssi $(1 - \theta^2 =)\sigma_3(\theta)^2 \leq \sigma_1(\theta)^2 (= 1)$ ce qui est toujours vrai.